徐果明　周蕙兰　编著

地震学原理

科学出版社

地 震 学 原 理

徐果明　周蕙兰　编著





科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

这是一本以叙述地震学的基本理论为主，并兼顾应用的基础理论读物。全书共分十六章。第一章概述了地震学的发展简史和研究内容，地震的宏观现象，地震活动带与板块构造的关系。第二、三章介绍了与地震学有关的弹性力学基础知识。第四至第七章详细阐述了地震体波、面波在地球介质中的传播理论和介质对它的吸收影响；并介绍了多层弹性半空间中的平面波理论，以及求面波频散曲线的数值计算新方法。第八章介绍了震源点源力系理论。第九章叙述了震源点源位错理论和位错运动源理论。第十章是多层弹性半空间问题和兰姆问题。第十一章至第十三章叙述测定地震基本参数的方法，以及有关震级物理意义、地震震源波谱标定律方面的讨论情况。第十四章概述了走时表的编制方法及天然地震波在研究地壳、岩石层构造方面的应用。第十五章叙述了震源机制P波初动解和用地震波资料在时间域或频率域测定震源动力参数的方法。第十六章为地震预报简介。

本书可供地球物理工作者、地震工作者以及高等院校的有关专业师生参考。

地 震 学 原 理

徐果明　周蕙兰　编著

责任编辑　周文辅

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1982年4月第一版　　开本：787×1092　1/16

1982年4月第一次印刷　　印张：29 1/4

印数：0001—2,800　　字数：659,000

统一书号：13031·1865

本社书号：2534·13—14

定价：4.39 元

前　言

地震是一种自然现象，与国计民生密切相关，早已为人们所关心，并进行了某些研究工作．地震学是研究地震现象的一门学科，具有悠久的历史．自从上世纪末本世纪初以来，这门古老的学科迅速发展成为一门独立而完整的现代科学，在地震活动规律的统计研究、地震波理论、震源力系和位错理论、地球内部结构、地震预报等各方面都进行了越来越深入的探索，并已取得了很大的进展．我国是个多地震的国家，也是最早开始观察、记载和研究地震的国家之一．解放以后，地震学的研究工作更得到了迅速发展，已取得了不少可喜的成绩．当前，地震的成因和发生规律，以及预报地震的研究工作，已成了重要课题．地震科学工作者正在深入探索和实践．

为适应地震科学研究的这种发展和需要，本书以叙述地震学的基本理论为主，并兼顾应用．为了适当反映当前国内外的情况，本书除了叙述地震学的经典理论及应用外，还介绍了震源的位错理论、多层弹性半空间问题、介质吸收、板块构造与地震之间的关系、震级物理意义和震源波谱标定律方面的讨论情况、用地震波在频率域或时间域测定震源参数、面波频散曲线的数值计算新方法以及地震波在测定地壳及岩石层结构方面的新动态．

本书引入了张量的符号，特别是引入了符号 δ_{ijk} 及其运算法则，使公式的推导过程大为简化，表达形式简洁．不熟悉这类符号的读者可以先阅读附录一，以有益于理解正文．

地震学的内容极其丰富广博，作者水平不高，有错误和不妥之处，热诚盼望读者批评指正．

作者承蒙傅承义教授热情指导，并审阅全稿，在此表示衷心的感谢．其他许多同志都曾给予很大帮助和支持，在此一并致谢．

本书第一至十章由徐果明执笔，第十一至十六章由周蕙兰执笔．

目 录

第一章 宏 观 地 震

§1.1 地震学的发展概况和研究内容

一、地震学的发展概况

在地球本身的发展过程中，各部分之间发生着某些相对运动．地震就是这些相对运动中的一种[1]．短暂、一瞬即逝，是其特点．大地震伴随有强烈的断层错动和地面形变，在很短时间内就会给人类造成巨大的灾害．弄清地震的成因，进行预测和预防地震，始终是地震研究的重要目的之一．地震现象的观测研究又是研究地球内部构造的重要途径．地震学的研究成果和方法，在国家工农业建设和国防建设上起着重要的作用，前者如提出基本建设烈度，后者如侦察地下核爆破．

人们对地震的观察研究开始得很早．远在公元前780年，我国就有了关于地震的历史记载．但是，由于地震发生在地下深处，难以直接观测，因此，地震学作为一门自然科学发展得比较缓慢．在十九世纪末期之前的漫长时期内，地震的研究工作仅停滞在宏观现象的描述上，而且基本上是自发地进行着．我国东汉的张衡虽早在公元132年就创制了地动仪，但是长期的封建制度束缚了研究工作的发展．我国历代都有丰富的历史地震记载，这无疑是研究地震活动的宝贵资料，是对人类的重要贡献．但是从科学性来看，还是不够的．十七世纪三十年代到十九世纪中期，弹性理论得到了欧洲科学家伽里略(G. Galileo)、胡克 (R. Hooke)、柯西 (A. L. Cauchy)、泊松 (S. D. Poisson)、斯托克斯 (G. H. Stokes) 等人的重视和研究．这虽是地震波理论的基础，但当时并没有和地震联系起来．直到十九世纪末二十世纪初，地震仪由格雷 (T. Gray)、米尔恩 (J. Milne)、尤因 (J. A. Ewing)、维歇尔特 (E. Wiechert)、伽利津 (B. Galitzin) 等人先后研制成功，得到了地震记录图，而这些图上的震相的解释就把地震和弹性理论联系了起来，导致地震波理论的迅速发展．从此，地震学的研究超出了定性描述阶段，而很快成为一门独立、完整的数理性很强的现代科学．

从十九世纪末到本世纪初这段时间内，关于地震现象本身的研究深入了．

1. 随着仪器观测资料的积累，地震统计研究得到加强．关于全球的地震活动性的分布情况调查得更仔细了．

2. 随着地震波理论的发展，引导人们发现各种体波、面波震相．地震图上的新震相又促使人们发展理论来加以解释．

3. 关于震相的识别和推求地震发震时刻、震源位置的技术得到了发展．编制了区域性的走时表和全球平均的远震走时表．

4. 里克特 (C. F. Richter)、古登堡 (B. Gutenberg) 震级体系建立，地震标度定量化．同时，烈度表也大为改进，它是对地震大小的一个半定量、半定性的度量．

5. 弄清楚了地球上绝大多数地震是构造地震．火山地震比较少，而所谓塌陷地震就更少了．它们的影响范围是很小的．而关于构造地震，普遍认为是断层错动造成的．雷

德（H. F. Reid）针对这种情况，依据1906年美国旧金山大地震前后的大地测量资料和地震形成的地表断层，提出了关于地震成因的弹性回跳理论.

同时，在这段时期内，通过对地震现象的观测研究，人们对地球内部构造的认识大大深化和丰富了.

1. 莫霍洛维奇（A. Mohorovicic）根据1909年10月8日库尔普特尔盆地-克罗地亚（Kulpatal Valley, Croatia）地震的近震记录中出现的不同性质的两个P波和两个S波，确定地壳底面的深度，确认了地壳的存在.

2. 古登堡在1913年根据远震震相的变化给出地球外核的深度为2900公里.

3. 雷曼（I. Lehmann）在1936年根据1929年6月16日和1931年2月2日两个新西兰地震的记录图，发现地球内核.

4. 杰弗瑞斯（H. Jeffreys）和布伦（K. E. Bullen）、古登堡根据全球大量地震的震相观测资料，用数理统计方法给出了全球平均观测走时，并反演求得地球内部的纵横波速度随深度的变化曲线，揭示了地球内部速度分布情况. 由此变化曲线所求得各种震源深度下的地震波的理论走时表，又是分析震相和推求发震时刻、震源位置的重要工具.

本世纪五十年代以来，各国对地震学的研究以及国际交流和国际合作都加强了，使地震学取得了多方面的发展，简要概括成以下几点.

1. 震源机制

在雷德的弹性回跳理论基础上，地震直接发动机制的研究得到很大发展. 震源等效模型由单力、单力偶、无矩双力偶、双无矩偶极等力系模型，发展到位错模型；由点源模型发展到一维单侧、一维双侧、二维双侧等有限移动源模型. 在这些模型基础上，给出了地震波位移表示式. 将这些理论应用于观测到的地震波，扣除传播介质、仪器对波的影响，可以推断断层面的空间位置、破裂长度、破裂传播速度、地震矩、应力降等参数. 所使用的震相已经由P、S波扩展到面波. 资料处理工作通过傅里叶变换，借助于电子计算机，既可在时间域进行，也可在频率域进行.

2. 地震统计

围绕着地震活动性的广泛研究，地震统计方面也取得了更多进展. 得出了一些比较带有普遍意义的经验关系，例如震级-能量关系，震级-频度关系，余震频度衰减规律，等等. 这些关系对于揭示地震活动规律是很有意义的，也吸引着人们去探索它所反映的物理背景.

3. 地震预报

由于一些大的地震不断地发生，给人类带来了巨大灾害，因此引起人们对实现地震预报工作的渴望和重视. 在国外，日本地震学家于1962年就已制订和实行了开展预报研究的计划. 美国和苏联也都很重视这方面的工作. 在我国，从1966年邢台大地震之后，地震预报的研究工作得到了很大的推动并受到了各界的广泛支持. 经过很大努力，取得了某些成功的经验，如初步成功地预报了1975年海城大地震. 但也得到了许多失败的教训. 在今天，距准确预报地震的要求还有很长一段距离，尚待努力攀登.

4. 震源物理

地壳岩石断裂产生地震．因此，岩石力学、岩石破坏物理的研究工作，对于探讨地震前兆现象多样性的原因，对于深入了解震源的物理过程都是非常重要的．同时也是有关地震预报实验研究的重要课题．目前人们在岩石摩擦、岩石的物理性质和前兆现象、应力场的分布等多方面进行着实验室研究和理论探讨．

5. 观测和数据处理系统的自动化

目前，地震的仪器观测除已经向着区域成网和全球成网方向发展并已取得很大进展之外，还组成了台阵来压低干扰提高信噪比，在记录天然地震和侦察地下核爆炸方面也取得了成绩．同时，磁带记录和电子计算机的应用，已使人们能迅速全面地分析测定各种参数，提取有关震源和传播介质的各种感兴趣的信息．

6. 地球内部构造

六十年代兴起的板块学说使地震的地理分布和全球板块构造单位联系起来，也促使地震震源机制与板块机制联系起来进行研究．加深了对地震成因的认识．

通过震相分析和地震波理论研究，对地震面波的高阶型、短周期面波、通道波以及长周期面波即地幔波的机制都有了进一步的认识．对地壳的区域变化和详细分层情况，作了更多的探查．对地幔内速度的细节变化、核幔界面的性质、内核界面的性质，也展开了更深入的讨论．

五十年代和六十年代，观测到了一些强烈地震造成的地球自由振动．人们对地球自由振动进行了理论研究．对它的观测研究有助于进一步了解地球的内部构造和物质组成．

二、地震学的研究内容

地震学研究内容可以从以下四个方面来作简要地介绍．

1. 地震灾害和预测预防

(1) 地震宏观调查

极震区的现场调查工作为研究地震的性质和地震成因提供了重要资料．随着地震科学的发展，地震调查的内容越来越丰富．现代地震调查是有组织进行的．调查内容不仅包括地震断裂、塌岩、山川易位、喷沙冒水等地表现象，而且还要记载建筑物的结构、地震对其破坏情况，以便为工程建筑提供资料．近年来，地震预报预测的探索又促使人们对震前的声、光、气象、动物行为异常等各种前兆现象进行询问和记录．

(2) 地震区划

按地震活动的强弱和分布情况及地质条件划分地震带或地震区并评价它们的地震危险程度．地震区划指出可能的地震危险区，为国家建设和地震监视网的布局提供依据．

(3) 地震预防

研究地震对建筑物的影响，研究建筑物的结构设计、施工质量与抗震性能的关系，以及提出合理的抗震设计．

(4) 地震预报

有关地震成因、地震本身活动规律、地震前兆、触发因素的研究工作，都给准确预报地震提供着参考依据. 我国正在进行着这种地震预报的实践工作.

2. 地震物理

地震是岩石弹性和岩石破坏的一种反映，地震学是固体地球物理学的一部分，地震的发生要作为一种物理现象来研究.

(1) 地震波理论

这是在弹性力学基础上，研究地震波在地球内部和地表传播的理论，是地震学的重要内容.

(2) 震源物理和模拟实验

研究震源岩石的破坏机制及前兆产生的原因. 在实验室内进行实验，模拟地震的发生或某些与地震有关的现象.

(3) 地震现象的固体物理学

从研究地震现象入手，推断地球内部物质的物理性质，如温度、密度、弹性模量的大小、变化及分布情况，从而对处于特殊状态(如高温高压)下的固体介质的各种特性进行研究.

3. 地震应用

(1) 地震信息和地球内部结构的研究

地震仪记录下来的地震波包含有关震源和传播介质的信息，反演可求得地壳、地球内部结构. 地震学在地壳、上地幔、地球动力学研究中起重要作用.

(2) 地震区划烈度

根据地震区划工作的结果，可向国家提供建设烈度，以作为工程建筑设计的依据.

(3) 地震勘探

利用地震学的基本原理探测地下资源. 这已发展成为地球物理探矿的重要方法之一.

(4) 侦察地下核爆炸

用地震学的原理来侦察地下核爆炸，台阵建立的最初目的就在于此.

(5) 地震地质

地震地质探讨地震发生的地质条件. 从地质学角度来看，地震又给出了地质活动的独立标志，有助于地质学的研究.

4. 地震接收和数据处理方法

(1) 地震仪的改善和研制

进一步改善地震仪的性能和研制新的仪器，扩大观测范围.

(2) 台阵技术

利用仪器的组合提高信噪比，获得更多资料.

(3) 数据处理自动化

研究新的数据处理方法，利用电子计算机迅速准确地进行处理.

§ 1.2　地震的宏观现象

人们对地震的认识首先是从地震的宏观现象开始的.地震的宏观现象包括地震断层、地面的形变、对建筑物的破坏等等. 这些破坏往往造成巨大损失.

一、地震的地表现象

大地震发生时，震中区地表会发生激烈的变动，沿着几十到几百公里的长度上地面分成两部分，即沿断层发生相对的水平或垂直错动. 例如 1973 年 2 月 6 日四川炉霍地震就以水平运动为主，而 1897 年印度阿萨姆地震就形成了巨大的垂直方向的错动，最大断距达 12 米. 这些错动往往是沿着老的断层多次活动，例如美国加州许多大地震与圣安德列斯大断层的水平错动有关. 有时这些错动形成了新断层，例如 1970 年 1 月 5 日云南通海地震 (7.7 级) 震后形成了全长 54 公里，断距为 2 米的新断层.

地震时地面会发生强烈的变形，例如 1970 年通海地震时造成的地面塌陷有的宽达 20—30 米，长 200 多米，下沉深度达 6.5 米. 据报道，1923 年日本东京地震时，据海底回声测量，附近的相模湾沿东南至西北的横贯海湾的一条构造线，以北上升了 200 米，以南下降了 100 米. 因此，海湾体积突然发生了巨大变化，形成了巨浪. 但是这样巨大的变化，在陆地上还未曾见到过. 因此有人认为测量位置的确定有问题，或震后在海底形成的泥流影响了测量结果.

地震时，在高山峡谷地区往往会引起山崩地滑. 1933 年 8 月 25 日，四川茂县迭溪地震后，巨大的山崩在峡谷中筑成了一个天然的堤坝堵塞了岷江河道，形成了一个"地震湖". 45 天后，至 10 月 9 日，河水漫过堤坝造成堤坝的突然崩塌，洪水倾泻而下，造成了严重的水灾. 又如 1970 年通海地震时，由于引起滑坡，使河坎村 16 户人家的房屋推移了约 100 米.

在震中区的广大地面上往往形成许多裂缝，有时裂缝区可达数十万平方公里.地裂缝在河岸附近特别发育，1966 年邢台地震时，沿滏阳河两岸，特别是在河堤上形成了许多地裂缝，一般宽数十厘米，深 2—3 米. 因为裂缝的表面积与总的震中区大地面积之比极小，因而地震时人、畜掉进裂缝的几率是极微小的.

地震时往往有往上冒水的现象，甚至形成喷泉，有时夹带出大量的泥沙. 这样的事例极多，邢台地震、通海地震等都有喷水冒沙的现象，并且在地震后还继续一段时间. 如果它们发生在农田里，则由于泥沙的淹盖，会给农业生产带来损失.

地震可以形成山崩. 同时，巨大的山崩的泥石冲击有时也可看做是一次小地震. 例如 1965 年 11 月 22 日云南禄劝发生巨大的山崩，1.7 亿米^{3}的岩石土块滚滚下滑了数公里，崩塌的最大高差达 1800 米，堆积物高达 180 米，底面积达 2.6 平方公里. 根据地震仪的记录，相当于一次 3.5 级地震.

二、地震对建筑物的影响

地震对建筑物会带来损失，尤其是住房的倒塌是地震造成人员伤亡的主要原因. 目前我国农村群众的住房抗震能力与要求还有差距，特别是在北方有的地区房顶盖上达一

尺多厚，这样重的房顶在地震时不仅容易倒塌，而且更易造成伤亡.江苏、安徽地区有不少住房用空斗墙结构，这样的房子抗震性能很差．1974 年 4 月 22 日江苏溧阳的 5.5 级地震倒塌的房屋中十有八九是这类房屋，而土坯或土墙草顶的房屋则倒塌的很少．1966 年的邢台地震时，震区破坏最严重的隆尧县马兰村几乎所有房子都倒了，唯有一所土坯住房依旧完好，发现它在抗震方面建造得比较合理．这说明只要采取适当的抗震措施，就能大大地减轻损失．在建筑时，要特别注意沙浆饱满，房屋尽量矮些，开间不要过大，结构上互相衔接，加强整体性．特别要注意各个部件之间的连接，如墙柱之间、柱梁之间等等．农村住宅的砖面土坯墙和卵石墙的抗震性能是极差的，女儿墙更是容易倒下伤人．而工业建筑则要根据重要性和经济性，分别采取不同的抗震措施．地震时建筑物的受破坏程度还与地基条件密切相关.

三、地震对水面的影响

在海中或沿海岸发生大地震有时会在海面上形成长周期的波，周期可达数十分钟，甚至一小时以上．当这种海浪袭击岸边时，形成所谓海啸，常常会造成重大损失．太平洋周围地震带的地震往往引起巨大的海啸.

简单的理论考虑给出海浪前进的速度为 $v=\sqrt{gH}$，其中 g 为重力加速度，H 为水深．太平洋的平均水深约为 5.6 公里，g 取为 9.8 米/秒^2，则 $v=234$ 米/秒 $=842$ 公里/小时．前面说过这种海浪的周期很长，因此由 $\lambda=vT$ 可以算出它的波长达数百公里．在大洋中，海浪的振幅只有几米，船在一小时以内作几米的升降不会引起什么感觉，但是当这些海浪进入浅海后由于水深大大减小使波的前进速度也减小，根据能量守恒，海浪的高度必然会大大的增加．当它袭击海岸时，特别是冲入海湾、河口及狭窄的堤岸内时海浪高度将进一步增高，在夏威夷曾见到高达 16.8 米的海啸．然而，在浅海区形成的巨大海浪，由于水中形成的旋涡及对海底的摩擦阻力，就会逐渐耗散其能量，因此，浅海区越宽，对削弱海啸就越有利．我国沿海有广阔的浅海大陆架，它们形成了防止太平洋方向来的海啸灾害的天然屏障．因此像 1960 年智利所发生的大地震，在智利、夏威夷、日本等地都形成了巨大的海啸，而对我国的影响不大.

由于地震波的速度可达 8 公里/秒以上，大大超过海啸在大洋中的传播速度，因此地震发生后要经过一段时间海啸才能到达．例如智利地震形成的海啸经过二十多小时才到达日本.可以利用这个时间差来及时地预报海啸的到达，以便及时采取措施.

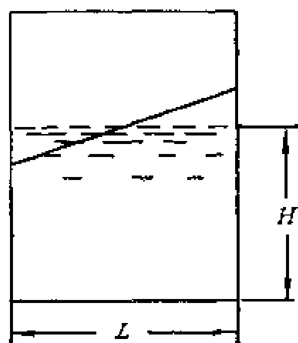


图 1.1

桌子上放着一盆水，当我们抬一下桌边时会发现水在盆中继续作周期性的来回摇晃，如图 1.1 所示．理论计算表明，水的振动周期为

$$T=\frac{2L}{\sqrt{gH}}.$$

为使计算简化，假定盆是长方形的，晃动方向的长度为 L.

地震时在湖面、水库乃至港湾、河道内的水面也都会发生这样的晃动，称之为湖震．风、潮汐也能引起类似的现象，但其规模要小得多．对大的湖面，湖震周期可达数十分钟，振动可延续至数小时甚至一、二天．有时湖震会使水漫出堤坝，造成一定损失.

四、地震时人的感觉

地震时往往先听到低沉的轰隆声，有如远处的闷雷，听到声音后没有几秒人就会感到头晕、站立不稳、开始摇晃乃至跌倒. 当震中距比较大时(几百公里以外)则仅感到摇晃听不到声音，因为地震的高频成分是衰减很快的. 在极震区听到声音与开始感到强烈的振动两者往往是同时发生的，至多差三、四秒. 从开始强烈振动到房屋倒塌也还有几秒时间，有经验的人可以利用这个时间差及时脱离危险. 一些地震的现场调查报告中报道了地震发光的现象，有如远方闪电，有时在地震前天空发光，这些现象在白天不易见到.

上面谈到了地震时的各种宏观现象. 从产生这些宏观现象的原因来讲，可以分为地震的原生效应和次生效应. 地震的原生效应或称为直接影响是指与地震成因直接有关的宏观现象. 例如地震时极震区岩层的错动，巨大地块的升降、变形，火山地震中火山的喷发，陷落地震中溶洞的崩塌等等. 地震的原生效应只在震中区发生，也是确定震中区的重要标志. 对它们的研究有助于我们对地震成因的认识. 然而，在第四纪沉积物覆盖层很厚的平原地区，地震的原生效应较难观测到.

地震的次生效应或间接影响是指由于地震产生的弹性波在地面引起的振动而造成的后果. 如山崩、地滑、建筑物的毁坏、湖震等等(某些巨型山崩可以是地震的原生效应). 对这些后果的研究对保护人民生命财产和国家重要工程的安全有直接的关系. 地震时形成的地裂缝、挤出的土堤等等可以是原生的也可以是次生的，要具体研究. 例如 1966 年邢台地震中沿滏阳河河岸形成的大量裂缝便是次生效应. 一般地说表土的裂缝大都是次生效应.

§1.3 地震的宏观调查

地震的宏观调查是地震研究和地震预报工作的一个组成部分. 通过宏观调查可以了解地震前后的宏观现象，再结合地震地质情况的调查，有助于了解地震的发震机制和成因，判断地震发展趋势. 同时，有助于总结建筑物抗震性能的正反两方面的经验. 通过宏观调查可以广泛了解和总结地震前的宏观前兆现象，为地震预报工作积累资料和取得经验.

宏观调查要求：

(1) 调查地震对建筑物的破坏情况，认真总结正反两方面的经验，为今后采取的建筑物抗震措施提供重要依据，同时也是判断烈度分布的重要资料.

(2) 调查地震后的自然宏观现象，特别要注意地震的原生效应和断层位移、地面的变形等等，并注意与地质构造的联系. 因此，这一工作要紧密结合地震地质工作来进行，特别应注意当地的新构造运动状况.

(3) 调查了解地震时人们的感觉和地震前后的声、光现象.

(4) 我国有悠久的文化和历史，在各种通史、通志、地方志中，对历史上的大小地震一般都有比较详细的记载，在调查中要注意这些资料的搜集. 古建筑如古庙宇、塔、楼、亭、阁等，在遭受地震破坏后进行重修时，所建的碑的碑文中对地震破坏情况一般都有记载. 在近代的地震中，这些古建筑也常有破坏的痕迹，这些都是研究该地区地震活动的重要资

料.

§ 1.4 地震烈度

一、烈　度

烈度是指地震对确定烈度大小的地点的影响程度. 烈度与震级不同，地震的震级是指地震本身的大小. 比如在地上放着一个十公斤的炸药包，如果把炸药包比作地震的话，十公斤就与震级相当，而炸药包对地面破坏的大小就相当于烈度. 靠近炸药包的地方破坏当然大些，相当于烈度高，远一些的地方则烈度低. 震中处的烈度称为震中烈度，对大地震来说震中不是一个点而是一个区域. 同样大小的地震，若震源深度不一样，对地面的破坏程度不一样，因此震中烈度也不一样；一般地说，震源越深，震中烈度越小. 对同一个地震，震中距越大，烈度越小.

二、确定烈度的方法

烈度工作最后的成果集中表现在地震的烈度分布图. 这个工作是在宏观调查的基础上进行的. 地震烈度的标志大体上分三个方面，即1. 自然现象（包括地质现象）；2. 建筑物的破坏；3. 人的感觉. 目前我国的烈度标准是 1957 年修订的，共分十二个等级，即十二度. 确定了各个地点的烈度，就可以在地图上把不同烈度的区域用曲线分开，这样的曲线称为等震线（图 1.2）它们都是封闭曲线. 在地图上两个等震线之间的区域为同一烈度的区域. 特别小的局部异常地点可以在画等震线时平滑掉，或不予考虑. 面积比较大一些的烈度偏高或偏低的异常区域要在图中表示出来.

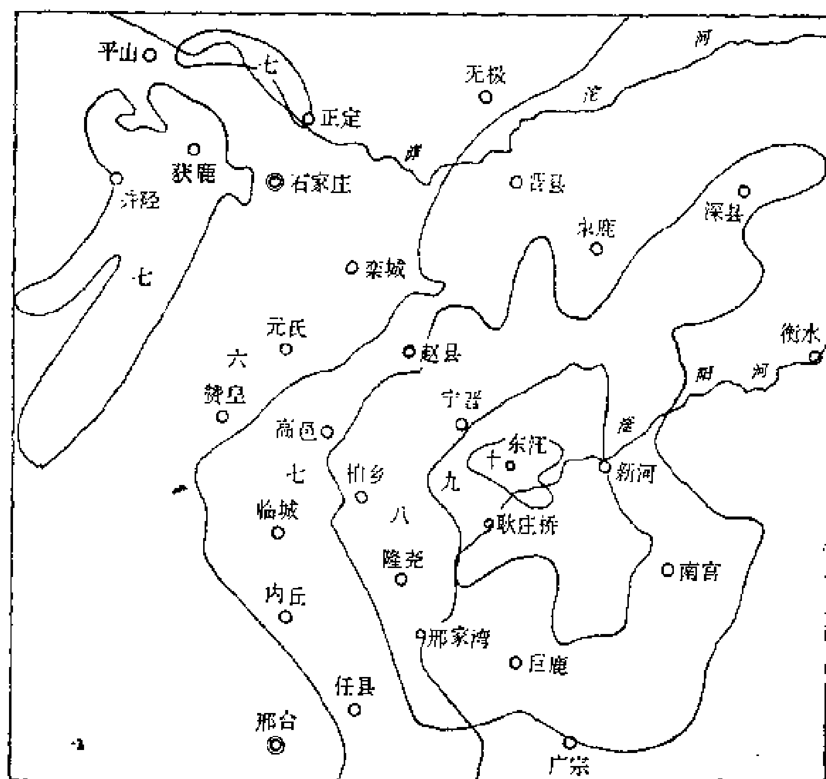


图 1.2　1966 年 3 月 22 日邢台地区东汪大地震烈度分布图

最内等震线所封闭的区域称为极震区，极震区的中心称为宏观震中.

到目前为止烈度仍然停留在宏观描述的基础上. 不少人曾试图用各种物理量来反映地震的破坏作用，例如最大加速度值、速度值、位移值等等.

例如莫一坎十二度烈度表中就将最大水平加速度与烈度相对应.

烈 度	I	II	III	IV	V	VI
加速度（毫米/秒²）	<2.5	2.5—5	5—10	10—25	25—50	50—100
烈 度	VII	VIII	IX	X	XI	XII
加速度（毫米/秒²）	100—250	250—500	500—1000	1000—2500	2500—5000	5000—10000

但是这种对应关系与许多实际情况并不完全相符. 在研究我国云南通海地震时，工程力学所的同志发现烈度高的地区最大加速度值不一定比烈度低的地方大.

三、烈度几率

烈度几率是用来衡量某一地区在某段时间间隔内遭受某度烈度的地震破坏的可能性. 它是用零到 1 之间的一个数字来表示，如果肯定某度烈度的地震破坏一定发生，则其几率为1，如一定不发生，则几率为零. 引入了烈度几率就可以根据建筑物的使用寿命，采取各种抗震措施所需增加的投资数和发生地震所造成的损失等等因素之间来权衡得失，以决定建筑物按多少烈度设防为最佳.

为了减少地震损失，建筑物就越牢固越好，也就是所谓抗震烈度越高越好. 但是为了减少投资费用，建筑物采取的抗震烈度就越低越好，两者是矛盾对立的统一体，不能片面强调某一方面. 为了确定合理的抗震烈度就要考虑烈度几率.

设 $M(I_0)$表示建筑物按 I_0度烈度设防比不考虑地震设防所需增加的投资数，用 $L(I_0, I)$ 表示建筑物按 I_0 度设防后遭受 I 度烈度的地震所造成的损失；而在建筑物使用寿命期间 Δt 内遭受 I 度烈度的地震的几率为 $W(I)$. 则 Δt 内可能因地震造成的损失为

$$\sum_{I=6}^{12} L(I_0, I)W(I).$$

因为 $I < 6$ 一般不会造成损失，所以上述求和号从 $I = 6$ 开始. 令

$$S(I_0) = M(I_0) + \sum_{I=6}^{12} L(I_0, I)W(I),$$

S 是 I_0 的函数，使 S 为最小的 I_0 就是合理的抗震烈度. 按此烈度设防可以达到投资不过份大而发生地震时造成的损失也不过份大. 考虑损失时应考虑间接损失，如因建筑物损坏而停产造成的损失. 政治及人身安全等方面的因素在确定烈度时也应作为一个重要方面来考虑.

四、根据烈度分布确定震源深度[13]

有地震仪记录的地震可以根据记录资料——地震图来确定震源深度，但对历史上发

生的地震没有仪器的记录资料，就只能根据宏观的方法来估计震源深度. 具体来说就是由地面的烈度分布图来定出震源深度. 实际震源是在一定的深度区分布的，也就是震源处的错动是一个面而不是线和点，而由宏观方法估计的是平均的深度. 用宏观方法定震源深度，曾有很多人在不同的假定下作了讨论，总结他们的方法可以用下式来概括：

$$I = p\lg a + q, \tag{1}$$

其中 I 为烈度，a 为此烈度处的加速度，由地震波的理论可知

$$a = kr^{-m}e^{-\alpha r}, \tag{2}$$

其中 r^{-m} 为扩散因子，$e^{-\alpha r}$ 为吸收因子. 可以将上式近似地以

$$a = kr^{-n} \tag{3}$$

来代替. 将 (3) 式代入 (1) 式得

$$I = -2S\lg r + q', \tag{4}$$

其中 $2S = np$, $q' = p\lg k + q$ 均为常数. 设 r_1 和 r_2 处烈度为 I_1 和 I_2（图 1.3），由 (4) 式知

$$I_1 - I_2 = 2S\lg\frac{r_2}{r_1}, \tag{5}$$

或

$$I_0 - I = 2S\lg\frac{r}{h}, \tag{6}$$

或

$$h = \frac{\Delta}{\sqrt{10^{\frac{I_0-I}{S}} - 1}}. \tag{7}$$

因为宏观的方法是近似的方法，可以用量版法来估计 h，对 (7) 式取对数得：

$$\lg h = \lg\Delta - \frac{1}{2}\lg\left(10^{\frac{I_0-I}{S}} - 1\right). \tag{8}$$

(8) 式中右方两项之差应为常数 $\lg h$，因为对同一次地震 h 为一个确定的数，令 $S = 1.5$, 2.0, 2.5……分别作 $\frac{1}{2}\lg\left(10^{\frac{I_0-I}{S}} - 1\right) \sim I_0 - I$ 曲线，这就是使用的量版曲线，在与量版同样的坐标上描出 $\lg\Delta \sim I_0 - I$ 曲线，则对比量版与 $\lg\Delta \sim I_0 - I$ 曲线可以在量版上找出某一曲线与此相似，此量版曲线与 $\lg\Delta \sim I_0 - I$ 曲线的纵坐标差便为 $\lg h$，并可同时找出量版曲线的 S 值，因此用量版法可同时求出 h 和 S 值来.

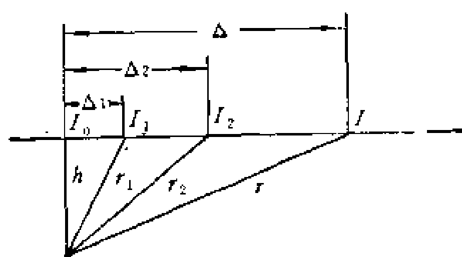


图 1.3

§ 1.5 地震活动带

地震的地理分布可用地震活动性分布图来表示. 分布图可按下列原则之一来绘制：

(1) 把全球或某地区在一定时期内发生的大于一定震级的地震全部点在地图上.

(2) 按单位时间内地球表面单位面积上所释放的地震能量来绘制.

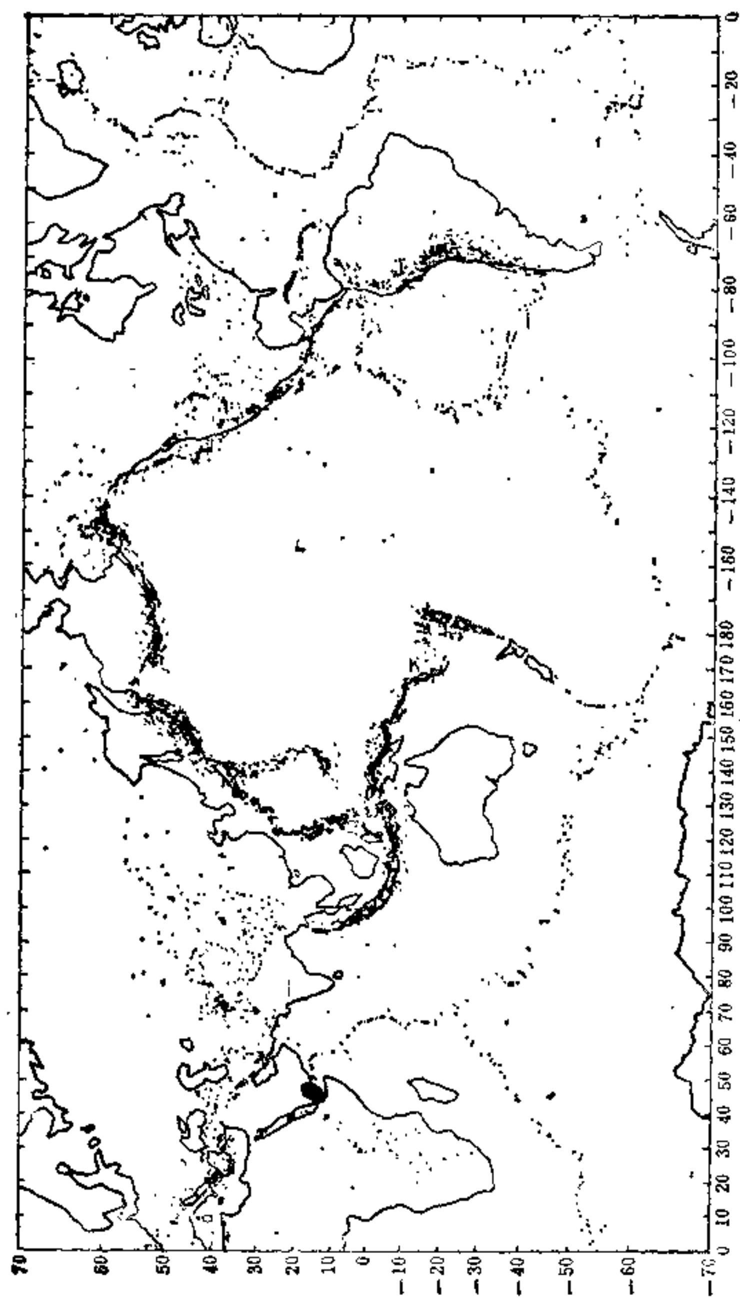


图 1.4 1961—1967年间全球的29000个地震的震中分布图[63]

(3) 按不同地区曾经发生的或可能将发生的地震在地面造成的最大烈度来绘制，它又称为地震区划图.

图 1.4 给出了 1961—1967 年全球的地震震中分布图[65]. 根据地震活动情况可分为以下三个地带:

(1) 环太平洋地震带;

(2) 大洋海岭带及东非裂谷带;

(3) 亚欧地震带.

其中环太平洋带，其地震活动最为强烈，每年释放的地震能量占全球地震释放总能量的 80% 左右.

亚欧带，即从印尼开始，经印度支那半岛的西部和喜马拉雅地区、伊朗、土耳其到地中海北岸，一直延伸到大西洋的亚速尔群岛.

大洋海岭带及东非裂谷带，从西伯利亚北岸靠近勒拿河口开始，穿过北极经斯匹次卑尔根群岛和冰岛，再经过大西洋中部海岭到印度洋中的一些狭长的海岭地带或海底隆起地带，并有一分支穿入红海和著名的东非裂谷区.

一部分地震发生在大陆板块的内部，分布比较零散，例如中国大陆的地震就是如此. 它们与大陆板块内部的应力作用过程有关.

在典型的太平洋岛弧地震带，从大洋洋而一侧开始沿水平方向向大陆一侧依次有如下结构[6](图 1.5).

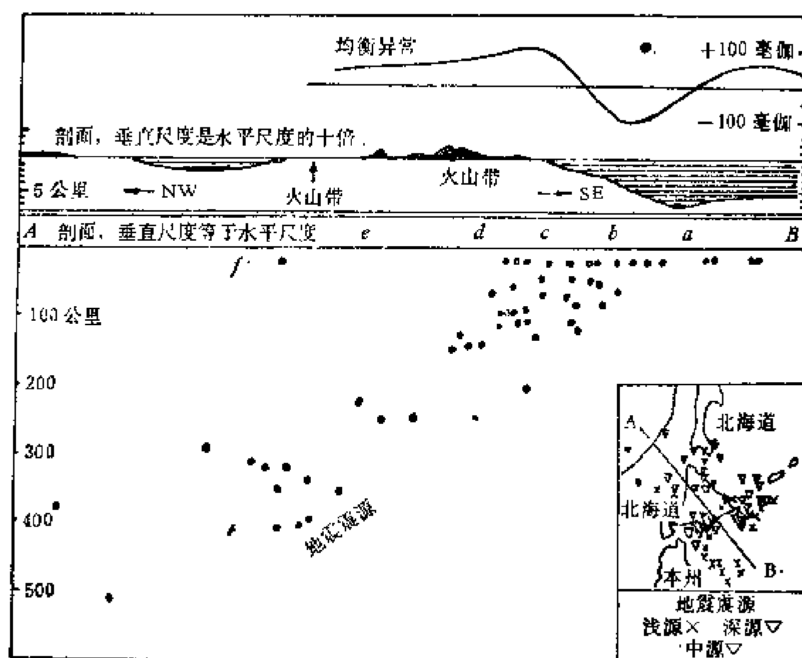


图 1.5 典型的岛弧地震带(日本北部)[6]

a. 深海沟;

b. 强烈的浅源地震活动、背斜构造、负重力异常;

c. 60 公里深的地震带、正重力异常;

d. 主要的弧形构造，形成巨大的岛屿、活火山或最近才熄灭的火山，100 公里深的地

震；

e．内部的弧形构造，火山活动已年代久远，震源深度约 200—300 公里；

f．300—700 公里深的地震活动带．

图 1.5 为穿过日本北海道的一个剖面图，它显示了这种弧形构造的种种特征．根据板块学说，实际上这一系列现象是由于大洋板块运动时与大陆板块相遇并俯冲到地幔内而产生的．正是这种相对运动造成了应力的积累，从而导致了地震的发生，并可解释为什么地震带与地表大致成 45° 角的平面状分布．当然，并不是所有的岛弧构造带都包含有以上所有各项特点．

大陆内部的地震活动分布比较复杂和零散，但也还是呈现出条带状分布，图 1.6 是根据我国历史上发生过的强破震中分布而划分的 23 个地震带[14]．这里给出的只是划分地震带的一种方案．图 1.6 中各地震带地震能量释放的水平也互不相同，其中南北地震带(5，6，7，13，14)是我国地震活动最强烈的地带之一，而华北地震带(2，3，4)和郯城-庐江地震带(1)的北区近年来也活动频繁，它们又都通过我国重要的经济中心和人口稠密地区，因而对这些地带应特别加强地震预防工作．

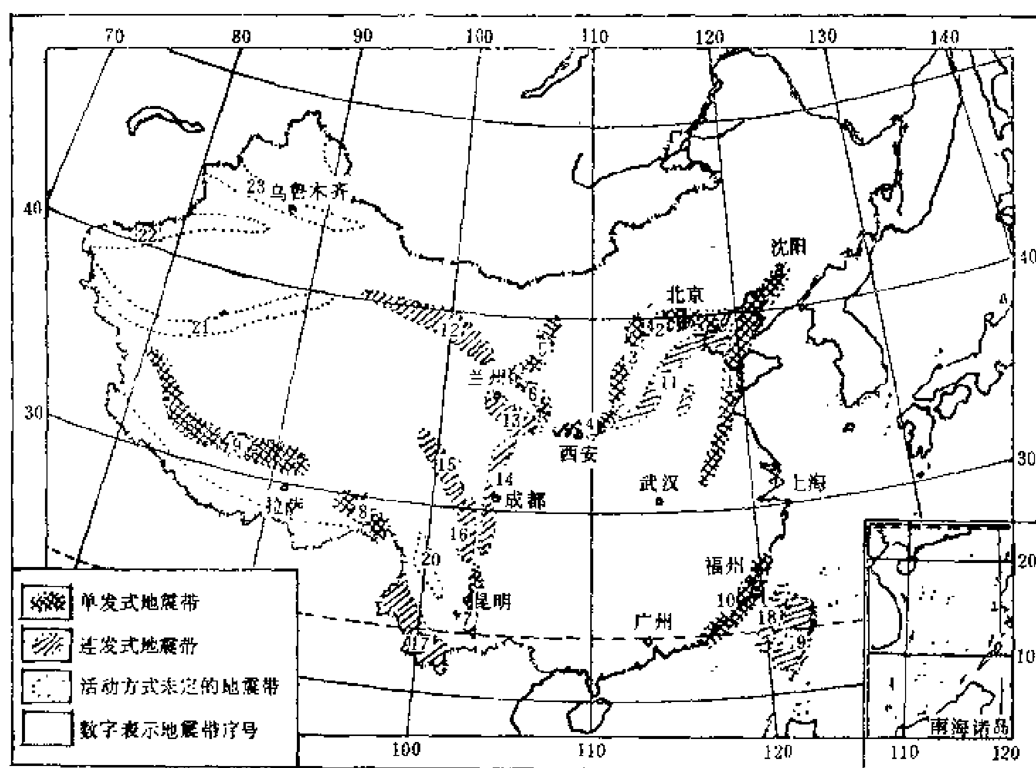


图 1.6 中国的地震活动带[14]

§ 1.6 地震活动与板块构造

从图 1.4 可以清楚看到，地震活动带只分布在地球表面相对比较狭窄的地带．为什么地震只发生在这些地带呢？这些地震活动又是由什么样的全球性机制造成的呢？这是

长期以来人们所探索的问题.

1912年魏格纳提出了大陆漂移学说[15],认为目前全球的许多大陆块是由原来统一古陆块分裂漂移而形成,其中有的陆块已漂移了成千上万公里. 他是根据南美洲和非洲海岸线的相似,以及在地质上也有着相互联系所得到的启发而提出来的. 这个学说引起了学术界的激烈争论,当时,支持魏格纳论点的人很少. 直到六十年代,由于地球物理学的研究进展,特别是海洋磁异常的分布、古地磁的研究和地震学的研究的最新成果,才又重新促使人们研究这个学说,并大大地扩充和更新了它的内容,形成了板块构造学说. 而目前已得到世界各国学术界的广泛支持.

板块构造学说认为[16, 17, 67],大洋中的海岭地区是地球表面岩石层的分离中心,新的洋底在这里产生,并向两旁扩展,而大洋的岩石层板块在遇到其它板块发生碰撞时,就下插到地幔中去,而大洋中的海沟地带就是洋底岩石层的消失带(图1.7). 地震学的许多成果有力地支持了板块学说[68],而板块学说也给许多地震现象以一个统一的解释. 事实上前面提到的全球的第三个地震活动带即海岭地震带正是板块分离的中心,而东非裂谷地震带和红海地震带正反映了未来的海洋的孕育期和幼年期. 太平洋周围的强烈地震活动带大多数是处于板块的会聚地带或联结这些会聚区的断裂带. 海洋板块在那里俯冲到地幔中去. 由于俯冲板块和地幔物质的相互作用而积聚了巨大的应力,形成了倾斜的地震活动带,一直可延伸到700公里深处.

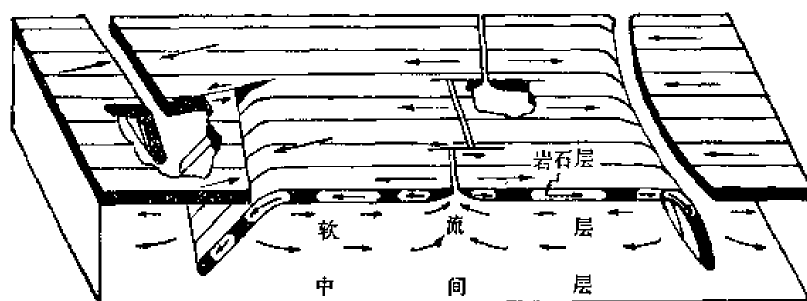


图1.7 板块构造及其运动的示意图[68]

海岭和会聚带并不一定是连续的,它们时常形成横向有所错位的片断,对海岭带更为明显. 而往往有断层连接这些片断,称为转换断层. 对于连接海岭片断的转换断层,其两侧岩石的相对位移方向(图1.8a)与通常的断层两侧岩石的相对位移方向(图1.8b)恰好相反. 一般只在分离或会聚片断的连接线上,如图1.8a中的AB段才发生地震,因为在那里断层两侧岩石的差异运动最大.

研究表明,由于印度板块向亚洲大陆的漂移,使古特提斯海逐渐消失,最终印度板块

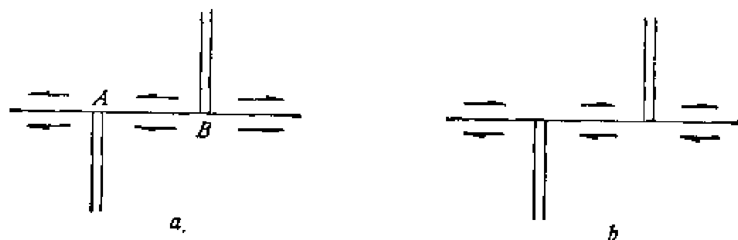


图1.8 a 连接海岭片断的转换断层 b 通常的断层
图中箭头代表岩石的运动方向

与亚欧板块相碰撞而导致了中国青藏高原的隆起，这种碰撞的详细机制是目前重要的研究课题。无疑，我国大陆内的巨大的应力积累和一些地区特别是我国激烈的地震活动与这种碰撞运动有密切的联系。

目前对板块构造运动的动力来源有多种看法，例如地幔物质的对流说、地球膨胀说和地球自转速度的变化等等，但还不能圆满地解释板块构造及其运动。板块内部的各种运动过程和地震活动也是目前正在研究的一个重要课题。而对我国大陆内地震活动、机制及成因的深入研究无疑会对解决这些课题作出重要贡献。

第二章　应力分析和应变分析

地震的孕育和爆发的过程也是地壳和上地幔介质内应力和应变的积累和释放的过程．因此，弄清地球介质在地球内部的温压条件下的力学性质是研究地震成因的一个重要课题．另外，通过研究地震波在地球内部的传播，可探索地球内部介质的性质．

在这里，我们将比较详细地介绍应力和应变的分析方法，因为它们在地震现象的分析中是一个十分重要的工具．应当指出，基于常温常压的实验总结出来的弹性理论，是否能简单地应用于地下高温高压的条件下还有疑问．研究地震波在地球内部的传播时，将地球介质看做是完全弹性体，往往是足够好的近似，因为地震波传播的时间是很短暂的．然而在漫长的地质年代里，地球介质进行着复杂的塑性、流变过程，因此在某些缓慢的地学现象中，就不能简单地将地球介质看成完全弹性体了．这里显然涉及到塑性力学和流变学，但是，弹性力学是进一步讨论这些问题的基础．

§2.1　应力张量

一、体力和面力

这里我们要区分两种力：体力和面力．

体力是指作用在物体的各个质点上的力，例如万有引力、离心力等等．设物体内有 A 点(图 2.1)，我们用下述方式描述体力．取包围 A 点的小体积单元 ΔV，设 ΔV 内的物质质量为 Δm，小体积单元 ΔV 所受到总合力为 $\Delta \boldsymbol{F}$，如果物体受到体力的作用，则有

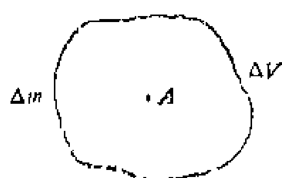


图　2.1

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta m} \neq 0,$$

其中 ΔV 无限收缩至 A 点．设：

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta m} = \boldsymbol{f} \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta m} = \rho \boldsymbol{f} \tag{2}$$

则 $\boldsymbol{f}$ 为在 A 点单位质量所受到的体力作用．

$\rho \boldsymbol{f}$ 为在 A 点单位体积内所受到的体力作用．

那么什么是面力呢？设有一杆，两端施以拉力 $\boldsymbol{F}$ 及 $-\boldsymbol{F}$，达到平衡(图 2.2)．$\boldsymbol{F}$ 的方向平行于杆轴，中间任取一垂直于杆轴的横截面 S，S 把杆分为左右两部分 A 及 B．看 A 部分，由静力平衡知通过 S 面 B 部分对 A 部分的作用力为 $\boldsymbol{F}$，实践表明，当杆足够长且 S 在杆的中间段，则 $\boldsymbol{F}$ 在 S 面上为均匀分布，$\boldsymbol{F}/S$ 为单位面积上的作用力．上述 B 通过 S 面对 A 的作用力 $\boldsymbol{F}$ 就是面力．由以上的例子我们可以体会到面力和体力是两种不同的概念．

下面进一步讨论面力，设有空间笛卡尔坐标系，坐标轴为 x_1、x_2、x_3，有物体 B (图 2.3)，在 B 内取一封闭曲面 S，讨论 S 面外的物质与 S 面内的物质的相互作用，在 S 面上

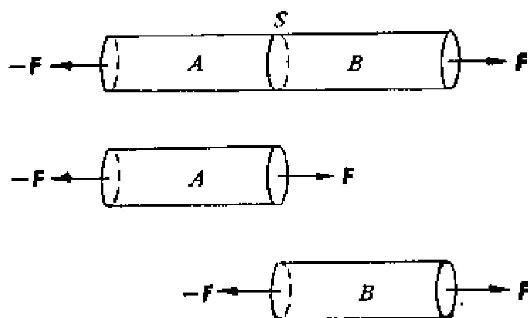


图 2.2

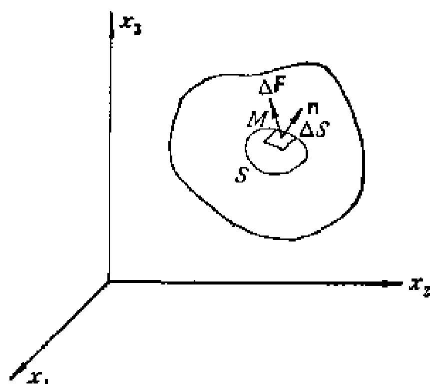


图 2.3

取一小面元 ΔS, ΔS 的正法线单位向量为 $\boldsymbol{n}$(由 S 面向外). 今后简称为方向为 $\boldsymbol{n}$ 的面元，讨论 S 面外的物质通过 S 面对 S 面内的物质的作用力，在 ΔS 面元上的作用力设为 $\Delta\boldsymbol{F}$, 显然，$\Delta\boldsymbol{F}$ 不仅与 ΔS 的大小有关,而且与 ΔS 的方向即 $\boldsymbol{n}$ 的方向有关. 设 $\Delta\boldsymbol{F}$ 对 ΔS 面的合力矩为 $\Delta\boldsymbol{G}$, 令 $\Delta S\to 0$ 而 $\boldsymbol{n}$ 的方向不变. 如有

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{G}}{\Delta S}=0 \quad \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta S}=\overset{n}{\boldsymbol{T}}. \tag{3}$$

设 $\Delta S\to 0$ 时面元 ΔS 收缩至 M 点，则称向量 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 为物体内 M 点在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的应力.

由此可见,应力是属于面力. 当 $\boldsymbol{n}$ 的方向变化时，$\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 的大小和方向都会有变化. 应力是代表着单位面积上的作用力，它的单位是力/长度². 由牛顿第三定律，ΔS 正向物质通过 ΔS 对负向物质的作用力与负向通过 ΔS 对正向的作用力大小相同方向相反. 即对 M 点有

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}=-\overset{-n}{\boldsymbol{T}}, \tag{4}$$

其中 $-\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的反向,即负法线单位向量.

由于在 M 点 ΔS 可以有无穷多种取向,相应的 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 也有无穷多值，这样似乎需要用无穷多个量来描述一点的应力状态. 实际上并非如此,下面将证明,描述一点的应力状态只要三个向量,或九个标量. 以后还将证明,由于对称性,其中只有六个量是独立的.

二、应力张量

令通过 M 点的面元 ΔS 的方向 $\boldsymbol{n}$ 分别取为坐标轴 x_1、x_2、x_3 的正方向. 设 $\boldsymbol{n}$ 取 x_j 轴的方向,相应的 ΔS_j 面元上的应力记为 $\overset{j}{\boldsymbol{T}}$,应力向量 $\overset{j}{\boldsymbol{T}}$ 在 x_1、x_2、x_3 轴方向的分量分别记为 $\overset{j}{T}_1$、$\overset{j}{T}_2$、$\overset{j}{T}_3$, 或简记为 $\overset{j}{T}_i$.

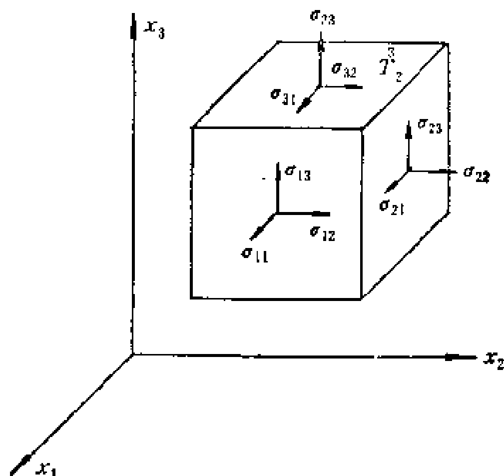


图 2.4

其中: j 代表 $\boldsymbol{n}$ 的方向取为 x_j 轴的正向.

i 代表 $\overset{j}{T}_i$ 是应力向量 $\overset{j}{\boldsymbol{T}}$ 在 x_i 轴的

分量。

或引入符号

$$\sigma_{ji} = \overset{j}{T}_i, \tag{5}$$

其中 σ 的第一个脚标 j 代表面元方向为 x_j 轴的正向（图 2.4），σ 的第二个脚标 i 代表上面元上的应力在 x_i 轴方向的分量。

由于 j、i 都可以分别取 x_1、x_2、x_3 轴，即 $j=1$、2、3，及 $i=1$、2、3. 这样一共得到九个量，写成一个矩阵形式

应 力 分 量

x_1 轴 x_2 轴 x_3 轴

$$\begin{matrix}\text{垂直于 } x_1 \text{ 轴的面} \\ \text{垂直于 } x_2 \text{ 轴的面} \\ \text{垂直于 } x_3 \text{ 轴的面}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{pmatrix} \tag{6}$$

称矩阵 (6) 为应力张量. 应力张量也可记为 $\sigma_{ji}(j、i=1、2、3)$. 为简便起见，约定将 $(j、i=1、2、3)$ 省去，直接记为 σ_{ji}，看见 σ_{ji} 应联想到 j、i 可取 1、2、3. 许多文献中用下列符号表达

$$\begin{pmatrix}\sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{7}$$

应当注意，上述九个量都是 x_j 轴正向的面元上的应力向量的分量. 也就是 x_j 轴正向的物质对 x_j 轴负向的物质的单位面积上的作用力的分量. 或者说应力作用面元的正法线方向与 x_i 轴的正向方向相同. 如应力作用面的正法线方向与 x_j 轴的正向方向相反，则应力分量应为：

$$\overset{-j}{T}_i = -\overset{j}{T}_i = -\sigma_{ji}. \tag{8}$$

下面将证明任意 $\boldsymbol{n}$ 方向的应力可用 σ_{ji} 的线性组合来表示.

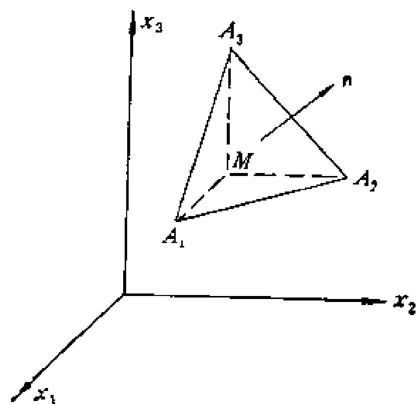


图 2.5

取如图 2.5 的四面体，其中三个面的方向分别平行于 x_1、x_2、x_3 轴，令斜面 $A_1A_2A_3$ 的正法线单位向量为 $\boldsymbol{n}$. 令 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面积为 dS，ΔMA_2A_3、ΔMA_3A_1、ΔMA_1A_2 的面积分别为 dS_1、dS_2、dS_3.

易见

$$\left.\begin{aligned} dS_1 &= dS\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_1) = n_1 dS, \\ dS_2 &= n_2 dS, \\ dS_3 &= n_3 dS, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{x}_1$ 为 x_1 轴的正向方向的单位向量，

$\cos(\boldsymbol{n}、\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{x}_i$ 间夹角的余弦，

n_i 为 $\boldsymbol{n}$ 在 x_i 轴上的分量.

而四面体的体积

$$dV = \frac{1}{3} h dS, \tag{10}$$

其中 h 为 M 点相对于斜面 $A_1A_2A_3$ 的高。

设 M 点的应力张量为 σ_{ji}. M 点 $\boldsymbol{n}$ 方向的应力向量为 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}_i$.

$$\left.\begin{array}{ll} \triangle A_1A_2A_3 \text{ 上的平均应力向量为} & \overset{n}{T}{}_i^*, \\ \triangle MA_2A_3 \text{ 上的平均应力向量为} & \overset{-x_1}{T}{}_i^* = -\overset{x_1}{T}{}_i^* = -\sigma_{1i}^*, \\ \triangle MA_3A_1 \text{ 上的平均应力向量为} & -\sigma_{2i}^*, \\ \triangle MA_1A_2 \text{ 上的平均应力向量为} & -\sigma_{3i}^*, \end{array}\right\} \tag{11}$$

注意：$\triangle MA_2A_3$、$\triangle MA_3A_1$、$\triangle MA_1A_2$ 的正向取 x_1、x_2、x_3 轴的负向。令 $h \to 0$ 时

$$MA_1A_2A_3 \to M \text{ 点},$$

则

$$\lim_{h\to 0} -\sigma_{ji}^* = -\sigma_{ji}. \tag{12}$$

设 $MA_1A_2A_3$ 中单位体积内受到的体力平均为 $(\rho f_i)^*$. 则 $MA_1A_2A_3$ 中物质的动量改变为 $\dfrac{d(\rho v_i)^*}{dt}\cdot\dfrac{1}{3}hdS$，其中 f_i 为单位质量的物质受到的体力，v_i 为速度，ρ 为密度. *号为取平均. 由牛顿第二定律:

$$-\sigma_{1i}^* dS_1 - \sigma_{2i}^* dS_2 - \sigma_{3i}^* dS_3 + \overset{n}{T}{}_i^* dS + (\rho f_i)^* \frac{1}{3}hdS = \frac{d(\rho v_i)^*}{dt}\cdot\frac{1}{3}hdS, \tag{13}$$

将 (9) 代入 (13)，各项消去 dS，再令 $h \to 0$，可得

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}_i = n_1\sigma_{1i} + n_2\sigma_{2i} + n_3\sigma_{3i}, \tag{14}$$

其中

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}_i = \lim_{h\to 0} \overset{n}{T}{}_i^*,$$

或

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}_i = \sum_{j=1}^{3} n_j\sigma_{ji}. \tag{15}$$

以后我们省去求和号简记为(附录一)

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}_i = n_j\sigma_{ji}, \tag{16}$$

将 (16) 式具体写出为

$$\left.\begin{array}{l} \overset{n}{\boldsymbol{T}}_1 = n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31}, \\ \overset{n}{\boldsymbol{T}}_2 = n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32}, \\ \overset{n}{\boldsymbol{T}}_3 = n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33}, \end{array}\right\} \tag{17}$$

由此可看出 (16) 式的记法最简洁.

如写成矩阵的形式有:

$$(\overset{n}{\boldsymbol{T}}_1, \overset{n}{\boldsymbol{T}}_2, \overset{n}{\boldsymbol{T}}_3) = (n_1, n_2, n_3)\begin{pmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

后面将要证明 σ_{ji} 具有对称性，即 $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$，因此 (16) 式又可写为

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}_i = \sigma_{ij}n_j, \tag{19}$$

因此 (18) 式又可写为:

$$\begin{pmatrix}\overset{n}{T}_1\\ \overset{n}{T}_2\\ \overset{n}{T}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}\\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix}. \tag{20}$$

由 (16) 可见,如果我们知道 M 点的应力张量,即知道在三个坐标轴方向的面元上的应力向量,则就可求出该点的任意方向的面元上的应力向量. 因而也就完全知道了该点的应力情况. 因此空间的应力张量场 $\sigma_{ji}(\boldsymbol{r})$ 能完全描述出空间的应力分布情况.

附录一中给出了哑指标和克罗内克尔符号及其运算法则,要阅读后面的一些章节,必须要熟悉这些符号.

三、坐标轴旋转时应力张量的变换公式

设在笛卡尔坐标系 x_i 中有应力张量 σ_{ji}, 设有笛卡尔坐标系 $x'_i(x'_1, x'_2, x'_3)$, 其原点与坐标系 x_i 的原点重合,而后者相对前者旋转了一个角度. 设:

$$\alpha_{ki}=\cos(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}_i) \tag{21}$$

为单位向量 $\boldsymbol{x}'_k$ 在 x_i 轴方向的方向余弦. 求新坐标系 x'_i 中的应力张量表达式.

设有向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x_i 系中分量为 a_i, 在 x'_i 系中分量为 a'_k, 则由向量分析知:

$$a'_k=\alpha_{ki}a_i, \tag{22}$$

如将 (16) 式中的 $\boldsymbol{n}$ 取为单位向量 $\boldsymbol{x}'_k$, 则在 $\boldsymbol{x}_i$ 系中

$$\left.\begin{aligned}&n_1=\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_1)=\cos(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}_1)=\alpha_{k1},\\ &n_2=\alpha_{k2}, \quad n_3=\alpha_{k3},\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由 (16) 式

$$\overset{k'}{T}_i=n_j\sigma_{ji}=\alpha_{kj}\sigma_{ji}, \tag{24}$$

注意 (24) 式中 $\overset{k'}{T}_i$ 是 $\boldsymbol{x}'_k$ 方向的面上的应力在 x_i 系中的分量 (图 2.6)

令 σ'_{kl} 为 $\boldsymbol{x}'_k$ 方向的面上应力在 $\boldsymbol{x}'_l$ 方向的分量,由此可得

$$\begin{aligned}\sigma'_{kl}&=\overset{k'}{T}_1\cos(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}'_l)+\overset{k'}{T}_2\cos(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}'_l)\\ &\quad+\overset{k'}{T}_3\cos(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}'_l)=\overset{k'}{T}_i\alpha_{li}\overset{(24)}{=\!=}\alpha_{kj}\sigma_{ji}\alpha_{li}\\ &=\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji},\end{aligned} \tag{25}$$

即

$$\sigma'_{kl}=\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji}, \tag{26}$$

这就是当坐标系变换时应力张量的变换公式.

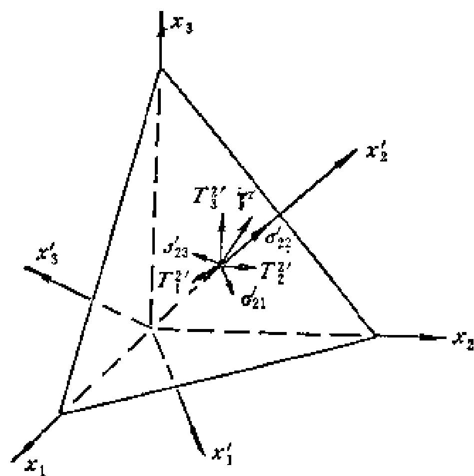


图 2.6

满足公式 (26) 的 σ_{ji} 在数学理论中定义为张量. 所以我们证明了应力张量的确符合数学中张量的定义,因而具有张量的各种性质.

如果 σ_{ji} 是对称张量, 很容易证明 σ'_{kl} 也是对称张量. 设 σ_{ji} 是对称张量.

$$\sigma'_{kl}\overset{(26)}{=\!=}\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji}\overset{(\text{对称性})}{=\!=\!=}\alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ij}=\alpha_{li}\alpha_{kj}\sigma_{ij}$$

上式中最后一项将求和指标 i, j 对换一下显然并不影响结果. 由此有

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{lj}\alpha_{ki}\tau_{ji} = \sigma'_{lk}, \tag{27}$$

所以 σ'_{kl} 也是对称张量.

§ 2.2 正应力、剪应力和主应力

一、正 应 力

设有方向为 $\boldsymbol{n}$ 的面元 dS, 其上作用的应力向量 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量称为 $\boldsymbol{n}$ 方向面元上的正应力,或称为 $\boldsymbol{n}$ 方向的正应力,记为 $\sigma_{(n)}$ (图 2.7). 应力向量 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角小于 90°时,正应力的符号为正,又称为张应力,这时位于面元两方的物质是互相张拉的. 当夹角大于 90° 时,正应力符号为负,又称为压应力,位于面元两方的物质是互相挤压的.

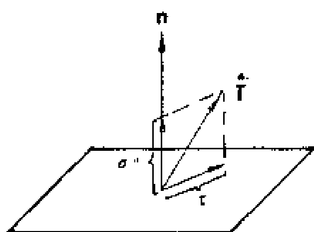


图 2.7

求 $\sigma_{(n)}$ 与应力张量 σ_{ji} 的关系;由正应力定义得

$$\sigma_{(n)} = \overset{n}{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \overset{n}{T}_i n_i, \tag{1}$$

而由 § 2.1 (16) 式 $\overset{n}{T}_i = n_j\sigma_{ji}$ 将其代入 (1) 式得:

$$\sigma_{(n)} = \sigma_{ji}n_j n_i, \tag{2}$$

(2) 式就是正应力 $\sigma_{(n)}$ 与应力张量 σ_{ji} 的关系式.

二、剪 应 力

应力向量 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 在面元 dS 内的投影称为 $\boldsymbol{n}$ 方向面元上的剪应力 $\boldsymbol{\tau}$.

正应力向量记为 $\sigma_{(n)}\boldsymbol{n}$, 显然剪应力向量 $\boldsymbol{\tau}$ 等于应力向量减去正应力向量. 就是

$$\boldsymbol{\tau} = \overset{n}{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{n}\sigma_{(n)}, \tag{3}$$

$$\tau_i = \overset{n}{T}_i - n_i\sigma_{(n)}, \tag{4}$$

$$\tau^2 = \tau_i\tau_i = \overset{n}{T}_i\overset{n}{T}_i - 2\overset{n}{T}_i n_i\sigma_{(n)} + n_i n_i\sigma^2_{(n)} = (\overset{n}{T}_i)^2 - \sigma^2_{(n)}. \tag{5}$$

三、主 应 力

一般说来,应力向量 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$ 的方向与面元的方向 $\boldsymbol{n}$ 有关. 并且它们的方向并不一定相同. 可以找到这样方向的面元, 在其上作用的应力向量的方向与面元的方向一致(或相反),这样的面称为**主应力面**,相应的方向称为**主应力的方向**,而相应的应力向量称为**主应力**.

下面将讨论如果已知应力张量 σ_{ji}, 怎样求主应力的方向和主应力值.

令 $\boldsymbol{n}$ 为主应力的方向,也就是主应力面的法线方向, σ 为相应的主应力值.

由 §2.1 (16) 有 $\boldsymbol{n}$ 方向面上的应力向量

$$\overset{n}{T}_i = n_j\sigma_{ji}. \tag{6}$$

由于 $\overset{*}{T}_i$ 是主应力，所以有

$$\overset{*}{T}_i = \sigma n_i = \sigma n_j \delta_{ji}, \tag{7}$$

式中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & 当\ j \neq i \\ 1 & 当\ j = i \end{cases}, \tag{8}$$

所以

$$n_j \delta_{ji} = \sum_{j=1}^{3} n_j \delta_{ji} = n_1 \delta_{1i} + n_2 \delta_{2i} + n_3 \delta_{3i} = n_i.$$

(6) 式减 (7) 式

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) n_j = 0. \tag{9}$$

注意 (9) 式中 σ_{ji} 与 δ_{ji} 都已知，而 σ, n_j 都是未知的，(9) 式全部写出得:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = 0, \\ \sigma_{12} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{32} n_3 = 0, \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由代数理论知，(10) 式中 n_1、n_2、n_3 要有不全为零的解，则要求系数行列式等于零. 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma, & \sigma_{12}, & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22} - \sigma, & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

在写出 (11) 式时我们转置了行列式，或

$$|\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}| = 0, \tag{12}$$

从 (11) 式解出行列式得

$$\sigma^3 - \Theta_1 \sigma^2 + \Theta_2 \sigma - \Theta_3 = 0, \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ \Theta_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{13} \\ \sigma_{31}, & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22}, & \sigma_{23} \\ \sigma_{32}, & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \\ \Theta_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

设 σ_1、σ_2、σ_3 为 (13) 式的三个根，则 (13) 式可化为

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0, \tag{15}$$

比较 (13)、(15) 可得

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ \Theta_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ \Theta_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

线性代数理论中证明，如果 σ_{ij} 是对称的 (即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)，并且全部为实数，则 (13) 式的根 σ_1、σ_2、σ_3 必为实数. 且如果 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_2 \neq \sigma_3$, $\sigma_1 \neq \sigma_3$，则将 σ_1、σ_2、σ_3 分别代入(10)式后解出的三组 n_j 值相互垂直.

由于应力张量满足对称性的要求(后面将证明),并且显然全部为实数,因此主应力值 σ_1、σ_2、σ_3 必全为实数，当三个主应力值互不相等时，相应的三个主应力方向 n_i 必相互垂直. 如果 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$，则与 σ_3 相应的主应力方向是固定的. 而垂直于此方向的任一个方向都可以是主应力方向. 如果 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$，则任何方向都是主应力方向.

如果将三个坐标轴转到主应力的方向上,这时应力张量成为

$$\begin{pmatrix} \sigma_1, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma_2, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

根据应力张量和主应力方向的定义便立即可得 (17) 式.

三个相互垂直的主应力方向又称为应力张量的主轴. 相应的主应力值称为应力张量的主值. 由于张量的主值代表了应力张量本身的性质,与坐标系无关,也就是 σ_1、σ_2、σ_3 不因坐标系的变换而变换,由 (16) 式可见 Θ_1、Θ_2、Θ_3 也不因坐标系的变换而变换,因此 Θ_1、Θ_2、Θ_3 称为应力张量的不变量.

四、最大剪应力

前面讲过,同一点不同方向的面元下作用的应力向量大小和方向一般都是不同的,显然应力向量在面元上的投影——剪应力的大小和方向也是不同的. 那末在什么方向的面元上剪应力的绝对值最大呢? 由(5)式知剪应力的平方为

$$\tau^2 = (\overset{n}{T}_i)^2 - \sigma_{(n)}^2. \tag{18}$$

将坐标轴选在应力张量的主应力方向上，设 σ_1、σ_2、σ_3 为主应力，则应力张量为 (17) 式. 这时任意 $\boldsymbol{n}$ 方向的面元上的应力向量

$$(\overset{n}{T}_1, \overset{n}{T}_2, \overset{n}{T}_3) = (n_1, n_2, n_3)\begin{pmatrix} \sigma_1, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma_2, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_3 \end{pmatrix} = (n_1\sigma_1, n_2\sigma_2, n_3\sigma_3),$$

因此

$$(\overset{n}{T}_i)^2 = (n_1\sigma_1)^2 + (n_2\sigma_2)^2 + (n_3\sigma_3)^2, \tag{19}$$

而正应力 $\sigma_{(n)}$ 为

$$\sigma_{(n)} = \sigma_{ji}n_jn_i = n_j\sigma_{ji}n_i = (n_1, n_2, n_3)\begin{pmatrix} \sigma_1, & 0, & 0 \\ 0, & \sigma_2, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$= (n_1\sigma_1, n_2\sigma_2, n_3\sigma_3)\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + n_3\sigma_3^2, \tag{20}$$

$$\sigma_{(n)}^2 = (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2,$$

$$\tau^2 = (\overset{n}{T}_i)^2 - \sigma_{(n)}^2 = (\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2) - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2, \tag{21}$$

因为

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \tag{22}$$

以 $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ 代入 (21) 可得

$$\tau^2 = [(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_2^2 + \sigma_3^2] - [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]^2, \quad (23)$$

上式中当 n_1、n_2 取不同的值时，τ^2 便为不同的值，用求极值的方法，最大剪应力应满足

$$\frac{\partial(\tau^2)}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial(\tau^2)}{\partial n_2} = 0. \quad (24)$$

这样便得到下列方程

$$\left.\begin{aligned} n_1(\sigma_1 - \sigma_3)\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\right] = 0, \\ n_2(\sigma_2 - \sigma_3)\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

下面分三种情况讨论：

1. $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_2 \neq \sigma_3$, $\sigma_3 \neq \sigma_1$

由 (25) 及 (22) 式可解出如下三组解：

	I	II	III
n_1	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_2	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
n_3	± 1	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

由于 n_1、n_2、n_3 的轮换性，可得到如下六组解和相应的 τ 的极值：

	I	II	III	IV	V	VI
n_1	0	0	± 1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_2	0	± 1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_3	± 1	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}$	0	0	0	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

(26)

前面三组解对应三个主应力方向，相应的剪应力为零，为剪应力绝对值的极小值，后面三组解对应剪应力的极大值，最大剪应力对应主应力之差最大的那一组．并且可以看出，最大剪应力相应的面元的方向与最大主应力，最小主应力在同一平面内，且与主应力的方向成 45° 角，如图 2.8 所示．

2. 当主应力有两个相等时，例如 $\sigma_1 = \sigma_3 \neq \sigma_2$，则 (25) 式中的第一式已被满足，第二个方程可写成

$$n_2(\sigma_2 - \sigma_3)\left[(\sigma_1 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)\right] = 0, \quad (27)$$

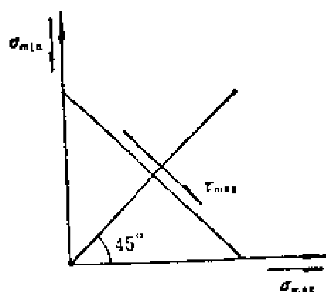


图 2.8

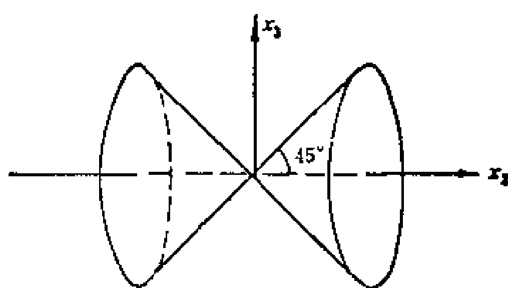


图 2.9

即 $n_2 = 0$，或

$$n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{28}$$

当 $n_2 = 0$ 时，由 (23) 式得

$$\tau^2 = 0,$$

当 $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，由 (23) 式得

$$\tau^2 = \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

所以最大剪应力对应的面元的法线方向组成了与 x_2 轴成 45° 的圆锥面，如图 2.9 所示。

3. 当主应力 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 时由 (23) 式可见，剪应力到处为零.

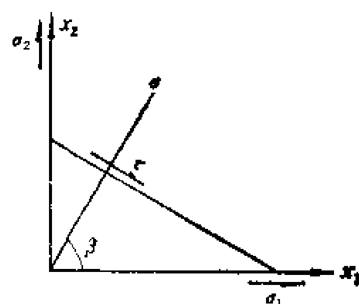


图 2.10

五、库仑-纳维叶定律

上面的分析有助于分析岩石在应力作用下的破裂情况. 实践表明，岩石受到的剪应力超过其强度时就发生破裂，因此往往在最大剪应力的方向发生岩石的断裂和滑移. 也就是断裂面的法线与最大主应力、最小主应力三者共面. 并且断裂面的法线与最大主应力的夹角为 45°，但还应该考虑断裂面的摩擦阻力的作用，下面将对其进行讨论.

这里仅讨论平面应力的情况，即 $\sigma_3 = 0$，

$$(\sigma_{ji}) = \begin{pmatrix} \sigma_1, & 0 \\ 0, & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

设有一面 S，其法线方向与最大主应力 (σ_1) 轴的夹角为 β (图 2.10)，即

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos\beta, \\ n_2 &= \sin\beta. \end{aligned} \tag{29}$$

将上式代入 (21) 式化简后可得:

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\beta\right)^2,$$

或

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta. \qquad (\sigma_1 > \sigma_3) \tag{30}$$

(29) 代入 (20) 式得 S 面上的正应力

$$\sigma_{(n)} = \sigma_1 \cos^2\beta + \sigma_2 \sin^2\beta. \tag{31}$$

(30) 式中的 τ 是面 S 上作用的剪应力，它是使岩石发生破裂错动的因素，当剪应力与岩石断裂面的摩擦力之差大于断裂强度时，岩石便发生破裂错动．而摩擦力为 $-f\sigma_{(n)}$，其中 f 为摩擦系数．由于在不同的方向上的 S 面，其上作用的正应力也不同，因此摩擦力也不同．那末在什么方向上 $\tau + f\sigma_{(n)}$ 最大呢？由数学分析知，当：

$$\frac{d(\tau + f\sigma_{(n)})}{d\beta} = 0 \tag{32}$$

时 $(\tau + f\sigma_{(n)})$ 达到极值．将 (30) (31) 代入 (32) 可得

$$\tan 2\beta = \frac{1}{f}. \tag{33}$$

这就是库仑-纳维叶公式．

当 S 面的方向满足上式时，其上的 $\tau + f\sigma_{(n)}$ 达到极大值，因此如果 $\tau + f\sigma_{(n)}$ 超过了岩石的断裂强度应该在这个方向上首先发生断裂错动．当 $f \to 0$，由 (33) 式得

$$\beta = \frac{\pi}{4} = 45°,$$

又回到前面不考虑摩擦力的情况．

关于地壳岩石的摩擦系数曾作过不少实验研究．认为在高的围压条件下，f 的范围约在 0.4—1.8 之间．拜厄里 (Byerlee 1967) 得到，对于高围压下干花岗岩的摩擦系数可用以下的关系式表达：

$$f = 0.6 + \frac{0.5}{\sigma_{(n)}}, \tag{34}$$

其中 $\sigma_{(n)}$ 为错动面上的正压力，以千巴为单位 (1 巴 $= 10^6$ 达因/厘米^2)，由此得到

$$\beta = 25—30°.$$

这个结果与实验室中对岩石加压而产生断裂错动的实验结果相符．

§ 2.3 运动方程、平衡方程、应力张量的对称性

一、运 动 方 程

设有弹性介质，取其中间的任一闭合面 S，S 面内包含的介质体积为 V．假定 V 内单位体积的介质受到的体力为 ρf_i，其中 ρ 为密度，f_i 为单位质量的介质上所受到的外力．S 面的面元 dS 上受到 V 外介质对 V 内介质作用的应力为 $\overset{n}{T}_i$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为面元 dS 的外法线单位向量．由于外力即 ρf_i 和 $\overset{n}{T}_i$ 的作用，使 V 内的小体元 dV 运动，其加速度为 $\frac{d^2u_i}{dt^2}$，而 u_i 为质点的位移向量．由牛顿定律应有

$$\oint_S \overset{n}{T}_i dS + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \frac{d^2u_i}{dt^2} dV, \tag{1}$$

由 § 2.1 (16) 式有

$$\oint_S n_j\sigma_{ji}dS + \int_V \rho f_i dV = \int_V \rho \frac{d^2u_i}{dt^2} dV,$$

由高斯定理得

$$\oint_S n_j\sigma_{ji}dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV,$$

将上式代入 (1) 式得

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i\right) dV = \int_V \rho \frac{d^2u_i}{dt^2} dV,$$

由于 S 面因而 V 是任取的，令它收缩为一点，得

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{d^2u_i}{dt^2}, \tag{2}$$

这就是运动方程．上面的方程还可以化简，先讨论 $\frac{du_i}{dt}$，$\frac{du_i}{dt}$ 所表达的并不是弹性体在空间某一静止点上的位移随时间的变化(即速度)，而是移动于空间的介质质点的位移变化，这个导数应该用一些与空间静止点相关的量来表达．实际上位移场 u_i 是 t、x_i 的函数，即位移场不但是空间的函数，而且这个场是随时间而变化的，即是非定常场．因而质点的位移随时间的变化 $\frac{du_i}{dt}$ 不但受到场是非定常场的影响即有 $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ 项，而且由于在 dt 时间内质点移到了新的位置所带来的影响即有 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}$ 项，此处 dx_i 为 dt 时间内介质质点所通过的距离，因此 $\frac{dx_i}{dt}$ 就是速度 v_i，因此有

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

由于弹性力学讨论的都是小形变，讨论的是关于质点的位移场随空间的变化是很小的运动，从而 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 是个小量，因此后一项可以忽略不计，因此有

$$\frac{du_i}{dt} \simeq \frac{\partial u_i}{\partial t}, \tag{3}$$

从而

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du_i}{dt}\right) \simeq \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{du_i}{dt}\right)$$

再利用 (3) 式可得

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} \simeq \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

将此式代入 (2) 式可得运动方程

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{4}$$

二、平 衡 方 程

平衡方程是运动方程的特例．也就是位移场不随时间而变化，即得 $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$．由此

有

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0. \tag{5}$$

在笛卡尔坐标系中把运动方程和平衡方程逐项写出可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(=0), \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(=0), \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(=0). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

三、应力张量的对称性

前面已经多次指出应力张量是对称张量

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}, \tag{7}$$

也就是说 x_j 轴方向的面元上的应力在 x_i 轴方向的分量等于 x_i 轴方向的面元上的应力在 x_j 轴方向的分量(参见图 2.4).

下面根据动量矩定理即外力矩等于介质动量矩的变化率来证明应力张量的对称性.取连续弹性介质内任意一块,其体积为 V,对 V 内介质作用的外力矩为体力 $\rho\boldsymbol{f}$ 的力矩的体积分和 V 表面 S 上的应力 $\overset{n}{\boldsymbol{T}}$($V$ 外介质对 V 内介质)的力矩在 S 上的面积分,而动量矩为 $\boldsymbol{r} \times \rho\boldsymbol{v}$ 在 V 内的体积分,由动量矩定理得

$$\int_V (\boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{f}) dV + \oint_S \boldsymbol{r} \times \overset{n}{\boldsymbol{T}} dS = \frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v} dV. \tag{8}$$

对上式等号右边的项可作如下运算

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v} dV = \int_V \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \rho \boldsymbol{v} dV + \int_V \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \rho dV + \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \frac{d}{dt}(\rho dV).$$

由于

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$$

而

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0,$$

以及

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = \frac{d}{dt}(dm) = 0,$$

因此有

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v} dV = \int_V \boldsymbol{r} \times \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dV,$$

由此 (8) 式在笛卡尔坐标系中的表达式为

$$\int_V \delta_{nkl} x_k \rho f_l dV + \oint_S \delta_{nkl} x_k n_j \sigma_{jl} dS = \int_V \delta_{nkl} x_k \rho \frac{dV_l}{dt} dV,$$

由高斯定理

$$\begin{aligned}\oint_S \delta_{nkl} x_k n_j \sigma_{jl} dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{nkl} x_k \sigma_{jl}) dV \\ &= \int_V \delta_{nkl} \delta_{kj} \sigma_{jl} dV + \int_V \delta_{nkl} x_k \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_j} dV \\ &= \int_V \delta_{nkl} \delta_{kl} dV + \int_V \delta_{nkl} x_k \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_j} dV.\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_V \delta_{nkl} x_k \left(\rho f_l + \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_j} - \rho \frac{dV_l}{dt}\right) dV + \int_V \delta_{nkl} \sigma_{kl} dV = 0.$$

由运动方程 (2) 知上式中第一项为零，且由于 V 为任取，所以有

$$\delta_{nkl} \sigma_{kl} = 0, \tag{9}$$

由 δ_{nkl} 的定义知，令 n 为 1, 2, 3 时分别可得

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0,$$
$$\sigma_{31} - \sigma_{13} = 0,$$
$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0,$$

显然有 $\sigma_{11} = \sigma_{11}$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}$, $\sigma_{33} = \sigma_{33}$, 由此得

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij},$$

这就证明了(7)式，它表明应力张量是对称张量. 注意上述推导并没有牵涉到介质的各向同异性，因此即使对于各向异性的弹性介质，其应力张量亦应是对称的.

§ 2.4 应 变 张 量

一、位 移 场

设空间笛卡尔坐标系 x_i 中有物体 V，在外力作用下物体发生位置的改变和变形，使 V 变成 V' (图 2.11)，V 内任一点 $A(\boldsymbol{r})$ 移到了 $A'(\boldsymbol{r}')$ 点. 因为构成 V 与 V' 的质点是一一对应的，因此 $\boldsymbol{r}'$ 应是 $\boldsymbol{r}$ 的单值连续函数. 可以写成

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}). \tag{1}$$

由物体 V 到 V' 的位移场定义为:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}, \tag{2}$$

由此，位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 也是向径 $\boldsymbol{r}$ 的单值连续函数.

设在物体 V 内与 A 点相邻有 $B(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$ 点，由于在外力作用下物体 V 的位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$，使 A 点移到 A' 点，B 点移到 B' 点. A 点的位移为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$，$B$ 点的位移为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$，那末 B 点的位移与 A 点的位移之间有什么关系呢?

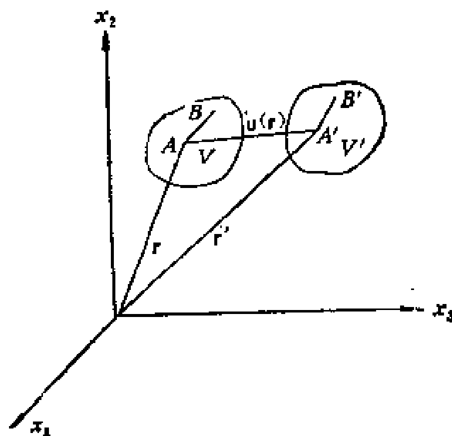


图 2.11

按照前面的符号，将 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 改写成 $u_i(x_j)$，将 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r})$ 改写成 $u_i(x_j+dx_j)$，由于 B 点十分接近于 A 点，那 $d\boldsymbol{r}$ (或 dx_j) 为一级无穷小量，所以可以对 $u_i(x_j+dx_j)$ 进行泰勒展开，只取一次项．即

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j. \tag{3}$$

在 (3) 式中加、减 $\frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_j$ 项得

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j. \tag{4}$$

令

$$e_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{5}$$

$$\omega_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{6}$$

得

$$u_i(x_j+dx_j)=u_i(x_j)+e_{ji}dx_j+\omega_{ji}dx_j. \tag{7}$$

这样，我们形式上得到 B 点的位移 $u_i(x_j+dx_j)$ 等于 A 点的位移 $u_i(x_j)$ 与另外两项之和．逐项写出 (5) 式得：

$$\left.\begin{aligned}
e_{11}&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{21}=e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),\\
e_{22}&=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad e_{32}=e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\
e_{33}&=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad e_{13}=e_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

逐项写出 (6) 式得

$$\omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1&=-\omega_{32}=\omega_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\\
\omega_2&=-\omega_{13}=\omega_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\\
\omega_3&=-\omega_{21}=\omega_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(7) 式写成矩阵的形式有

$$\begin{aligned}
(u_1(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}), u_2(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}), u_3(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}))&=(u_1(\boldsymbol{r}), u_2(\boldsymbol{r}), u_3(\boldsymbol{r}))\\
&+(dx_1, dx_2, dx_3)\begin{pmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13}\\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}\\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}\end{pmatrix}+(dx_1, dx_2, dx_3)\\
&\cdot\begin{pmatrix} 0, & \omega_3, & -\omega_2\\ -\omega_3, & 0, & \omega_1\\ \omega_2, & -\omega_1, & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{10}$$

二、应变张量和旋转张量

1. 旋转张量

(6) 式中 $\omega_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ 称为旋转张量，可记为 $\boldsymbol{\varpi}$. 根据 (9) 式，$\boldsymbol{\varpi}$ 也可表达成 (10) 式中等式右边第三项中矩阵的形式. 我们来看 (10) 式中右边第三项的意义. 其中 (dx_1, dx_2, dx_3) 相当于向量 $d\boldsymbol{r}$，也就是线段 $\boldsymbol{AB}$. 而

$$d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\varpi}=(dx_1, dx_2, dx_3)\begin{pmatrix}0, & \omega_3, & -\omega_2\\ -\omega_3, & 0, & \omega_1\\ \omega_2, & -\omega_1, & 0\end{pmatrix}$$
$$=(\omega_2 dx_3-\omega_3 dx_2,\ \omega_3 dx_1-\omega_1 dx_3,\ \omega_1 dx_2-\omega_2 dx_1)=\boldsymbol{\omega}\times d\boldsymbol{r}. \qquad (11)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 相当于 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，即 $\boldsymbol{\omega}$ 在 x_i 坐标系中的分量为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，它们由 (9) 式定义. 而 $\boldsymbol{\omega}\times d\boldsymbol{r}$ 的意义显然代表向量 $d\boldsymbol{r}$ 的旋转，因此 (10) 式中等号右边第三项的意义是 $d\boldsymbol{r}$ (即 $\boldsymbol{AB}$ 线段) 的旋转而引起的 B 点的位移. 因为有：

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}_1\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\boldsymbol{i}_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\boldsymbol{i}_3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$
$$=\boldsymbol{i}_1 2\omega_1+\boldsymbol{i}_2 2\omega_2+\boldsymbol{i}_3 2\omega_3=2\boldsymbol{\omega}, \qquad (12)$$

即位移场 $\boldsymbol{u}$ 的旋度的二倍等于 $\boldsymbol{\omega}$.

(11) 式又可写为

$$dx_j\omega_{ji}=\delta_{ikl}\omega_k dx_l.$$

不难证明 ω_k 与 ω_{ji} 之间的关系可用下式表达

$$\omega_{ji}=\delta_{jik}\omega_k,$$
$$\omega_k=\frac{1}{2}\delta_{kji}\omega_{ji}.$$

2. 应变张量

再来看 (10) 等号右边第二项的意义. 为此先要弄清 e_{ji} 的物理意义. 称 (5) 中的

$$e_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

为应变张量，也可记为 $\boldsymbol{E}$. 我们先讨论 $d\boldsymbol{r}$ 线段在位移后的相对伸长 e; 令 ds 为 $d\boldsymbol{r}$ 线段位移前的长度，ds' 为 $d\boldsymbol{r}$ 线段位移后的长度，则

$$e=\frac{ds'-ds}{ds} \qquad (13)$$

而

$$(ds)^2=(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2=(dx_i)^2, \qquad (14)$$
$$(ds')^2=(dx_1')^2+(dx_2')^2+(dx_3')^2=(dx_i')^2. \qquad (15)$$

由图 2.12 易见

$$dx_1'-dx_1=u_1(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r})-u_1(\boldsymbol{r}).$$

而由 (3) 式

$$u_1(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r})-u_1(\boldsymbol{r})=\frac{\partial u_1}{\partial x_j}dx_j,$$

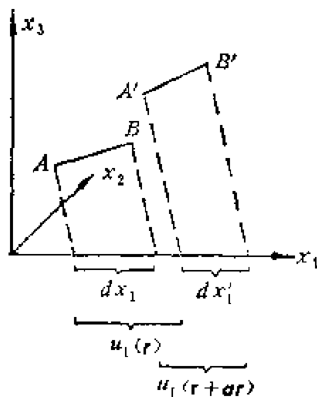


图 2.12

所以

$$\left.\begin{aligned} dx_1' &= \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3, \\ dx_2' &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \left(1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3, \\ dx_3' &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2 + \left(1+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx_3. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

将(16)代入(15)，并略去 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的二次项,可得:

$$\begin{aligned}(ds')^2 = &\left(1+2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)(dx_1)^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_1dx_2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_1dx_3 \\ &+ 2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_2dx_1 + \left(1+2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)(dx_2)^2 + 2\frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_2dx_3 \\ &+ 2\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_3dx_1 + 2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_3dx_2 + \left(1+2\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)(dx_3)^2,\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}(ds')^2 - (ds)^2 = &\, 2e_{11}(dx_1)^2 + 2e_{22}(dx_2)^2 + 2e_{33}(dx_3)^2 \\ &+ 2(e_{12}+e_{21})dx_1dx_2 + 2(e_{23}+e_{32})dx_2dx_3 \\ &+ 2(e_{31}+e_{13})dx_3dx_1 = 2e_{ji}dx_jdx_i,\end{aligned}$$

$(ds')^2 = (dx_i')^2$，而 $dx_i' = dx_i + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j$，所以有

$$\begin{aligned}(ds')^2 = &\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j\right)\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_k\right) = (dx_i)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_kdx_i \\ &+ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_jdx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_jdx_k,\end{aligned}$$

略去 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的二次项，将 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_kdx_i$ 中指标 k 改为 j，将 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_jdx_i$中指标 ij 互换，则

$$(ds')^2 = (ds)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_jdx_i + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_idx_j = (ds)^2 + 2e_{ji}dx_jdx_i,$$

$$(ds')^2 - (ds)^2 = (ds'+ds)\frac{ds'-ds}{ds}ds \simeq 2e(ds)^2,$$

因此有

$$e = \frac{(ds')^2-(ds)^2}{2(ds)^2} = \frac{e_{ji}dx_jdx_i}{dx_idx_i}, \tag{17}$$

(17)式为空间任意线段元 dx_i，在位移后的相对伸长 e 的表达式.

设 n_i 为空间任意方向的单位向量,则由前面的讨论可知在 n_i 方向上的线段元在位移后的相对伸长 $e = e_{ji}n_jn_i$.

设线段元 dx_i 为 x_1 轴方向的线段,即为 $(dx_1, 0, 0)$，由此

$$e = \frac{e_{11}dx_1dx_1}{dx_1dx_1} = e_{11},$$

所以 e_{11} 为 x_1 轴方向线段的相对伸长,同理 e_{ii} 为 x_i 轴方向线段的相对伸长.

现在讨论当 $j \neq i$ 时

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

的物理意义. 为明确起见,讨论

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{18}$$

回忆前面的讨论,设 $u_i(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$ 为 B 点的位移, $u_i(\boldsymbol{r})$ 为 A 点的位移,由泰勒展开有

$$u_i(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) = u_i(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j,$$

当 dx_j 取为 x_1 轴方向的线段即 $(dx_1, 0, 0)$ 时,

$$u_i(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}_1 dx_1) = u_i(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1,$$

也就是

$$\begin{cases} u_1(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}_1 dx_1) = u_1(\boldsymbol{r}) + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1, \\ u_2(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}_1 dx_1) = u_2(\boldsymbol{r}) + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1, \\ u_3(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}_1 dx_1) = u_3(\boldsymbol{r}) + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1, \end{cases}$$

令 β_{12} 是 x_1 轴向线段位移后向 x_2 轴转动的角度, β_{21} 是 x_2 轴向线段位移后向 x_1 轴转动的角度,(图 2.13) 因此

$$\beta_{12} \simeq \tan\beta_{12} = \frac{B''B'}{A'B''} = \frac{u_2(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}_1 dx_1) - u_2(\boldsymbol{r})}{\left(1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}} \simeq \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{19}$$

同理

$$\beta_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \tag{20}$$

(19) (20) 代入 (18) 得

$$e_{12} = \frac{1}{2}(\beta_{12} + \beta_{21}), \tag{21}$$

所以 e_{12} 为原来成直角的 x_1 向 x_2 向线段在位移后,两线段之间夹角的减小值的一半.

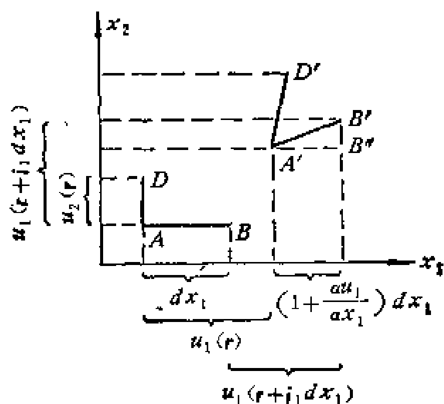


图 2.13

同理对 $e_{ji}(j \neq i)$ 的其他值亦可以下同样的结论. 所以对 e_{ji} 当 $j = i$ 时代表 x_i 向线段位移后的相对伸长. e_{ji} 当 $j \neq i$ 时代表原成直角的 x_j 向线段和 x_i 向线段在位移后两线段之间夹角的减小值的一半. 因此 e_{ji} 描述了物体的变形或称应变. 因而 (10) 式等号右边第二项代表了位移时发生的变形所引起 B 点位置的变化.

(10) 式中等号右边第一项代表位移时由于 A 点位置的变化而引起 B 点位置的变化,

因此相当于线段 AB 的平移。

因此 (10) 式或 (7) 式表示线段 AB 的位移由三部分组成：平移、转动和应变。

三、坐标轴旋转时应变张量的变换公式

设空间笛卡尔坐标系 x_i 和坐标系 x'_i 的原点重合，后者可以看做前者经空间的旋转而得。那末如已知应变张量在 x_i 系中的分量 e_{ji}，怎么求它在 x'_i 系中的分量 e'_{ji}。令

$$\alpha_{ki} = \cos(\boldsymbol{x}'_k, \boldsymbol{x}_i) \tag{22}$$

为 x'_k 轴方向的单位向量 $\boldsymbol{x}'_k$ 在 x_i 轴方向的方向余弦。由向量分析知有坐标转换公式

$$x'_k = \alpha_{ki} x_i, \tag{23}$$

$$x_i = \alpha_{ki} x'_k. \tag{24}$$

设在 x_i 系中有位移场 u_i，此位移场在 x'_i 系中的表达式为 u'_i，由应变张量的定义知，位移场 u_i 造成的应变张量在 x_i 系中的表达式为

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \tag{25}$$

此应变张量在 x'_i 系中的表达式为

$$e'_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_l}\right). \tag{26}$$

由 (23) 及 (24) 式可知

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_k} = \alpha_{kj},$$

$$u'_l = \alpha_{li} u_i.$$

将上两式代入 (26) 式可得

$$e'_{kl} = \frac{1}{2}\left[\alpha_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{li}u_i) + \alpha_{li}\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_{kj}u_j)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_{kj}\alpha_{li}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

立即得

$$e'_{kl} = \alpha_{kj}\alpha_{li}e_{ji}. \tag{27}$$

这就是 e_{ji} 在坐标轴旋转时的变换公式。将 (27) 式与 § 2.1 (26) 式比较可见两者的形式完全相似。根据张量的定义，(27) 式证明了应变张量的确是张量，且是二阶张量。由于应变张量和应力张量都是二阶张量，因此它们在笛卡尔坐标系的转换中有着完全相同的变换公式。

由 e_{ji} 的定义可知

$$e_{ji} = e_{ij}.$$

与 § 2.1 中完全相同的方法易证

$$e'_{kl} = e'_{lk},$$

也就是应变张量在任何笛卡尔坐标系中都是对称的。

§ 2.5 主 应 变

一、主应变、应变主值、应变主轴

如某方向上的线段元在应变后只是沿着原来的方向伸长（或缩短）时，则该方向的应变称为**主应变**. 注意我们讨论的是应变，而不讨论平移和旋转.

设主应变方向的线段在应变后相对伸长为 e，则 e 称为**应变主值**. 主应变的方向又称为**应变主轴**. 设应变主轴方向的单位向量为 n_j，如果已知应变张量 e_{ji}，如何求应变主轴方向 n_j 和应变主值 e 呢？由 § 2.4 中的讨论知，由应变引起线段 n_j 的位移向量为

$$\overset{n}{E}_i = n_j e_{ji} \tag{1}$$

由于 n_j 为应变主轴方向，应变引起 n_j 的位移只是在原方向发生相对伸长 e，即

$$\overset{n}{E}_i = e n_i = e n_j \delta_{ji}, \tag{2}$$

(1) 减 (2) 得

$$(e_{ji} - e\delta_{ji}) n_j = 0. \tag{3}$$

注意 (3) 式中 e_{ji} 与

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

都是已知的而 e，n_j 都是未知的. 将 (3) 式全部写出得

$$\left.\begin{aligned} (e_{11} - e)n_1 + e_{21}n_2 + e_{31}n_3 = 0, \\ e_{12}n_1 + (e_{22} - e)n_2 + e_{32}n_3 = 0, \\ e_{13}n_1 + e_{23}n_2 + (e_{33} - e)n_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由代数理论知，(4) 式中 n_1、n_2、n_3 要有不全为零的解，则必须它们的系数行列式等于零. 即

$$\begin{vmatrix} e_{11} - e, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22} - e, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} - e \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

在写出 (5) 式时，我们转置了行列式.

或有

$$|e_{ji} - e\delta_{ji}| = 0. \tag{6}$$

从 (5) 式中解出行列式得

$$e^3 - \theta_1 e^2 + \theta_2 e - \theta_3 = 0, \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33}, \\ \theta_2 &= \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12} \\ e_{21}, & e_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{22}, & e_{23} \\ e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{13} \\ e_{31}, & e_{33} \end{vmatrix}, \\ \theta_3 &= \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

与主应力中的讨论完全相同，设 e_1、e_2、e_3 为 (7) 式的三个根，则 (7) 式可化为：

$$(e - e_1)(e - e_2)(e - e_3) = 0, \tag{9}$$

比较 (7), (9) 得

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= e_1 + e_2 + e_3,\\ \theta_2 &= e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1,\\ \theta_3 &= e_1e_2e_3.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

与主应力中相似，θ_1、θ_2、θ_3 也是应变张量的不变量.

主应力和主应变的讨论完全相似，比较 § 2.2 和本节可发现除了符号的变动外我们完全是逐字逐句逐个公式抄录的. 应力张量和应变张量都是二阶张量，这里的讨论的相似性正是因为它们在本质上有着共性——都是二阶张量的结果.

与主应力一节的讨论相似，当 e_{ji} 全部为实数值时，方程 (7) 的根必全部为实数. 且如 $e_1 \neq e_2$, $e_2 \neq e_3$, $e_3 \neq e_1$, 则将 e_1、e_2、e_3 分别代入 (4) 式后解出的三组 n_j 值相互垂直. 即应变主轴相互垂直. 如将三个坐标轴转到应变主轴上，这时应变张量为

$$(e_{ji}) = \begin{pmatrix} e_1, & 0, & 0\\ 0, & e_2, & 0\\ 0, & 0, & e_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

可以证明当 $e_1 = e_2 \neq e_3$ 时，与 e_3 对应的应变主轴方向相垂直的任何方向都可以是应变主轴. 当 $e_1 = e_2 = e_3$ 时，任意方向都是应变主轴.

二、体胀系数 θ

定义

$$\theta = \lim_{V\to 0}\frac{\text{位移后物体的体积 } V' - \text{位移前物体的体积 } V}{\text{位移前物体的体积 } V} \tag{12}$$

取物体内的一点 M，在其附近取体积 V 包围 M，V 由封闭曲面 S 包围(图 2.14). 位移后，S 移到 S' 处，如图中虚线所示. S' 包围体积为 V'，V' 与 V 重合的部分记为 V_0，不重合的部分记为 V_1 (图 2.14 中阴影区)，则

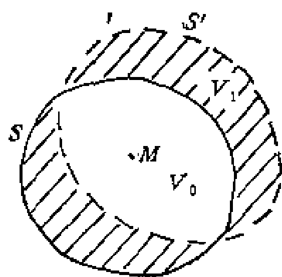


图 2.14

$$V_1 = \oint_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{u})dV,$$

$$V' = V + V_1,$$

$$\theta = \lim_{V\to 0}\frac{V'-V}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{V_1}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{u})dV}{V} = \nabla\cdot\boldsymbol{u},$$

所以

$$\theta = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \theta_1. \tag{13}$$

因此 (10) 式中第一个不变量 θ_1 的物理意义是体胀系数.

三、应变协调方程

由应变张量的定义

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{14}$$

可以看出应变张量的分量一共有六个 (注意 $e_{ji} = e_{ij}$). 它们可由位移向量的三个分量 u_1、u_2、u_3 对坐标 x_1、x_2、x_3 的偏微商求出. 因此应变分量的六个值是不能任意给定的. 它

们相互间还必须满足一定的关系式，表现这种关系式的方程式便是协调方程。在应变张量的定义(14)式中消去位移向量的分量便可得到应变协调方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1\partial x_2},\\
&\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2\partial x_3},\\
&\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3\partial x_1},\\
&\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right),\\
&\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right),\\
&\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

如果给定M点的位移 u_i，M 点附近的旋转向量 ω_i，并给定 M 点附近的应变张量 e_{ji}，可以证明，只要 e_{ji} 满足应变协调方程(15)，则 M 点附近的位移场是唯一确定的。

四、符　　号

在许多弹性力学的文献中常应用如下应变张量的符号：

$$\begin{pmatrix}
e_x, & \frac{1}{2}\gamma_{xy}, & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\
\frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y, & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\
\frac{1}{2}\gamma_{zx}, & \frac{1}{2}\gamma_{zy}, & e_z
\end{pmatrix}.\tag{16}$$

(16)中各符号与这里应用的 e_{ji} 符号的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}
&e_x=e_{11}, && e_y=e_{22}, && e_z=e_{33},\\
&\gamma_{xy}=2e_{12}, && \gamma_{yz}=2e_{23}, && \gamma_{zx}=2e_{31},\\
&\gamma_{yx}=2e_{21}, && \gamma_{zy}=2e_{32}, && \gamma_{xz}=2e_{13}.
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

有时应力张量用如下符号给出

$$\begin{pmatrix}
\sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz}\\
\tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz}\\
\tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z
\end{pmatrix},\tag{18}$$

而这里的应力张量符号是

$$\begin{pmatrix}
\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}\\
\sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}\\
\sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}
\end{pmatrix}.\tag{19}$$

(18)、(19)中各符号可以一一对应。

我们在这里所以采用符号 e_{ji}，因为它直接代表了应变张量的分量，不象(16)式中的许多项都有因子 1/2。使用的公式与应力分析的许多公式十分相似，具有类比性。在推导和使用这些公式中应用了这种符号后可以使繁复的公式大大简化。

第三章　应力应变关系和弹性力学基本公式

§ 3.1　应力应变曲线

物体在静力载荷下，各种不同的物态表现出不同的特性．如气体不能承受剪切力，但能经受压缩；液体同样不能承受剪切力，在正压力下产生的压缩极小；而固体既能承受剪力，也能承受压力而一般产生很小的压缩．因此从静力学的角度看，气体、液体、固体各表现出不同的特性．然而从动力学的角度看，情况则有所不同．在低速运动时，气体也可当作不可压缩的，与液体相似，流体力学就是研究其运动规律的．固体在外力长时间的作用下，会发生缓慢的蠕变，这种现象在高温时比较明显，这时又有点象粘滞性很大的液体．而在短暂的作用力下，又可看做完全弹性体．例如研究地球内部介质的力学性质时，便会遇到这种情况．

现在叙述固体在静力载荷下的性质．固体在外力作用下产生伸长（或压缩）的试验，称为简单拉伸(压缩)试验．可用材料试验机对标准试件进行这种试验．

设试件的两定点 A, B 间的原长为 L_0（图 3.1)，截面积为 S_0．加拉力载荷 F 后，A, B 间长度变为 L，令 $\Delta L = L - L_0$．

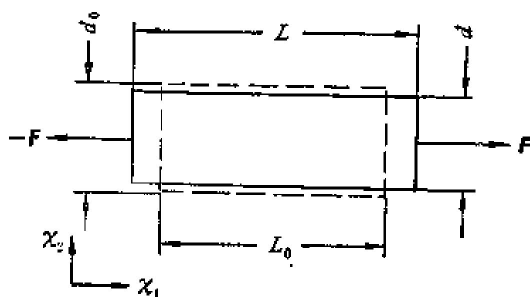


图　3.1

定义拉伸应力

$$\sigma = \frac{F}{S_0}. \tag{1}$$

定义拉伸应变

$$e = \frac{\Delta L}{L_0}, \tag{2}$$

试验表明，对大多数固体材料，在一定的拉伸应力范围内，拉伸应力与拉伸应变之比 E 为常数．这种关系称为虎克（Hook）定律．

定义杨氏（Young）模量 E 为

$$E = \frac{\sigma}{e} = \frac{FL_0}{S_0 \Delta L}, \tag{3}$$

试验表明对拉伸和压缩其杨氏模量 E 值相同．

试验还发现当试件被拉伸时，其横截面积会缩小，设试件为圆杆，原直径为 d_0，拉伸后直径变为 d，令 $\Delta d = d - d_0$，试验表明，对大多数的固体材料，在一定的拉伸应力范围内，横向相对缩短 $\frac{\Delta d}{d_0}$ 与纵向相对伸长 $\frac{\Delta L}{L_0}$（即拉伸应变 e）之比为常数．

定义泊松（Poisson）比 ν 为

$$\nu = -\frac{\Delta d / d_0}{\Delta L / L_0} = -\frac{L_0 \Delta d}{d_0 \Delta L}, \tag{4}$$

表 3.1 给出了几种材料的杨氏模量和泊松比．

对材料还可以进行剪切试验．例如有正立方体 $ABCDEFGH$ (图 3.2)，在 $ABCD$ 面

表 3.1 几种材料的杨氏模量和泊松比

材　　料	E(杨氏模量)(10^5 千克力/厘米²)	ν (泊 松 比)
钢	2.1	0.25—0.33
铸　　铁	11.5—16	0.23—0.27
木 材 (顺 纹)	1—1.2	
木 材 (横 纹)	0.05—0.1	
花 岗 岩 (granite)	4—6	0.20—0.26
玻璃质黑曜岩 (obsidian glass)	6—8	0.10—0.21
辉 长 岩 (gabbro)	7—11	0.2—0.3

及 $EFGH$ 面上分别有一对大小相同方向相反的外力作用，并设外力 F 与 $ABCD$ 面平行，并平行于边 AB，称 F 为剪切力或剪力．在 F 作用下，立方体将发生变形，成 $A'B'C'D'EFGH$、令 $ABCD$ 的面积为 S，$A'D'HE$ 面与 $ADHE$ 面之间的夹角为 γ

定义剪切应力为

$$\sigma_\tau = \frac{F}{S}. \tag{5}$$

定义剪切应变为

$$e_\tau = \frac{\gamma}{2}. \tag{6}$$

试验表明，对大多数固体材料，在一定的剪切应力范围内，剪切应力和剪切应变之比 μ 为常数，这种关系也称为虎克定律．定义剪切模量或称刚性系数 μ 为

$$\mu = \frac{\sigma_\tau}{\gamma}. \tag{7}$$

由于一般 γ 都极小，因此

$$\gamma = \tan\gamma = \frac{AA'}{AE}, \tag{8}$$

也即 γ 相当于与剪力相垂直的方向上的单位线段的一端 (A) 相对另一端 (E) 在剪力方向上的位移．

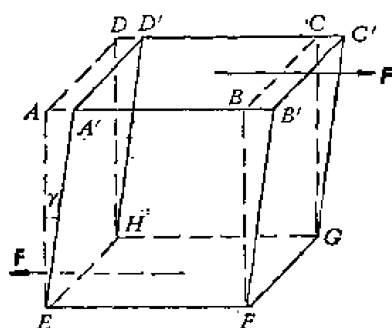


图 3.2

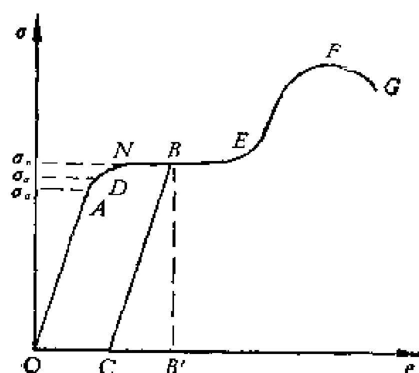


图 3.3 韧性固体材料拉伸图

为了进一步表达材料的特性，常画出试验过程中的应力和应变的关系曲线，一般在材料试验机上能自动画出这种曲线来．这种曲线我们常称为拉伸(压缩)图或剪切图．

韧性固体的拉伸图如图 3.3 所示，由图可见，当 $\sigma<\sigma_a$，σ 与 e 保持线性关系，σ_a 称为**比例极限**．

当 $\sigma_a<\sigma<\sigma_d$，σ 与 e 不保持线性关系，但当外力去除后，σ 及 e 按原来的曲线返回零点，σ_d 称为**弹性极限**，拉伸图上从 O 到 D 的阶段称为材料的弹性阶段，AD 相距往往很近，常认为两者相合而不加区分．

当 $\sigma>\sigma_d$，材料失去弹性，当外力去除后材料不能恢复原状．

当 $\sigma>\sigma_n$ 时，σ 几乎不增加而 e 不断增加，图上 NE 段为屈服阶段，σ_n 称为**屈服极限**．

在 EF 段当 e 增大时，σ 也有显著增加，这一阶段称为硬化阶段，过了 F 点以后当 e 再增加时 σ 减小直至断裂．

当应力加载到 $\sigma=\sigma_b>\sigma_d$ 时，亦即在 D 点以后，对材料卸载，即将 σ 减小至零，则此时应力应变曲线不按 $BNDAO$ 返回 0 点，而沿与 OA 大致平行的直线 BC 下降到 $\sigma=0$，这时 e 不为零，$e=e_n$ 称为残余应变．如再加载，则材料沿 CB 上升，并在比 B 高一点的地方发生转折，这说明材料的弹性极限比以前有所增高，这称为材料的硬化．在硬化阶段由于 σ_b 比 σ_d 显著增高，因而硬化的效应特别明显．可以利用材料的这种性质来对材料进行硬化处理以使材料得到更好的性能．

弹性阶段以后的这些阶段统称为塑性阶段．因此塑性现象是在材料内的应力超过弹性极限 σ_d 以后发生的．

有一些材料的屈服区不象图 3.3 那样在 σ-e 图上成水平线，而是一条连续上升的曲线，如图 3.4 所示．

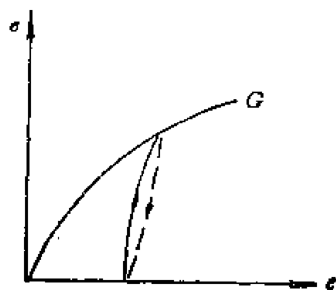


图 3.4

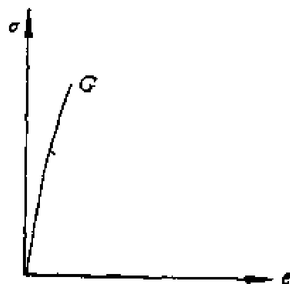


图 3.5

象铸铁、碳化钛、一般岩石等材料，破裂前的变形很小，称为脆性材料，其 σ-e 图如图 3.5 所示，其中 G 为破裂点．

但实验表明，象岩石这样的脆性材料在高围压(又称为液体静压力)条件下，会变成韧性，σ-e 图会类似于韧性材料．这种实验使我们进一步了解地壳及上地幔中地球介质的性质．

对材料施加剪切力后，剪切应力与剪切应变的关系类似于图 3.3 至图 3.5 中的各曲线．

各向同性的材料在发生塑性变形后将变成各向异性的材料．

§ 3.2 应力应变关系的表达式

一、应力应变的一般关系式

实验表明,当应变不大时,应变与应力成线性关系,这时称物体处于弹性变形阶段.因此应力和应变的一般关系式可用下式表达

$$\sigma_{ji} = c_{jikl} e_{kl} \tag{1}$$

其中 c_{jikl} 称为弹性常数,由于 $jikl$ 都可以取 1 到 3, 因此 c_{jikl} 一共有 81 项. 但是由于应力张量 σ_{ji} 和应变张量 e_{ji} 的对称性,它们各只有六个分量,因此如果不讨论预应力问题应力分量和应变分量之间的关系式可表达为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} + c_{14}e_{12} + c_{15}e_{23} + c_{16}e_{31},\\
\sigma_{22} &= c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} + c_{24}e_{12} + c_{25}e_{23} + c_{26}e_{31},\\
\sigma_{33} &= c_{31}e_{11} + c_{32}e_{22} + c_{33}e_{33} + c_{34}e_{12} + c_{35}e_{23} + c_{36}e_{31},\\
\sigma_{12} &= c_{41}e_{11} + c_{42}e_{22} + c_{43}e_{33} + c_{44}e_{12} + c_{45}e_{23} + c_{46}e_{31},\\
\sigma_{23} &= c_{51}e_{11} + c_{52}e_{22} + c_{53}e_{33} + c_{54}e_{12} + c_{55}e_{23} + c_{56}e_{31},\\
\sigma_{31} &= c_{61}e_{11} + c_{62}e_{22} + c_{63}e_{33} + c_{64}e_{12} + c_{65}e_{23} + c_{66}e_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

上式中一共有 36 个弹性常数 $c_{ji}(j、i = 1、2、3、4、5、6)$. 可以证明, 对于一个保守系统 (即无能量消失) $c_{ji} = c_{ij}$ (证明从略). 因此对极端各向异性物质,独立的弹性常数为 21 个. 当讨论各向同性的物质时,弹性常数大大减少,可以证明此时一共只有二个独立的弹性常数. 对各向异性物质的讨论要远比各向同性物质来得复杂,而各向同性的假定往往是地球内部介质的很好地近似,因此下面只着重讨论各向同性的情况.

二、已知应力求应变

§ 3.1 中已介绍了拉伸试验和剪切试验. 在拉伸试验中定义了杨氏模量 E 和泊松比 ν

$$E = \frac{F/S}{\Delta L/L} = \frac{FL}{S\Delta L}, \tag{3}$$

$$\nu = -\frac{\Delta b/b}{\Delta L/L} = -\frac{\Delta bL}{b\Delta L}, \tag{4}$$

各符号的定义均见 § 3.1, 这里不再重复.

在剪切试验中定义了剪切模量 μ,

$$\mu = \frac{F/S}{\gamma}. \tag{5}$$

如果改用前面的应力、应变符号, 根据图 3.1 及图 3.2 中坐标轴的取法, (3)、(4) 式中的 $F/S = \sigma_{11}$、$\Delta L/L = e_{11}$、$\Delta b/b = e_{22} = e_{33}$. 而 (5) 式中的 $F/S = \sigma_{32}$、$\gamma = \gamma_{32}$. 因此 (3)、(4)、(5) 式可改写为

$$E = \frac{\sigma_{11}}{e_{11}}, \tag{6}$$

$$e_{22} = -\nu e_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11}, \tag{7}$$

$$e_{33} = -\nu e_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11}, \tag{8}$$

$$\mu = \frac{\sigma_{32}}{\gamma_{32}}. \tag{9}$$

由 § 2.4 及 § 3.1 所述知

$$e_{32} = \frac{1}{2}\gamma_{32}, \tag{10}$$

所以有

$$\frac{\sigma_{32}}{e_{32}} = 2\mu,$$

类似地可得

$$\frac{\sigma_{12}}{e_{12}} = 2\mu$$

和

$$\frac{\sigma_{31}}{e_{31}} = 2\mu.$$

如果在 x_1、x_2、x_3 轴方向同时加应力 σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}、σ_{12}、σ_{23}、σ_{31}，则由于 e_{ji} 与 σ_{ji} 成线性关系，应用叠加原理可得

$$\left.\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33},\\
e_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33},\\
e_{33} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} + \frac{1}{E}\sigma_{33},\\
e_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12},\\
e_{23} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{23},\\
e_{31} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
e_{11} &= c_1\Theta_1 + c_2\sigma_{11},\\
e_{22} &= c_1\Theta_1 + c_2\sigma_{22},\\
e_{33} &= c_1\Theta_1 + c_2\sigma_{33},\\
e_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12},\\
e_{23} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{23},\\
e_{31} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{31},
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中

$$\Theta_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (\text{见} \S 2.2 (14) \text{式}) \tag{13}$$

$$c_1 = -\frac{\nu}{E}, \tag{14}$$

$$c_2 = \frac{1+\nu}{E}. \tag{15}$$

以后将 Θ_1 改记为 Θ.

前面已说过,实际上独立的弹性常数只有二个,现在我们已有三个弹性常数 E、ν、μ,因此它们之间应满足一定的关系式. 现在来求这个关系式.

由于材料是各向同性的,当把笛卡尔坐标系 x_i 转换到 x'_i 时,应力和应变的关系应当不变.

即应有:

$$\left.\begin{aligned} e'_{11} &= c_1\Theta' + c_2\sigma'_{11}, \\ e'_{22} &= c_1\Theta' + c_2\sigma'_{22}, \\ e'_{33} &= c_1\Theta' + c_2\sigma'_{33}, \\ e'_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\sigma'_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

现在取 x'_3 轴与 x_3 轴重合,x'_1 轴与 x_1 轴间的角度为 φ(图 3.6). 由坐标变换时应力张量及应变张量的变换公式 §2.1 (26) 与 §2.4 (27),

即

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji}, \tag{17}$$

$$e'_{kl} = \alpha_{kj}\alpha_{li}e_{ji}, \tag{18}$$

其中

$$\alpha_{kj} = \cos(x'_k, x_j). \tag{19}$$

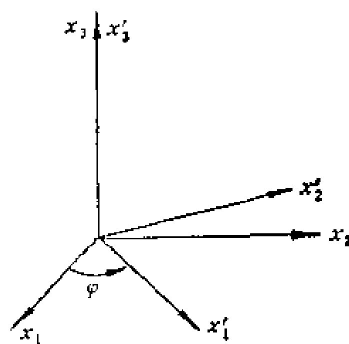


图 3.6

由图 3.6 可见:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11} = \cos\varphi, && \alpha_{12} = \sin\varphi, \\ &\alpha_{21} = -\sin\varphi, && \alpha_{22} = \cos\varphi, \\ &\alpha_{33} = 1, && \alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

将 (20) 代入 (17)、(18) 式

$$\begin{aligned} \sigma'_{12} &= \alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11} + \alpha_{11}\alpha_{22}\sigma_{12} + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22} \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\varphi(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + (\cos 2\varphi)\sigma_{12}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$e'_{12} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi(e_{22} - e_{11}) + (\cos 2\varphi)e_{12}, \tag{22}$$

将 (21)、(22) 代入 (16) 式中当 $i = 1$, $j = 2$ 的式中得:

$$\frac{1}{2}\sin 2\varphi(e_{22} - e_{11}) + (\cos 2\varphi)e_{12} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + (\cos 2\varphi)\sigma_{12}\right], \tag{23}$$

利用 (12) 中第 4 式

$$e_{12} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12},$$

可消去 (23) 中 e_{12} 与 σ_{12}，得

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}=2\mu(e_{22}-e_{11}), \tag{24}$$

将 (12) 中第 1、2 式代入 (24) 可得

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}=2\mu c_2(\sigma_{22}-\sigma_{11}),$$

所以有

$$2\mu c_2=1. \tag{25}$$

由 (25) 与 (15) 消去 c_2 可得

$$2\mu\frac{1+\nu}{E}=1,$$

或

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{26}$$

这就是弹性常数 μ, ν, E 之间的关系式，在推导中我们利用了材料的各向同性这个性质，因此这个关系式仅对各向同性介质成立. 因此由 (11) 所表达的应力与应变的关系式中，独立的弹性常数只有两个.

(26) 式代入 (11) 消去 μ 后可化得：

$$\left.\begin{aligned}
e_{11}&=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11},\\
e_{22}&=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22},\\
e_{33}&=-\frac{\nu}{E}\Theta+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{33},\\
e_{12}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12},\\
e_{23}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{23},\\
e_{31}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

(27) 可简记为：

$$e_{ji}=-\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ji}+\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji}. \tag{28}$$

三、已知应变求应力

设已知应变 e_{ji}，怎么求应力 σ_{ji} 呢？将 (12) 中第 1、2、3 式相加可得：

$$e_{11}+e_{22}+e_{33}=(3c_1+c_2)\Theta. \tag{29}$$

回忆 § 2.5 (13) 式知体胀系数：

$$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}, \tag{30}$$

以 (30) 代入 (29) 得

$$\Theta=\frac{1}{3c_1+c_2}\theta. \tag{31}$$

将 (31) 代入 (12) 中的第 1 式,再移项可得

$$\sigma_{11} = -\frac{c_1}{c_2}\frac{1}{3c_1 + c_2}\theta + \frac{1}{c_2}e_{11}.$$

定义

$$\lambda = -\frac{c_1}{c_1}\frac{1}{3c_1 + c_2}\theta. \tag{32}$$

由 (25) 式

$$\frac{1}{c_2} = 2\mu,$$

所以有

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11}.$$

由 (11) $\sigma_{12} = 2\mu e_{12}$ 其余的关系式可以类推,这样得到由应变求应力的关系式:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11},\\
\sigma_{22} &= \lambda\theta + 2\mu e_{22},\\
\sigma_{33} &= \lambda\theta + 2\mu e_{33},\\
\sigma_{12} &= 2\mu e_{12},\\
\sigma_{23} &= 2\mu e_{23},\\
\sigma_{31} &= 2\mu e_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

或

$$\sigma_{ji} = \lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}. \tag{34}$$

(33) 式或 (34) 式又称为拉梅方程,λ、μ 又称为拉梅常数. 将 (14)、(15) 式中 c_1、c_2 的表达式代入 (32) 式可得:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \tag{35}$$

(35) 式为 λ 与 E、ν 的关系式,可见 λ 并不是新增加的独立的弹性常数.

如用应力的 $\sigma_x\cdots\tau_{xy}\cdots$, 及应变的 $e_x\cdots\gamma_{xy}\cdots$ 等符号, 注意到 $\gamma_{xy} = 2e_{12}$, 因此 (12) 可写为

$$\left.\begin{aligned}
e_x &= -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_x,\\
e_y &= -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_y,\\
e_z &= -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_z,\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy},\\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz},\\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{\mu}\tau_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

(33) 式化为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu e_x,\\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu e_y,\\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu e_z,\\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy},\\ \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz},\\ \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}.\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

(37) 式不能像 (33) 式那样有简记的 (34) 式.

当对材料进行均匀压缩时,也就是令

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = 常数,\\ &\sigma_{ji} = 0,\quad j \neq i\end{aligned}\right\}$$

其中 $p > 0$ 代表压力

因此

$$\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -3p,$$

由 (31)

$$\theta = (3c_1 + c_2)\Theta = -3(3c_1 + c_2)p.\tag{38}$$

定义压缩模量

$$\kappa = -\frac{p}{\theta}.\tag{39}$$

当 $p > 0$ 时,体积被压缩,即 $\theta < 0$,所以 $\kappa > 0$.

κ 表示物质耐压的性质,κ 越大,物质越难以被压缩. 比较 (38) (39) 式得

$$\kappa = \frac{1}{3(3c_1 + c_2)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.\tag{40}$$

或由 (33) 式中的第 1、2、3 式相加可证

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu.\tag{41}$$

现在一共得到五个弹性常数 E、ν、μ、λ、κ,而实际上对各向同性物体独立的弹性常数只有二个. 五个弹性常数之间的关系式由 (26)、(35)、(40) 式给出,即

$$\left.\begin{aligned}\mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)},\\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},\\ \kappa &= \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

§3.3 应变位能、位移方程和应力协调方程

一、应 变 位 能

我们知道,在时间 δt 内,外力对一物体所做的功 δA 及对此物体所加的热量 δQ 之和应等于此物体动能的增加 δK 与内能的增加 δU 之和. 即应有

$$\delta A + \delta Q = \delta K + \delta U. \tag{1}$$

而物体的内能又包括分子间的相互作用能和与物体的温度相联系着的分子的动能。

在物体内任取一闭合面 S，S 所包围的部分为 V，V 内的物质受到外体力 ρf_i 和 S 面外的物质通过 S 面作用在 S 面内物质上的应力 $\overset{n}{T}_i$ 的作用．这时物体由一状态变为另一状态，V 内任一点 $M(x_i)$ 变为 $M'(x_i+u_i)$ 点，其中 u_i 代表位移场．设在 δt 时间内位移场有位移增量 δu_i，则应有

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}\delta t. \tag{2}$$

这时外力对 V 做功为

$$dA = \int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_S \overset{n}{T}_i \delta u_i dS. \tag{3}$$

知 $\boldsymbol{n}$ 方向的面元 dS 上的应力 $\overset{n}{T}_i$ 与应力张量 σ_{ji} 之间的关系为

$$\overset{n}{T}_i = n_j \sigma_{ji}.$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_S \overset{n}{T}_i \delta u_i dS &= \int_S n_j \sigma_{ji} \delta u_i dS \\ &= \int_V \frac{\partial(\sigma_{ji}\delta u_i)}{\partial x_j} dV \quad (\text{由高斯定理}) \\ &= \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\delta u_i dV + \int_V \sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dV. \end{aligned}\tag{4}$$

而上式中

$$\begin{aligned}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) &= \frac{1}{2}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (\text{换写指标}) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{ji}\delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (\sigma_{ji}\ \text{的对称性}) \\ &= \sigma_{ji}\delta e_{ji}. \quad (e_{ji}\ \text{的定义})\end{aligned}$$

利用上式，并将 (4) 式代入 (3) 式，再利用运动方程 § 2.3 (4) 式可得

$$\delta A = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV + \int_V \sigma_{ji}\delta e_{ji} dV.$$

V 内物体的动能为

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dV. \tag{5}$$

由此动能的增量为

$$\delta K = \frac{dK}{dt}\delta t = \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta t\, dV = \int \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV.$$

因此有

$$\delta A = \delta K + \int_V \sigma_{ji}\delta e_{ji} dV. \tag{6}$$

由 (1)、(6) 可得

$$\delta U = \delta Q + \int_V \sigma_{ji}\delta e_{ji} dV, \tag{7}$$

如果所发生的过程是绝热过程，即作用的过程是如此之快，以致使 V 内物体来不及与外界发生显著的热交换，则有

$$\delta Q = 0, \tag{8}$$

由此可得

$$\delta U = \int_V \sigma_{ji}\delta e_{ji} dV, \tag{9}$$

由于 U 代表物体的内能，显然它是物体的状态的单值函数，因此由 (9) 式可见 $\sigma_{ji}\delta e_{ji}$ 必定也是物体的状态的单值函数，由此 $\sigma_{ji}\delta e_{ji}$ 必定是某函数的全微分，令此函数为 W，因此有

$$\delta W = \sigma_{ji}\delta e_{ji} \tag{10}$$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial W}{\partial e_{ji}} \tag{11}$$

W 称为应变能量函数或简称应变能，它表示由于应变而储存在单位体积的物体内的势能，对绝热过程应变能就等于物体的内能.

对等温过程也存在应变能量函数. 从热力学知有

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

其中 S 为物体的熵，T 为绝对温度，Q 为热量，当所发生的过程是等温过程时，有

$$\frac{dT}{dt} = 0,$$

即 T 为常数而不变，因此有

$$\delta Q = \delta(TS)$$

将上式代入 (7) 式可得

$$\delta(U - TS) = \int_V \sigma_{ji}\delta e_{ji} dV$$

由于内能 u、绝对温度 T 和熵 S 都是物体的状态的单值函数，因而同前面绝热过程一样亦必存在应变能量函数 W，使得

$$\delta W = \sigma_{ji}\delta e_{ji}, \tag{12}$$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial W}{\partial e_{ji}}.$$

应变能量函数 W 应是应变分量的函数，即

$$W = f(e_{ji}),$$

如我们讨论的是小应变，则可对 W 作如下的泰勒展开

$$W = a_0 + b_{ji}e_{ji} + \frac{1}{2} c_{jikl}e_{ji}e_{kl} + O(e^2), \tag{13}$$

其中 $O(e^2)$ 代表比 e^2 更高级的无穷小量. 由 (11) 可知

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial W}{\partial e_{ji}} = b_{ji} + c_{jikl}e_{kl} + O(e^2).$$

假定不存在预应力，即应变分量为零时应力分量 σ_{ji} 亦应为零，此时有 $b_{ji}=0$，并略去应变分量的高次项可得

$$\sigma_{ji}=c_{jikl}e_{kl},\tag{14}$$

将它代入 (13) 式，略去应变分量的高次项，并假设应变分量为零时取应变位能为零，由此得

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ji}e_{ji}.\tag{15}$$

下面给出对于各向同性物质用应变张量的分量 e_{ji} 或应力张量的分量 σ_{ji} 来表达应变能量函数 W 的式子. 将 § 3.2 (34) 式代入 (15) 式消去 σ_{ji}

$$W=\frac{1}{2}e_{ji}(\lambda\theta\delta_{ji}+2\mu e_{ji})=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu e_{ji}e_{ji}.\tag{16}$$

将坐标系转到 e_{ji} 的应变主轴上，令应变主值为 e_1、e_2、e_3，则 (16) 式化为

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\\&=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu(e_1+e_2+e_3)^2-2\mu(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)\\&=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\theta_1^2-2\mu\theta_2,\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=\theta=e_1+e_2+e_3,\\\theta_2&=e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1,\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

对比 (18) 与 § 2.5 (10) 式可知 (18) 中的 θ_1，θ_2 就是应变张量的第一不变量 θ_1 和第二不变量 θ_2，因此应变位能函数可用应变张量的第一、二不变量来表达.

利用 § 3.2 (28) 式，并用求出 (16)，(17) 式的同样方法可得

$$W=-\frac{\nu}{2E}\Theta^2+\frac{1+\nu}{2E}\sigma_{ji}\sigma_{ji},\tag{19}$$

或

$$W=\frac{1}{2E}\Theta_1^2-\frac{1+\nu}{E}\Theta_2,\tag{20}$$

其中 $\Theta_1=\Theta$、Θ_1 与 Θ_2 为应力张量的第一、二不变量，其定义可见 § 2.2 (14) 式.

二、用位移表达的运动方程

在 § 2.3 中已得到了弹性介质的运动方程，即有

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho f_i=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}.\tag{21}$$

下面想法求得用位移向量来表达的运动方程，因此要利用应力和应变间的关系以及应变和位移之间的关系，把 (21) 式中的应力张量 σ_{ji} 化成用位移向量 u_i 来表达. 为此将应变位移关系即应变张量的定义 § 2.4 (5) 式代入拉梅方程 § 3.2 (34) 式

$$\sigma_{ji}=\lambda\theta\delta_{ji}+2\mu e_{ji}=\lambda\theta\delta_{ji}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).\tag{22}$$

(22)式代入(21)式得

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho f_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\theta\delta_{ji})+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$=\rho f_i+\theta\delta_{ji}\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}+\lambda\delta_{ji}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}+\lambda\theta\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_j}$$

$$+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}.$$

注意到

$$\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_j}=0,\quad \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}=\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=\mu\frac{\partial\theta}{\partial x_i},$$

可得

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho f_i+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\theta\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j},\tag{23}$$

其中

$$\theta=\frac{\partial u_j}{\partial x_j}.\tag{24}$$

(23) 式为各向同性非均匀介质的用位移向量来表达的运动方程。

对于各向同性均匀介质有

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=0,\quad \frac{\partial\mu}{\partial x_i}=0.$$

(23) 式可化为

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\rho f_i.\tag{25}$$

(25) 式亦可记为

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{f}.\tag{26}$$

(25) 或 (26) 式为各向同性均匀介质的用位移来表达的运动方程。它们是表达地震波传播的基本运动方程，以后我们还要对它们进行详细的讨论。

三、应力协调方程

应力张量 σ_{ji} 共有六个分量，这六个分量是否相互独立的呢？并不是这样。由应力应变关系可见到应力张量 σ_{ji} 与应变张量 e_{ji} 由线性关系 § 3.2 (28) 式或 § 3.2 (34) 式相联系着，而应变张量的六个分量并不是相互独立的，它们之间应满足应变协调方程 § 2.5 (15) 式，因此应力张量的六个分量亦不是相互独立的，它们之间应满足的关系式称为**应力协调方程**。

下面来推导出应力协调方程。我们从运动方程 (25) 式出发，即有

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}+\rho f_i.$$

对上式求 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 可得

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\rho\frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

上式中交换指标 i 与 j 得

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\rho\frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

上两式相加并利用应变张量的定义 § 2.4 (5) 式得

$$2\rho\frac{\partial^2 e_{ji}}{\partial t^2}=2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_i}+2\mu\frac{\partial^2 e_{ji}}{\partial x_k\partial x_k}+\rho\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \tag{27}$$

再利用应力和应变的关系式 § 3.2 (34) 式得

$$e_{ji}=\frac{\sigma_{ji}}{2\mu}-\frac{\lambda}{2\mu}\theta\delta_{ji}, \tag{28}$$

(28) 式代入 (27) 式消去 e_{ji} 后可得

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\sigma_{ji}}{\partial t^2}-\rho\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\delta_{ji}=2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{\partial^2\sigma_{ji}}{\partial x_k\partial x_k}$$
$$-\lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k\partial x_k}\delta_{ji}+\rho\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right). \tag{29}$$

对 (25) 式求 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 可得

$$\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k\partial x_k}+\rho\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \tag{30}$$

将应力应变关系式 § 3.2 (27) 的头三式相加可得

$$\theta=\frac{1-2\nu}{E}\Theta. \tag{31}$$

利用 (30) 式可消去 (29) 中的 $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x_k\partial x_k}$ 项,并用 (31) 式代入消去 θ, 最后利用 § 3.2 (42) 式将拉梅常数 λ 和 μ 化成弹性模量 E 和泊松比 ν 可得到

$$\frac{\partial^2\sigma_{ji}}{\partial x_k\partial x_k}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_j\partial x_i}+\frac{\rho\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\delta_{ji}+\rho\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$$
$$=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{ji}}{\partial t^2}-\frac{\rho\nu}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}\delta_{ji}. \tag{32}$$

(32) 式便是所要求的应力协调方程. 有时它又称为拜尔脱拉密—密乞尔方程. (32) 式又可记为

$$\nabla^2\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\Theta+\frac{\rho\nu}{1-\nu}\nabla\cdot\boldsymbol{f}\boldsymbol{I}+\rho(\nabla\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\nabla)$$
$$=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\boldsymbol{\sigma}}{\partial t^2}-\frac{\rho\nu}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}\boldsymbol{I}. \tag{33}$$

将 (32) 式逐项写出为

$$\nabla^2\sigma_{11}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_1^2}+\frac{\rho\nu}{1-\nu}\nabla\cdot\boldsymbol{f}+2\rho\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2}-\frac{\rho\nu}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2},$$
$$\nabla^2\sigma_{22}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_2^2}+\frac{\rho\nu}{1-\nu}\nabla\cdot\boldsymbol{f}+2\rho\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial t^2}-\frac{\rho\nu}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2},$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{33}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_3^2}+\frac{\rho\nu}{1-\nu}\nabla\cdot\boldsymbol{f}+2\rho\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\\
&\qquad=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial t^2}-\frac{\rho\nu}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2},\\
&\nabla^2\sigma_{12}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_1\partial x_2}+\rho\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial t^2},\\
&\nabla^2\sigma_{23}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_2\partial x_3}+\rho\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial t^2},\\
&\nabla^2\sigma_{31}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_3\partial x_1}+\rho\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)=\frac{2\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{31}}{\partial t^2},
\end{aligned}\right\}\tag{34}
$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

$$\Theta=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}.$$

对于均匀各向同性的介质中实际存在的应力张量应满足应力协调方程(32)、(33)或(34)式。

§3.4 弹性力学的基本公式

已经介绍了弹性力学在笛卡尔坐标系中的基本方程，在这里把所有重要的公式归纳一下：

一、应力张量 σ_{ji}

1. 符号：

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}\\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{pmatrix}\ 或\ \begin{pmatrix}\sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz}\\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz}\\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z\end{pmatrix}.\tag{1}$$

2. 应力分量的定义：σ_{ji} 代表 x_j 轴方向面上的应力向量 $\overset{j}{T}$ 在 x_i 轴方向的分量

$$\sigma_{ji}=\overset{j}{T}_i.\tag{2}$$

第一个脚标 j 代表面的方向，
第二个脚标 i 代表力的分量的方向.

3. n_j 方向面上的应力：

$$\overset{n}{T}_i=n_j\sigma_{ji}.\tag{3}$$

4. 应力张量的对称性：

$$\sigma_{ji}=\sigma_{ij}.\tag{4}$$

5. n_j 方向面上的正应力：

$$\sigma_{(n)}=\overset{n}{T}_i n_i=\sigma_{ji}n_j n_i.\tag{5}$$

6. n_j 方向面上的剪应力:

$$\tau = \sqrt{(\overset{n}{T}_i)^2 - \sigma^2_{(n)}} = \sqrt{(n_j\sigma_{ji})^2 - (\sigma_{ji}n_jn_i)^2}. \tag{6}$$

7. 笛卡尔坐标变换时应力张量的变换公式:

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{kj}\alpha_{li}\sigma_{ji}, \tag{7}$$

其中

$$\alpha_{kj} = \cos(x'_k, x_j). \tag{8}$$

8. 主应力 σ_1、σ_2、σ_3.

行列式

$$|\sigma_{ji} - \sigma\delta_{ji}| = 0 \tag{9}$$

的解 σ_1、σ_2、σ_3 为主应力，(9) 又可化为

$$\sigma^3 - \Theta_1\sigma^2 + \Theta_2\sigma - \Theta^3 = 0. \tag{10}$$

其中

$$\Theta_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_{22}, & \sigma_{23}\\ \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{13}\\ \sigma_{31}, & \sigma_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Theta_3 = \begin{vmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}\\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{vmatrix}.$$

Θ_1 又可记为 Θ.

9. 应力协调方程:

$$\frac{\partial^2\sigma_{ji}}{\partial x_k\partial x_k} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_j\partial x_i} + \frac{\rho\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\delta_{ji} + \rho\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial\rho(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\sigma_{ji}}{\partial t^2} - \frac{\rho\nu}{E(1-\nu)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}\delta_{ji}. \tag{11}$$

二、应 变 张 量

1. $x_j + dx_j$ 点的位移场:

$$u_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + e_{ji}dx_j + \omega_{ji}dx_j. \tag{12}$$

2. 应变张量:

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = e_{ij}. \tag{13}$$

3. 符号:

$$\begin{pmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13}\\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}\\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}\end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} ex, & \frac{1}{2}\gamma_{xy}, & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}, & ey, & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}, & \frac{1}{2}\gamma_{zy}, & ez\end{pmatrix}. \tag{14}$$

4. 旋转张量:

$$\omega_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=-\omega_{ij}. \tag{15}$$

5. 旋转向量:

$$\omega_k=\frac{1}{2}\,\delta_{kji}\omega_{ji}. \tag{16}$$

$$\omega_{ji}=\delta_{jik}\omega_k. \tag{17}$$

6. n_j 方向线段在应变后的相对伸长:

$$e=e_{ji}n_jn_i. \tag{18}$$

有

$$n_j^2=1. \tag{19}$$

7. 由应变引起线段 n_j 的位移向量:

$$\overset{n}{E}_i=n_je_{ji}. \tag{20}$$

8. 主应变 e 为 n_j 方向线段的位移向量的方向与 n_j 方向相同时的相对伸长. e 应满足

$$(e_{ji}-e\delta_{ji})n_j=0. \tag{21}$$

或行列式

$$|e_{ji}-e\delta_{ji}|=0. \tag{22}$$

与主应力的情况一样 (22) 式有三个解 e_1、e_2 和 e_3,

(22) 又可化为

$$e^3-\theta_1e^3+\theta_2e^2-\theta_3=0, \tag{23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1=e_{11}+e_{22}+e_{33},\\
&\theta_2=\begin{vmatrix}e_{11}, & e_{12}\\ e_{21}, & e_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{22}, & e_{23}\\ e_{32}, & e_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e_{11}, & e_{13}\\ e_{31}, & e_{33}\end{vmatrix},\\
&\theta_3=\begin{vmatrix}e_{11}, & e_{12}, & e_{13}\\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}\\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

θ_1 又可记为 θ

9. 应变协调方程:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2e_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2e_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2e_{12}}{\partial x_1\partial x_2},\\
&\frac{\partial^2e_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2e_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2e_{23}}{\partial x_2\partial x_3},\\
&\frac{\partial^2e_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2e_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2e_{31}}{\partial x_3\partial x_1},\\
&2\frac{\partial^2e_{11}}{\partial x_2\partial x_3}=2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right),\\
&2\frac{\partial^2e_{22}}{\partial x_3\partial x_1}=2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right),\\
&2\frac{\partial^2e_{33}}{\partial x_1\partial x_2}=2\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

注意协调方程与应变位移关系式(13)并不相互独立.

三、应力和应变关系式

1. 已知应力求应变

$$e_{ji} = -\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ji} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji}. \tag{26}$$

其中Θ见(11),或

$$\left.\begin{aligned}
e_{11} &= -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}, \quad e_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12},\\
e_{22} &= -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}, \quad e_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23},\\
e_{33} &= -\frac{\nu}{E}\Theta + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33}, \quad e_{31} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

2. 已知应变求应力(拉梅方程)

$$\sigma_{ji} = \lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}, \tag{28}$$

其中

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \tag{29}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11}, \quad \sigma_{12} = 2\mu e_{12},\\
\sigma_{22} &= \lambda\theta + 2\mu e_{22}, \quad \sigma_{23} = 2\mu e_{23},\\
\sigma_{33} &= \lambda\theta + 2\mu e_{33}, \quad \sigma_{31} = 2\mu e_{31}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

四、平衡方程或运动方程

1. 平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0. \tag{31}$$

2. 运动方程

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{32}$$

或:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = 0\left(= \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = 0\left(= \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = 0\left(= \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

3. 用位移表达的运动方程.

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j} + \rho f_i. \tag{33}$$

五、弹性常数 E、ν、μ、λ、κ。

1. 定义杨氏模量

$$E=\frac{\sigma_{11}}{e_{11}}. \tag{34}$$

2. 定义泊松比

$$\nu=-\frac{e_{22}}{e_{11}}\quad(当\ \sigma_{11}\neq 0,\ \sigma_{22}=\sigma_{33}=0). \tag{35}$$

3. 定义剪切模量(刚性系数)

$$\mu=\frac{\sigma_{12}}{2e_{12}}. \tag{36}$$

4. 定义拉梅常数

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \tag{37}$$

5. 定义压缩模量

$$\kappa=-\frac{p}{\theta}=\frac{\Theta}{3\theta}. \tag{38}$$

p 为均匀压缩时的压力。

6. 弹性常数 E、ν、μ、λ、κ 之间关系,可参见表 3.2。

7. 某些材料的弹性常数,参见表 3.1。

表 3-2 弹性常数之间的关系式

	E	ν	μ	λ	κ
E, ν			$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E, μ		$\frac{E}{2\mu}-1$		$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$
E, κ		$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$	$\frac{3\kappa E}{9\kappa-E}$	$\frac{3\kappa(3\kappa-E)}{9\kappa-E}$	
ν, μ	$2\mu(1+\nu)$			$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
ν, λ	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$		$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$		$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$
ν, κ	$3\kappa(1-2\nu)$		$\frac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3\kappa\nu}{1+\nu}$	
μ, λ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$			$\lambda+\frac{2}{3}\mu$
μ, κ	$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa+\mu}$	$\frac{3\kappa-2\mu}{2(3\kappa+\mu)}$		$\kappa-\frac{2}{3}\mu$	
λ, κ	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{3}{2}(\kappa-\lambda)$		

§ 3.5 弹性力学问题

一、弹性力学方程

主要为下列方程:

运动方程
$$\rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

平衡方程
$$\rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0. \tag{1}$$

应变位移关系
$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \tag{2}$$

应力应变关系
$$e_{ji} = -\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ji} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji},$$

或
$$\sigma_{ji} = \lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}. \tag{3}$$

二、边 界 条 件

求解弹性力学具体问题时光有上列方程是不够的,还必须加上边界条件和初始条件。边界条件可有多种如:

1. 已知作用在物体表面上的外力

这时表面的应力应与外力平衡,即应有下列边界条件:

$$\overset{n}{T}_i = n_j\sigma_{ji} \quad (\text{在 } S \text{ 面上}). \tag{4}$$

其中 $\overset{n}{T}_i$ 为 n_j 向的表面面元 dS 上作用的外力与 dS 的面积之比. n_j 为 dS 的外法线方向。

2. 已知物体表面的位移 u_i'

边界条件为

$$u_i = u_i' \quad (\text{在 } S \text{ 面上}). \tag{5}$$

3. 混合边界条件

如一部分边界上已知外力,另一部分边界上已知位移,这就是混合边界条件。

三、初 始 条 件

在解动力学问题时,还需加上初始条件,即当 $t=0$ 时的初位移 f_i 和初速度 g_i

$$\left.u_i\right|_{t=0} = f_i(x_1, x_2, x_3),$$
$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0} = g_i(x_1, x_2, x_3). \tag{6}$$

在许多实际问题中往往是 $f_i = 0$, $g_i = 0$. 在解静力平衡问题时，则不需要初始条件。

四、求解的基本途径

由平衡方程 (1) 应变位移关系 (2) 应力应变关系 (3) 一共组成 15 个方程. 即 (1) 中

3 个、(2) 中 6 个、(3) 中 6 个．而未知函数也一共 15 个．即 u_i 3 个、e_{ji} 6 个、σ_{ji} 6 个，当给定边界条件 (4) 或 (5) 及初始条件 (6) 时，则有唯一的解．但在实际问题中往往愿意减少未知函数的数目，基本途径为下面两条．

1. *以位移 u_i 作为未知量*

这时运动（平衡）方程 (1) 中的 σ_{ji} 用应力应变关系 (3) 中第二式化成 e_{ji}，再利用应变位移关系 (2) 化成 u_i，也就是 § 3.3 (25) 式

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i. \tag{7}$$

边界条件如是给出位移，则直接可用，如是给出外力时，则可以求得边界上的应力 $\overset{n}{T}_i$，由 § 3.4(3) 式及 (3)、(2) 式化成 u_i 在边界上应满足的关系式．地震学的许多动力学问题正是沿着这条途径去求解的．在许多实际问题中，往往是边界上的应力为零．当然在解决实际问题中，还有许多具体的处理方法，例如化成位移的标量势 φ 和向量势 $\boldsymbol{\psi}$ 所满足的方程式等等．

2. *以应力张量 σ_{ji} 作为未知量*

在解决弹性力学的平衡问题时，有时要求出弹性体内应力分布的情况，这时可以以应力张量的六个分量 σ_{ji} 作为未知量．得到的 σ_{ji} 如仅满足边界条件和平衡方程是不够的，因为 σ_{ji} 还由于应力应变关系和应变位移关系而受制约，即 σ_{ji} 应满足应力协调方程

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ji}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\rho\nu}{1-\nu} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \delta_{ji} + \rho \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)$$
$$= \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{ji}}{\partial t^2} - \frac{\rho\nu}{E(1-\nu)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \delta_{ji}. \tag{8}$$

如果应力分量 σ_{ji} 的六个量满足平衡（运动）方程，应力协调方程及边界条件，则 σ_{ji} 即为所求问题的解．注意这里有六个未知数，一共九个方程这与普通代数方程和常微分方程要求未知数和方程数的数量一样多的特点有所不同．

五、解题方法简介

下面简单介绍求解弹性力学问题的几种方法：

1. *从方程出发求解*

① 正解法：直接按边界条件积分方程组求解．这种方法从数学理论上讲总是可行的，但对具体问题，求解十分困难，只有对极简单的问题才能求解．

② 倒解法：先试取一组应力或位移，验证是否满足基本方程，若满足，再求与这组应力或位移相应的边界条件与给定的边界条件比较，如相同或近似，就把试取的一组解作为问题的解．

③ 半倒解法：在未知量中先取定一部分，再在基本方程组和边界条件中求另一部分．

④ 待定系数法：找出一组函数组，它们都满足基本方程组，而这些函数组的系数待定，令它们之和为所求解．在边界条件中确定这些系数．

⑤ 近似解法：先用简单方法求得问题的近似解，作为一级近似代人方程组，看是否满足，如不满足，再修正原解，作为二级近似代人方程检验，这样继续下去，直到合乎所规定的误差范围时为止。

2. 应变能法

找出一组函数组，它们都满足边界条件，而这些函数组的系数待定，令它们之和为所求位移解 u_i. 这些系数必须这样取：使弹性体的总应变位能为极小. 也就是满足边界条件的所有位移中，满足平衡方程的位移将使弹性体的应变位能为极小值. 而使应变位能为极大值的平衡状态是不稳定平衡状态. 这就是最小位能定理. 这种方法，称为应变能法. 在数学上，要用变分法来求解.

3. 差分法

将微分方程化成差分方程，求数值解. 这是计算数学中常用的一种方法.

4. 有限元法

将弹性体分割成许多有限大小的一定形状的弹性体元如在平面应变问题中分割成许多小块，通常取小块为正三角形，以三角形三个端点上的位移为未知数，而将每一体元上的应力应变看做均匀的. 在作了某些假定后，可求出所有端点位移的关系式. 而利用已知的边界条件(如已知边界上的位移值)可求出所有端点的位移值来. 虽然未知数的数目十分庞大，但由于关系式是十分规则的，因此可以用电子计算机来求解. 有限元法使许多复杂形状的弹性体的求解成为可能. 因此目前发展很快，应用日广.

在上述方法中，如是解决动力学问题，则还需加进初始条件.

§3.6 曲线坐标

前面介绍的基本方程全部是在笛卡尔坐标系中的弹性力学公式. 如果是在空间曲线坐标系中，它们又是怎样的形式呢？特别是柱坐标和球坐标，在具体问题中是常见的，例如在地震波的激发与传播问题中，当震中距比震源尺度大得多时，用柱坐标来处理往往非常方便. 地应力测量中，钻孔在应力场中的变形问题也要用柱坐标. 地球物理学中考虑全球性的问题时，常用球坐标. 如讨论地球的固有振动频率，地球自转速度的变化或地极移动时产生的附加力场引起的地球附加应力场分布问题时，都要用到球坐标. 推导空间曲线坐标系例如柱、球坐标系中的弹性力学公式时可以用小体元的分析法，也可以应用黎曼空间的张量理论. 前者的物理意义比较明确，但推导过程繁琐，且一种坐标系就要推导一次. 后者应用了张量的普遍理论，得到的结果可用于任何空间曲线坐标系，但是由于进行了数学概括，因而比较抽象. 而在这里，我们将仅给出柱、球坐标系中的相应公式，不再进行公式推导.

一、坐标面、坐标轴和坐标基

设有笛氏坐标系 x_1, x_2, x_3, 则其**坐标面**定义为：$x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$；其中 a, b,

c 为常数，如图 3.7 中坐标面 $x_3 = c$.

坐标轴定义为：坐标面 $x_2 = b$ 和 $x_3 = c$ 的交线为 x_1 坐标轴；$x_1 = a$ 和 $x_2 = b$ 的交线为 x_3 坐标轴等等.

坐标基的定义：坐标轴切线方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 定义为坐标基，如图 3.7 中所示. 将以上的定义推广到空间曲线坐标系中去. 例如对柱坐标，我们知道空间点的柱坐标 (r, φ, z) 与笛氏坐标 (x_1, x_2, x_3) 的关系为

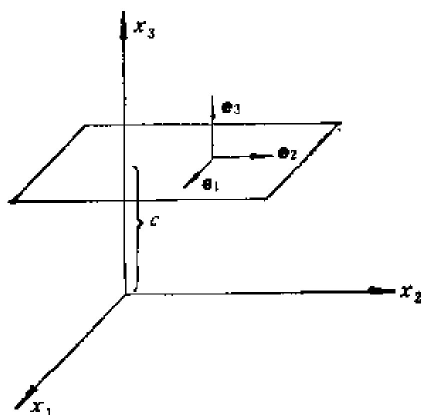


图 3.7

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}, \\ z &= x_3. \end{aligned}\right\}$$

因此柱坐标的坐标面为 $r=a, \varphi=b, z=c$. 亦即以 x_3 轴为轴而半径为 a 的圆柱面；通过 x_3 轴而与 x_1 轴的交角为 b 的半平面；平行于坐标面 $x_3 = 0$ 且与其相距为 c 的平面(图 3.8). 而 r 坐标轴为 $\varphi = b$ 与 $z = c$ 两坐标面的交线等等. (r, φ, z) 点的坐标基为通过该点的坐标轴切线方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ (图 3.8)，且指向坐标值增加的方向. 注意，这里与笛氏坐标系不同，对柱坐标的不同值，亦即空间的不同点坐标基 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 的方向不同，因此称为地方坐标基.

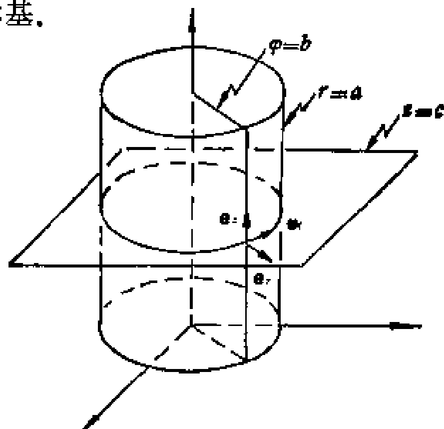


图 3.8

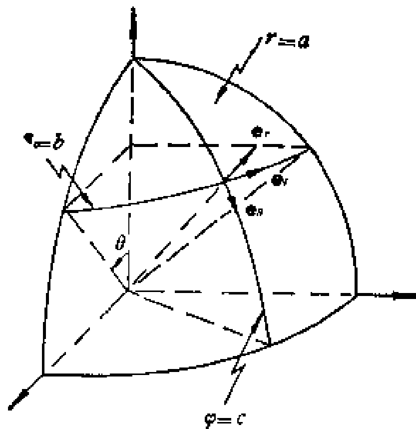


图 3.9

空间任意向量 $\boldsymbol{u}$ 可表示成

$$\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + u_z\boldsymbol{e}_z.$$

如果记 $\bar{x}_1 = r$、$\bar{x}_2 = \varphi$、$\bar{x}_3 = z$，则

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_j\boldsymbol{e}_j.$$

对球坐标系，空间点的球坐标与笛氏坐标之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}\right\}$$

同样可定义球坐标的坐标面、坐标轴和地方坐标基，大家可以类推，并参见图 3.9，这里不

再讨论. 注意到上述三种坐标系中同一点的三个地方坐标基相互垂直，因此它们又可统称为正交坐标系，下面将给出柱、球坐标系中的弹性力学公式.

二、位移及有关运算

设有正交曲线坐标系 ξ_1、ξ_2、ξ_3，其坐标基为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，其度规因子为 h_1、h_2、h_3. 度规因子可由下式给出

$$\begin{aligned} h_n^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_n}\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x_3}\right)^2\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 x_1、x_2、x_3 为笛氏坐标. 由度规因子可得到空间线元的长度为

$$ds^2 = \sum_n h_n^2 (d\xi_n)^2.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{对笛氏坐标} & h_1 = h_2 = h_3 = 1. \\ & ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \\ \text{柱坐标} & h_1 = h_r = 1,\ h_2 = h_\varphi = r,\ h_3 = h_z = 1. \\ & ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \\ \text{球坐标} & h_1 = h_r = 1,\ h_2 = h_\theta = r,\ h_3 = h_\varphi = r\sin\theta. \\ & ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\rho^2. \end{array}\right\} \tag{2}$$

下面给出位移及其有关运算在笛氏坐标、柱坐标、球坐标及一般正交曲线坐标中的表达式，为了区分起见把笛氏坐标中的坐标基记为 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$.

$$\begin{array}{ll} \text{位移向量} & \boldsymbol{u} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{笛氏坐标} & \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i}_1 + u_2\boldsymbol{i}_2 + u_3\boldsymbol{i}_3. \\ \text{柱 坐 标} & \boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + u_z\boldsymbol{e}_z. \\ \text{球 坐 标} & \boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\theta\boldsymbol{e}_\theta + u_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi. \\ \text{曲线坐标} & \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3. \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\text{散度} \quad \theta = \nabla \cdot \boldsymbol{u}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{笛氏坐标} & \theta = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}. \\ \text{柱 坐 标} & \theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}. \\ \text{球 坐 标} & \theta = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}. \\ \text{曲线坐标} & \theta = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\displaystyle\sum_n \dfrac{\partial}{\partial\xi_n}\left(\dfrac{h_1h_2h_3}{h_n}u_n\right). \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\text{旋度} \quad \nabla\times\boldsymbol{u}$$

$$\begin{array}{ll} \text{笛氏坐标} & \nabla\times\boldsymbol{u} = \left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i}_1 + \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}_2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{i}_3. \\ \text{柱 坐 标} & \nabla\times\boldsymbol{u} = \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\dfrac{\partial u_r}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\varphi \\ & \qquad + \left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(ru_\varphi) - \dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right]\right\}\boldsymbol{e}_z. \end{array}$$

球坐标
$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\varphi\sin\theta)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi.$$

曲线坐标
$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{lmn}h_l\left[\frac{\partial}{\partial\xi_m}(h_nu_n)-\frac{\partial}{\partial\xi_n}(h_mu_m)\right]\boldsymbol{e}_l,\tag{5}$$
lmn 取 123, 231, 312.

还经常用到梯度和拉氏算符在笛氏、柱、球坐标中的表达式，下面一并给出。

梯度 ∇f

笛氏坐标
$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3.$$

柱坐标
$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

球坐标
$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

曲线坐标
$$\nabla f=\sum_n\frac{1}{h_n}\frac{\partial f}{\partial\xi_n}\boldsymbol{e}_n.\tag{6}$$

拉氏算符 $\nabla^2 f$

笛氏坐标
$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

柱坐标
$$\nabla^2 f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

球坐标
$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

曲线坐标
$$\nabla^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_n^2}\frac{\partial f}{\partial\xi_n}\right).\tag{7}$$

拉氏算符(对矢量) $\nabla^2\boldsymbol{u}$:

笛氏坐标
$$\nabla^2\boldsymbol{u}=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x_3^2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u_1\boldsymbol{i}_1+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u_2\boldsymbol{i}_2+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u_3\boldsymbol{i}_3.$$

柱坐标
$$\nabla^2\boldsymbol{u}=(\nabla^2\boldsymbol{u})_r\boldsymbol{e}_r+(\nabla^2\boldsymbol{u})_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+(\nabla^2\boldsymbol{u})_z\boldsymbol{e}_z,$$

其中
$$(\nabla^2\boldsymbol{u})_r=\nabla^2(u_r)-\frac{1}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},$$
$$(\nabla^2\boldsymbol{u})_\varphi=\nabla^2(u_\varphi)-\frac{1}{r^2}u_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi},$$
$$(\nabla^2\boldsymbol{u})_z=\nabla^2(u_z).\tag{8}$$

$$\text{球坐标}\quad \nabla^2\boldsymbol{u}=(\nabla^2\boldsymbol{u})_r\boldsymbol{e}_r+(\nabla^2\boldsymbol{u})_\theta\boldsymbol{e}_\theta+(\nabla^2\boldsymbol{u})_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\text{其中}\quad (\nabla^2\boldsymbol{u})_r=\nabla^2(u_r)-\frac{2}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{u})_\theta=\nabla^2(u_\theta)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{u})_\varphi=\nabla^2(u_\varphi)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}.$$

三、应 力 张 量

1. 符号

$$\text{柱坐标}\quad \begin{pmatrix}\sigma_{rr}, & \sigma_{r\varphi}, & \sigma_{rz}\\ \sigma_{\varphi r}, & \sigma_{\varphi\varphi}, & \sigma_{\varphi z}\\ \sigma_{zr}, & \sigma_{z\varphi}, & \sigma_{zz}\end{pmatrix}\ \text{或仍记为}\ \begin{pmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}\\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{pmatrix}.$$

$$\text{球坐标}\quad \begin{pmatrix}\sigma_{rr}, & \sigma_{r\theta}, & \sigma_{r\varphi}\\ \sigma_{\theta r}, & \sigma_{\theta\theta}, & \sigma_{\theta\varphi}\\ \sigma_{\varphi r}, & \sigma_{\varphi\theta}, & \sigma_{\varphi\varphi}\end{pmatrix}\ \text{或仍记为}\ \begin{pmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}\\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

2. 应力分量的定义

以柱坐标为例，$\sigma_{r\varphi}$ 即为 $\boldsymbol{e}_r$ 方向的面上的应力向量在 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的分量(图 3.10)，余类推.

3. 方向面上的应力

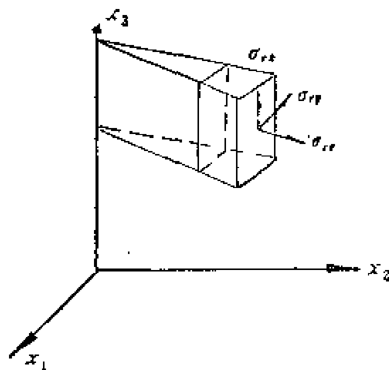


图 3.10

§ 3.4 中有关 n_j 面上的应力、对称性、正应力、切应力、主应力的公式 § 3.4 中 (3)、(4)、(5)、(6)、(9)、(10)、(11) 式对柱、球坐标全部适用，这里不再重复. 设有 $\boldsymbol{n}$ 方向的单位向量，则 $\boldsymbol{n}=n_j\boldsymbol{e}_j$ 此处 n_j 则为前面有关公式中的 n_j，同样，应力向量

$$\overset{n}{\boldsymbol{T}}=\overset{n}{T}_j\boldsymbol{e}_j.$$

4. 坐标系变换时应力张量的变换公式

设有正交坐标系 x_i，其中应力张量为 σ_{ji}，又有正交坐标系 x_i'，其中应力张量为 σ_{kl}'，而 x_i' 与 x_i 的关系为

$$x_i'=f_i(x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{10}$$

并设 h_i 为 x_i 坐标系的度规因子，h_i' 为 x_i' 坐标系的度规因子，则有

$$\sigma_{ji}^*=\frac{1}{h_jh_i}\sigma_{ji}\quad(\text{不对 } j,\ i \text{ 求和}) \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}_{kl}=\sum_{ji}\frac{\partial x_k'}{\partial x_j}\frac{\partial x_l'}{\partial x_i}\sigma_{ji}^*\quad(\text{对 } j,\ i \text{ 求和})$$

$$\sigma_{kl}'=\bar{\sigma}_{kl}h_k'h_l'\quad(\text{不对 } k,\ l \text{ 求和})$$

也就是

$$\sigma'_{kl}=\sum_{ji} h'_k h'_l \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial x'_l}{\partial x_i}\sigma^*_{ji} \quad (\text{不对 } k,\ l \text{ 求和}) \tag{12}$$

因此知道 σ_{ji}，知道新坐标系 x'_i 与老坐标系 x_i 的关系式(10)，就可以通过(11)、(12)式求出新坐标系中的应力张量 σ'_{kl}。

四、应变张量

1. 符号

柱坐标 $\begin{pmatrix} e_{rr}, & e_{r\varphi}, & e_{rz} \\ e_{\varphi r}, & e_{\varphi\varphi}, & e_{\varphi z} \\ e_{zr}, & e_{z\varphi}, & e_{zz} \end{pmatrix}$ 或仍记为 $\begin{pmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{pmatrix}$.

球坐标 $\begin{pmatrix} e_{rr}, & e_{r\theta}, & e_{r\varphi} \\ e_{\theta r}, & e_{\theta\theta}, & e_{\theta\varphi} \\ e_{\varphi r}, & e_{\varphi\theta}, & e_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$ 或仍记为 $\begin{pmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} \end{pmatrix}$.

2. 应变张量

柱坐标

$$\left.\begin{aligned} & e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},\quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ & 2e_{r\varphi}=2e_{\varphi r}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}, \\ & 2e_{\varphi z}=2e_{z\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \\ & 2e_{zr}=2e_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

球坐标

$$\left.\begin{aligned} & e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}, \\ & e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\cot\theta+\frac{u_r}{r}, \\ & 2e_{r\theta}=2e_{\theta r}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}, \\ & 2e_{\theta\varphi}=2e_{\varphi\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}, \\ & 2e_{\varphi r}=2e_{r\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

3. 公式

§ 3.4 中有关 n_i 方向的线段在应变后的相对伸长、应变引起线段的位移向量、主应变等的公式 § 3.4 (18、19、20、21、22、23、24) 对柱、球坐标全部适用，这里不再重复。

4. 公式变换

坐标系变换时应变张量的变换公式可以套用(11)、(12)式，只要将其中的 σ 改成 e

即可。

五、应力和应变的关系

对笛氏、柱、球坐标系，应力应变关系式都为：

$$\left.\begin{aligned} e_{ji} &= -\frac{\nu}{E}\Theta\delta_{ji} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ji}, \\ \sigma_{ji} &= \lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

六、平衡方程或运动方程

柱 坐 标

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho f_r = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{r} + \rho f_\varphi = \rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho f_z = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

球 坐 标

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} \\ &\qquad + \sigma_{r\theta}\cot\theta\} + \rho f_r = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\cot\theta \\ &\qquad + 3\sigma_{r\theta}\} + \rho f_\theta = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}\cot\theta\} \\ &\qquad + \rho f_\varphi = \rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(16)、(17) 为运动方程，当为平衡方程时 (16)、(17) 式中等号右边全部为零.

总结以上可以看出，笛氏坐标系中的弹性力学公式中如果不含有微商符号时可以全部搬用到任意正交坐标系例如柱、球坐标系中，如果含有微商符号，则公式有所不同. 而笛氏坐标系变换时应力张量的变换公式不能完全搬到正交坐标系中. 笛氏坐标变换：

$$x'_k = \cos(\boldsymbol{x}'_k、\boldsymbol{x}_i)x_i = \alpha_{ki}x_i, \tag{18}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ x'_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ x'_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

实际上上式可写为

$$\boldsymbol{x}'_k = \frac{\partial\boldsymbol{x}'_k}{\partial\boldsymbol{x}_i}x_i. \tag{20}$$

对比 (18)、(20) 式得

$$\alpha_{ki} = \frac{\partial\boldsymbol{x}'_k}{\partial\boldsymbol{x}_i}.$$

因此 § 3.4 中的 (7) 式实际上为

$$\sigma'_{kl} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial x'_l}{\partial x_i}\sigma_{ji},$$

因此这个公式中是含有微商符号的，因而不能照搬到任意正交坐标系中去。

七、应 用 举 例

设笛氏坐标系中 x_3 轴为应力张量 σ_{ji} 的应力主轴，则应力张量为：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & 0 \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

求：柱坐标系中应力张量的表达式，其中 z 轴与 x_3 轴重合，而 φ 的起算轴与 x_1 轴重合。

解：由公式 (11)

$$\sigma^*_{ji} = \frac{1}{h_j h_i}\sigma_{ji} \quad (\text{不对 } j,\ i \text{ 求和})$$

由于对笛氏坐标系

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

所以有

$$\sigma^*_{ji} = \sigma_{ji}. \tag{21}$$

由 (12) 及 (20)

$$\sigma'_{rr} = h'_r h'_r\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_1}\sigma^*_{11} + \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\sigma^*_{12} + \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_1}\sigma^*_{21} + \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_2}\sigma^*_{22} + \frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_3}\sigma^*_{33}\right). \tag{22}$$

而

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}, \tag{23}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} = \sin\theta, \\ &\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2} = \frac{x_1}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \\ &\frac{\partial r}{\partial x_3} = \frac{\partial\theta}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

将 (21)，(24) 代入 (22) 得

$$\sigma'_{rr} = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\sigma_{12}, \tag{25}$$

同理

$$\begin{aligned} \sigma'_{r\theta} &= h'_r h'_\theta\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\sigma^*_{11} + \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\sigma^*_{12} + \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\sigma^*_{21} + \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\sigma^*_{22} + \frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\sigma^*_{33}\right) \\ &= (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin 2\theta + \sigma_{12}\cos 2\theta, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\sigma'_{\theta\theta} = h'_\theta h_\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\sigma^*_{11} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\sigma^*_{12} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\sigma^*_{21}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\sigma^*_{22} + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\sigma^*_{33}\right)$$
$$= r^2\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\sigma_{11} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\sigma_{12} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\sigma_{22}\right)$$
$$= \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - \sigma_{12}\sin 2\theta, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma'_{zz} = \sigma_{zz}, \\ &\sigma'_{rz} = \sigma'_{\theta z} = \sigma'_{zr} = \sigma'_{z\theta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

柱坐标中应力张量为

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{rr}, & \sigma'_{r\theta}, & 0 \\ \sigma'_{\theta r}, & \sigma'_{\theta\theta}, & 0 \\ 0, & 0, & \sigma'_{zz} \end{pmatrix}.$$

其中各分量与 σ_{ij} 的关系式见 (25)、(26)、(27)、(28).

§ 3.7 滞 弹 性

一、滞弹性现象

前面已经系统地阐述了弹性理论的基础，本节介绍介质的滞弹性性质. 在研究韧性材料的载荷-拉伸曲线时，发现载荷超过一定限定后材料发生屈服现象，即材料发生塑性变形，这时即使载荷不怎么再增加，变形仍继续增大，并且发生了不可恢复的变形，其载荷-拉伸曲线如图 3.3 所示，时常将图 3.3 理想化为图 3.11(a)的 σ-e 图. 图 3.11(a) 所示 σ-e 特性的材料称为理想塑性材料. 显然它是一些实际材料的简化与概括.

图 3.11(a) 中

$$e = \frac{\sigma}{\mu} \qquad \text{当 } \sigma < \sigma_0,$$

$$e \text{ 可任意增大} \qquad \text{当 } \sigma = \sigma_0,$$

可用图 3.11(b) 中所示的模型来描述，此模型中 σ_0 相当于摩擦力，μ 为弹性系数为 μ 的弹簧，当 $\sigma < \sigma_0$，e 与 σ 成正比，弹簧被拉伸，当 $\sigma = \sigma_0$ 从而克服了摩擦力，位移可无限增大.

在作理论近似时，按不同情况可取下列几种模型，它们的 σ-e 图在相应的图中画出.

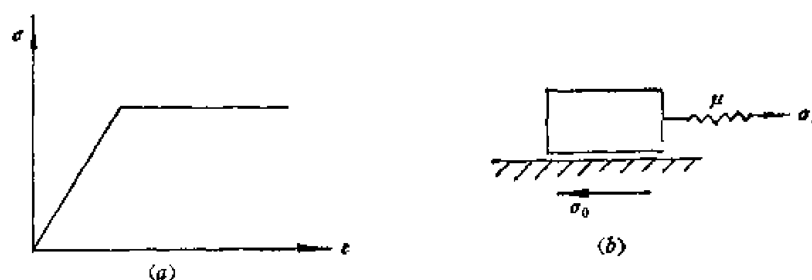


图 3.11

(1) 理想弹塑性其 $\sigma-e$ 图见图 3.12(a).

(2) 理想刚塑性,其 $\sigma-e$ 图见图 3.12(b).

(3) 线性硬化弹塑性,其 $\sigma-e$ 图见图 3.12(c).

(4) 线性硬化刚塑性,其 $\sigma-e$ 图见图 3.12(d).

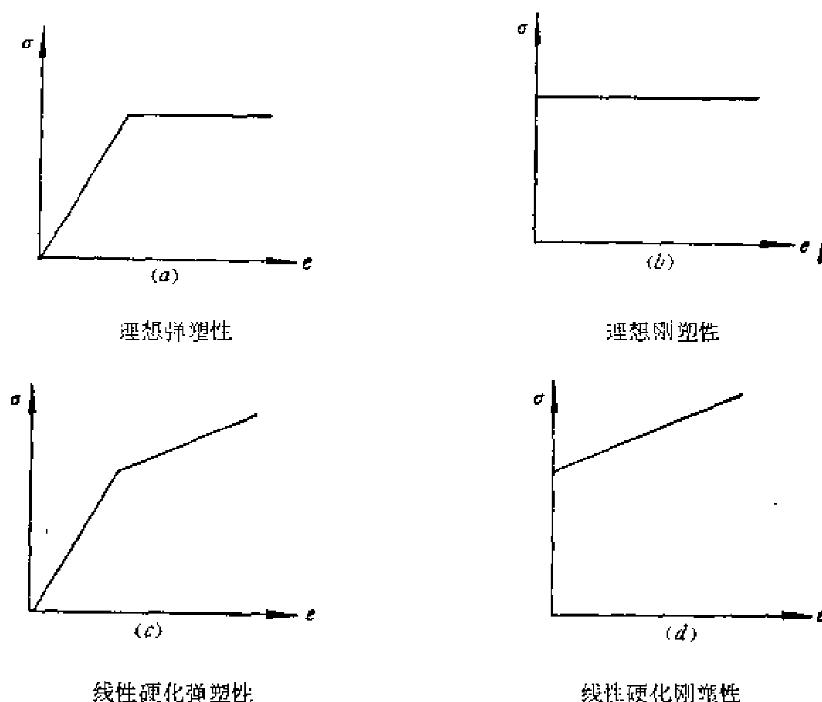


图 3.12 几种描述塑性的模型

另外固体在一定的载荷的长时期作用下,特别是温度较高时,在一定的应力作用下,应变会随时间的增加而增加,这种现象称为**蠕变**. 注意,蠕变现象并不限于在超过物质的弹性极限后发生,因此它是与塑性现象是有区别的. 在应变不变的条件下,固体内部的应力也会随时间而自动降低,称为**松弛**,这两种现象事实上反映了同一个实质. 图 3.13 为含硫 0.35% 的钢在 454℃和 530 公斤/毫米^2 的应力作用下的蠕变曲线,试验共进行了14000个小时,差不多两年时间. 在象汽轮机、飞机发动机等高温高应力的环境中蠕变现象的研究十分重要. 在地球内部断层的相对位错,不但表现为断层两盘的突然错动——发生地震,而且大量的以蠕变的形式出现,这种蠕变有时不是连续发生的,而是时强时弱、时快时慢,如图 3.14 所示.

曾有各种滞弹性模型来试图描述蠕变和松弛现象. 图 3.15 (a)(b)(c)为其中的三

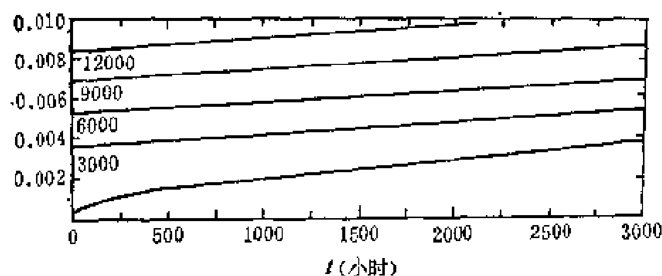


图 3.13 含硫 0.35% 的钢在 454℃ 和 530 公斤/毫米^2 的应力作用下的蠕变曲线

种模型，分别称为 (a) **马克斯韦** (Maxwell) **体**, (b) **伏依特** (Voigt) **体**和 (c) **标准线性体**. 它们都是由弹簧和阻尼盘组成,其常数都已标在图上. μ 为弹簧的弹性常数, η 为粘滞系数, σ 为负载, e 为变形.

对弹簧 μ

$$\sigma = \mu e. \tag{1}$$

对阻尼盘 η

$$\sigma = \eta \frac{de}{dt}. \tag{2}$$

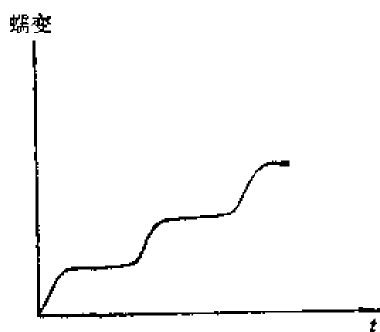


图 3.14

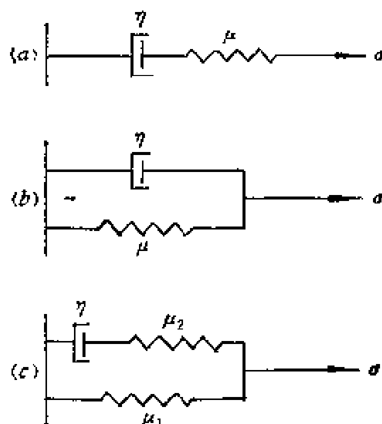


图 3.15 三种滞弹性模型

(a) 马克斯韦体; (b) 伏依特体; (c) 标准线性体.

三种模型的负载和形变的关系式应满足下列方程和初始条件:

马克斯韦体:

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{\mu}\frac{d\sigma}{dt}, \\ e(0) &= \frac{\sigma(0)}{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

伏依特体

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \mu e + \eta \frac{de}{dt}, \\ e(0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

标准线性体:

$$\left.\begin{aligned} \sigma + \tau_0 \frac{d\sigma}{dt} &= \mu_1\left(e + \tau_1 \frac{de}{dt}\right), \\ \tau_0\sigma(0) &= \mu_1\tau_1 e(0). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\eta}{\mu_2} \text{ 为应力弛豫时间,} \\ \tau_1 &= \eta\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) \text{ 为应变弛豫时间.} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

上述各种模型可统称为滞弹性体．滞弹性体在载荷为单位阶跃函数

$$H(t)=\begin{cases}0 & t<0,\\ 1 & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{7}$$

的作用下的形变 $e(t)$ 称为**蠕变函数** $C(t)$，通过简单的解一阶常微分方程的计算可得，对

马克斯韦体：

$$C(t)=\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\eta}t\right)H(t). \tag{8}$$

伏依特体：

$$C(t)=\frac{1}{\mu}\left(1-e^{-\frac{\mu}{\eta}t}\right). \tag{9}$$

标准线性体：

$$C(t)=\frac{1}{\mu_1}\left[1-\left(1-\frac{\tau_0}{\tau_1}\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]H(t). \tag{10}$$

产生单位阶跃函数 $H(t)$ 的变形所必须加以滞弹性体上的载荷称为**松弛函数** $k(t)$，对

马克斯韦体：

$$k(t)=\mu e^{-\frac{\mu}{\eta}t}H(t), \tag{11}$$

伏依特体：

$$k(t)=\eta\delta(t)+\mu H(t), \tag{12}$$

标准线性体：

$$k(t)=\mu_1\left[1-\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right]H(t). \tag{13}$$

其中 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数或称 δ 函数，它满足

$$\begin{cases}\delta(t)=0 \quad \text{对} \quad t\neq 0,\\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(t)\delta(t)dt=f(0) \quad \varepsilon>0.\end{cases} \tag{14}$$

而 $f(t)$ 为任意在 $t=0$ 连续的函数．

图 3.16 为蠕变函数，(a) 为马克斯韦体，(b) 伏依特体，(c) 标准线性体．当 $t=t_0$ 时加载，$t=t_1$ 时卸载．

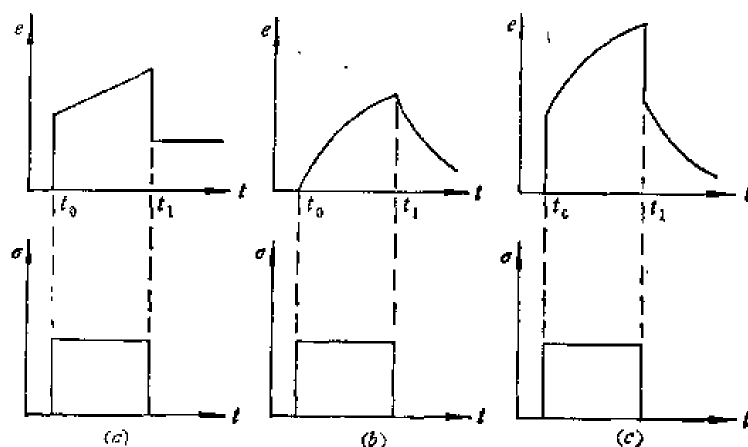


图 3.16 蠕变函数

$t=t_0$ 时加载，$t=t_1$ 时卸载；介质为 (a) 马克斯韦体；(b) 伏依特体；(c) 标准线性体．

图 3.17 为松弛函数，(*a*) 马克斯韦体，(*b*) 伏依特体，(*c*) 标准线性体.

由图 3.16(*a*) 可见对马克斯韦体 (图 3.15(*a*)) 突加负载，由于"弹簧" μ 而立即产生一个变形，然后由于"阻尼盘"的作用，变形随时间线性增加，卸载时产生一个恢复变形，但不能恢复原状，由图 3.17(*a*) 可见，当马克斯韦体产生突然变形时，相应的应有一个突加载荷，以后维持形变不变，载荷应按 $e^{-\frac{\mu}{\eta}t}$ 规律减小，$\frac{\eta}{\mu}$ 为弛豫时间.

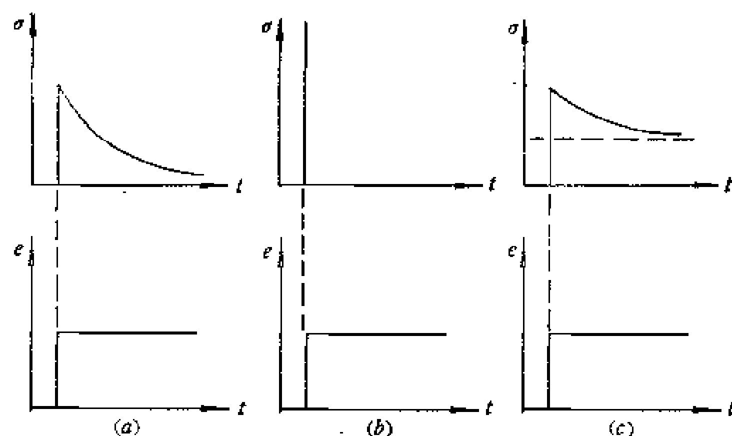


图 3.17 松弛函数

介质为 (*a*) 马克斯韦体；(*b*) 伏依特体；(*c*) 标准线性体.

由图 3.16(*b*) 可见，对伏依特体 (图 3.15(*b*)) 突加负载时，由于"阻尼盘"的作用，不能产生突然的形变，而形变按 $1-e^{-\frac{\mu}{\eta}t}$ 规律增加，这时并联的弹簧上所受的负载越来越大，卸载后，形变按 $e^{-\frac{\mu}{\eta}t}$ 规律减小，形变能恢复到零，形变的弛豫时间常数为 $\frac{\eta}{\mu}$，而对伏依特体要产生突然的阶跃形变，必须在 $t=0$ 时施加脉冲函数形式的负载，以后连续施加一定大小的负载.

由图 3.16(*c*) 可见对标准线性体 (图 3.15(*c*)) 可作与上面相似的讨论. 这时 τ_0 为产生常形变时，负载的弛豫时间，而 τ_1 为常负载时形变的弛豫时间. 当完全卸载后，标准线性体能恢复原状.

当负载不是阶跃函数 $H(t)$，而是函数 $\sigma(t)$ 时，相应的形变应为

$$e(t)=\int_0^t C(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}d\tau. \tag{15}$$

当形变为函数 $e(\tau)$ 时，相应的负载应为

$$\sigma(t)=\int_0^t k(t-\tau)\frac{de(\tau)}{d\tau}d\tau. \tag{16}$$

(15) 与 (16) 不再证明.

当 (15) 或 (16) 式中的蠕变函数 $C(t)$ 及松弛函数 $k(t)$ 不限于 (8) 到 (12) 式时，我们就又作了进一步的推广，$C(t)$ 及 $k(t)$ 可通过对材料进行试验而得到，从而通过 (15)、(16) 式就能知道施加负载 $\sigma(t)$ 后的形变 $e(t)$，或产生形变 $e(t)$ 所需的负载 $\sigma(t)$. 但是 $C(t)$ 与 $k(t)$ 两函数是相关的，决定了一个，另一个可通过 (15) 及 (16) 式求出. 满足

(15) 及 (16) 式的材料称为**波尔兹曼**（Bolzman）**体**，或**线性遗传**（hereditary）**体**，象蠕变，内摩擦或阻尼，弹性后效，应力松弛等，都是分别强调了这种材料的某一方面的特性或某一种特殊的模型.

从以上讨论我们看到，弹性、塑性、滞弹性代表了物质应力应变关系的不同特性. 在一维情况下，我们对物质的塑性和滞弹性作了初步介绍，下面将推广到三维情况.

二、球张量和偏张量

为了把物质的非完全弹性的性质推广到三维情况，还必须引入球张量和偏张量的概念. 可以把应力张量 σ_{ji} 分解为两部分，即应力球张量 $\sigma_b\delta_{ji}$（或称为应力张量的各向同性成分）和应力偏张量 P_{ji}（应力张量的偏量成分），即有

$$\sigma_{ji} = \sigma_b\delta_{ji} + P_{ji}, \tag{17}$$

其中

$$\sigma_b = \frac{\Theta}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \tag{18}$$

$\sigma_b\delta_{ji}$ 称为应力球张量，将它写为矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} \sigma_b & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b \end{pmatrix}$$

而由 (17) 式可得

$$P_{ji} = \sigma_{ji} - \sigma_b\delta_{ji} \tag{19}$$

P_{ji} 称为应力偏张量，将它写为矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_b & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_b & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_b \end{pmatrix}$$

同样对应变张量 e_{ji} 也可分解为应变球张量 $e_b\delta_{ji}$ 和应变偏张量 E_{ji} 两部分，即有

$$e_{ji} = e_b\delta_{ji} + E_{ji} \tag{20}$$

其中

$$e_b = \frac{\theta}{3} = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \tag{21}$$

$e_b\delta_{ji}$ 称为应变球张量，将它写为矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} e_b & 0 & 0 \\ 0 & e_b & 0 \\ 0 & 0 & e_b \end{pmatrix}$$

而由 (20) 式可得

$$E_{ji} = e_{ji} - e_b\delta_{ji} \tag{22}$$

E_{ji} 称为应变偏张量，将它写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} e_{11} - e_b & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e_b & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e_b \end{pmatrix}$$

三、虎克定律的球张量和偏张量形式

从 § 3.2 (28, 34) 式可见，即使对完全弹性体即虎克体，应力张量 σ_{ji} 与应变张量 e_{ji} 之间也不能简单的写成

$$\sigma_{ji} = f(e_{ji}) \tag{23}$$

其中 $f(x)$ 为线性函数．但是正如下面将见到的，应力球张量与应变球张量之间，应力偏张量与应变偏张量之间，恰好满足有如 (23) 式形式的关系式．

从 § 3.2 (34) 式知有

$$\sigma_{ji} = \lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}. \tag{24}$$

将 § 3.2 (33) 式中头三个式子相加，即 (24) 式中 ji 为 11、22、33 的三个式子相加，得

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta,$$

或

$$\sigma_b = (3\lambda + 2\mu)e_b. \tag{25}$$

将 (24) 式减去 δ_{ji} 乘以 (25) 式可得

$$(\sigma_{ji} - \sigma_b\delta_{ji}) = 2\mu(e_{ji} - e_b\delta_{ji}),$$

或

$$P_{ji} = 2\mu E_{ji}. \tag{26}$$

由此虎克定律可用下面的形式表达

$$\left.\begin{aligned} \sigma_b &= (3\lambda + 2\mu)e_b, \\ P_{ji} &= 2\mu E_{ji}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

注意 (26) 式中的关于 P_{11}、P_{22}、P_{33} 的式子并不是相互独立的，事实上从其中的任意二个式子就可以推得第三个式子，因此虽然 (26) 式有形如

$$\left.\begin{aligned} P_{11} &= 2\mu E_{11}, \quad P_{12} = 2\mu E_{12}, \\ P_{22} &= 2\mu E_{22}, \quad P_{23} = 2\mu E_{23}, \\ P_{33} &= 2\mu E_{33}, \quad P_{31} = 2\mu E_{31} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

的六个式子，其中独立的式子只有五个，因此 (27) 式中独立的式子只有六个而不是七个．

如令

$$e_v = \theta = 3e_b = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \tag{29}$$

e_v 代表体积膨胀．由体积模量 $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ 及 (29) 式，(25) 式又可化为

$$\sigma_b = \kappa e_v. \tag{30}$$

由此 (27) 式又可记为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_b &= \kappa e_v, \\ P_{ji} &= 2\mu E_{ji}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

四、非完全弹性

发现在大多数情况下，用 (30) 式来描述应力球张量与应变球张量之间的关系式已是足够好的近似．但也并非绝对如此，例如即使对金、铜这样的物质，在加了很强的均匀压

缩力的情况下，也会发生一定的永久的体积变化.

而对应力偏张量和应变偏张量，很容易直接从前面描述滞弹性的一维情况推广到三维情况. 得到的结果可见表 3.3.

一定的材料只有在一定的应力状态下，在一定的受力时间阶段，才可以近似地以某种模型来描述. 而对于很多应力、应变-时间关系十分复杂的材料，则要用更为复杂的模型或积分方程来表示. 但所介绍的几种模型和相应的方程式无疑是最基本的和重要的.

表 3.3

模型	偏量成分	各向同性成分
刚性体	$E_{ji} \equiv 0$	$e_v \equiv 0$
完全弹性体	$P_{ji} = 2\mu E_{ji}$	$\sigma_b = \kappa e_v$
伏依特体	$P_{ji} = 2\mu E_{ji} + 2\eta \dot{E}_{ji}$	$\sigma_b = \kappa e_v$
标准线性体	$P_{ji} + \tau_0 \dot{P}_{ji} = \mu_1(E_{ji} + \tau_1 \dot{E}_{ji})$	$\sigma_b = \kappa e_v$
麦克斯韦体	$\dot{E}_{ji} = \dfrac{\dot{P}_{ji}}{2\mu} + \dfrac{P_{ji}}{2\eta}$	$\sigma_b = \kappa e_v$
牛顿体	$\dot{E}_{ji} = \dfrac{P_{ji}}{2\eta}$	$\sigma_b = \kappa e_b$
不可压缩液体	$P_{ji} \equiv 0$	$e_v \equiv 0$

五、塑性条件

特雷斯卡 (Tresca) 认为，当最大剪切应力达到一定数值 $\left(\frac{1}{2}\sigma_s\right)$ 时，材料进入塑性状态. 这实际上相当于如材料不进入塑性状态，则要求

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_s, \\ |\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_s, \\ |\sigma_3 - \sigma_1| < \sigma_s. \end{array}\right\} \tag{32}$$

其中 σ_1、σ_2、σ_3 为主应力. 由 § 2.2 (26) 式知，最大剪应力

$$\tau_{\max} = \max\left\{\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|,\ \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|,\ \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right\},$$

立即可得到 (32) 式.

上面这个塑性条件与实际的符合程度并不是十分好的. 下面引入米赛斯 (Mises)-亨基 (Hencky) 塑性条件. 从前面 § 3.3 (12) 式知应变能的变化为

$$\delta W = \sigma_{ji}\delta e_{ji}, \tag{33}$$

将 (17) 式及 (20) 式代入上式得

$$\begin{aligned} \delta W &= (\sigma_b\delta_{ji} + P_{ji})\delta(e_b\delta_{ji} + E_{ji}) \\ &= \sigma_b\delta e_b\delta_{ji}\delta_{ji} + P_{ji}\delta_{ji}\delta e_b + \sigma_b\delta_{ji}\delta E_{ji} + P_{ji}\delta E_{ji}, \end{aligned}$$

由于 $\delta_{ji}\delta_{ji} = 3$, $P_{ji}\delta_{ji} = 0$, $E_{ji}\delta_{ji} = 0$, 因此有

$$\delta W = \sigma_0 \delta e_v + P_{ji} \delta E_{ji}. \tag{34}$$

(34) 式说明材料的应变能的增加由两部分组成，一部分是由于应变球张量的增加而使应变能增加，另一部分是由于应变偏张量的增加而使应变能增加.

亨基认为由塑性材料构成的物体相当于一个容器，它所能容纳的应变偏张量部分的能量(我们称它为应变偏量能)是有限的，当物体的应变偏量能达到这个限度后，应变偏量能就会“溢出”，即应变偏量能再也不能增加了. 这就相当于材料达到了屈服点而开始进入塑性状态. 因此开始进入塑性状态的条件为

$$\int_0^{W_0} dW_0 = W_M, \tag{35}$$

其中 W_0 为应变偏量能，W_M 为应变偏量能的极限.

假定物体在达到应变偏量能的极限之前为完全弹性的，因此有

$$E_{ji} = \frac{P_{ji}}{2\mu},$$

因此

$$\int_0^{W_0} dW_0 = \int_0^{W_0} P_{ji} dE_{ji} = \frac{1}{2\mu} \int_0^{W_0} P_{ji} dP_{ji} = \frac{P_0^2}{4\mu},$$

因此塑性流动条件为

$$P_0^2 = 4\mu W_M, \tag{36}$$

其中

$$P_0^2 = P_{ji} P_{ji} = P_{11}^2 + P_{22}^2 + P_{33}^2 + 2P_{12}^2 + 2P_{23}^2 + 2P_{31}^2. \tag{37}$$

由 P_{ji} 的定义可知有 $P_{11} + P_{22} + P_{33} = 0$，所以 (37) 式又可化为

$$P_0^2 = -2(P_{11}P_{22} + P_{22}P_{33} + P_{33}P_{11} - P_{12}^2 - P_{23}^2 - P_{31}^2).$$

对比 § 2.2 (14) 式中关于应力张量的第二个不变量 Θ_2 的定义可知，上式等号右边括号中的量就是 Θ_2，因此有

$$P_0^2 = -2\Theta_2(P_{ji}),$$

所以塑性流动条件又可记为

$$\Theta_2(P_{ji}) = -2\mu W_M. \tag{38}$$

上式表明应力偏张量的第二个不变量达到一定数值后，介质开始发生塑性流动. (38) 式是米赛斯提出的，它比亨基得到的条件 (36) 更为普遍. 亨基提出的塑性流动条件为 (35) 式，在得到 (36) 式时要求介质服从虎克定律，而米赛斯给出的塑性流动条件 (38) 式不一定要求介质服从虎克定律.

第四章　地震波理论基础

§4.1　波动现象

一、振动现象

1. 振动现象是现实世界中的一种普遍的物理现象．例如50周的交流市电就是电压的振动．在一根弹簧上挂一重物，这就构成了最简单的垂直向地震仪拾震器．拉重物使其离开平衡位置再放开，重物就会上下来回振动，这也是振动现象．振动现象的最简单的形式是简谐振动，数学表示式是

$$f(t)=a\sin\omega t \tag{1}$$

其中 $f(t)$ 代表物理量随时间的变化，ω 为振动圆频率，a 为振幅，t 为时间．周期振动现象应满足关系式

$$f(t)=f(t+T) \tag{2}$$

其中 T 为振动周期．

2. 周期振动可用谐波分析的方法化成傅里叶级数，即分解为离散的频谱，这是大家熟悉的．对非周期振动则可用傅里叶变换的方法分解成连续的频谱，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{3}$$

其中

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{4}$$

$F(\omega)$ 为频谱密度，一般为复数，它可由模 $|F(\omega)|$ 和幅角 $\phi(\omega)$ 来表示，即

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{i\phi(\omega)}, \tag{5}$$

$|F(\omega)|$ 称为振幅谱密度或简称为振幅谱．$\phi(\omega)$ 称为相位谱密度或简称为相位谱．(3)式与(4)式也可以用频率 f 而不是用圆频率 ω 来表达，即有

$$\left.\begin{aligned}f(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}F(f)e^{i2\pi ft}df\\ F(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i2\pi ft}dt\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶变换，它们的对应关系记为

$$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

在地震波的分析中，常用到傅里叶变换的以下重要性质(其证明可在一般有关傅里叶变换的书中查到[37,38])：

① 若 $f_1(t)\longleftrightarrow F_1(\omega)$，$f_2(t)\longleftrightarrow F_2(\omega)$，

则

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\longleftrightarrow a_1F_1(\omega)+a_2F_2(\omega).\qquad a_1、a_2\text{为常数．}$$

② 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$，

则

$$f(t-t_0)\longleftrightarrow F(\omega)e^{-i\omega t_0}.$$

③ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$,

则

$$f(t)e^{i\omega_0 t}\longleftrightarrow F(\omega-\omega_0).$$

④ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$,

则

$$\frac{df(t)}{dt}\longleftrightarrow i\omega F(\omega).$$

⑤ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$,

则

$$\int_0^t f(\tau)d\tau\longleftrightarrow\frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

在震源问题中,常把震源时间函数取成阶跃函数

$$H(t-\tau)=\begin{cases}1 & t\geqslant\tau,\\ 0 & t<\tau.\end{cases}$$

注意到

$$H'(t-\tau)=\delta(t-\tau),$$

而

$$\delta(t-\tau)\longleftrightarrow e^{-i\omega\tau}$$

(见后文),于是

$$H(t-\tau)\longleftrightarrow\frac{e^{-i\omega\tau}}{i\omega}.$$

⑥ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$, $r(t)\longleftrightarrow R(\omega)$,

则

$$f(t)*r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)r(t-\tau)d\tau\longleftrightarrow F(\omega)\cdot R(\omega).$$

⑦ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$, $r(t)\longleftrightarrow R(\omega)$,

则

$$f(t)\cdot r(t)\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}F(\omega)*R(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\Omega)R(\omega-\Omega)d\Omega.$$

⑧ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$,

则

$$f(-t)\longleftrightarrow F(-\omega).$$

⑨ 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$,

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega\qquad\text{(Paserval 定理)}.$$

上述傅里叶变换公式及其主要性质,在理论推导中经常用到. 但如果要对任意一个

在有限时间域 $[0, T]$ 中存在的实际的时间函数 $f(t)$ (例如地震图)来计算出它的频谱的话，却无法直接套用这些积分公式. 这时必须首先把波形数字化，即按一定间隔 Δt 依次取 $f(t)$ 的值

$$f_j = f(j\Delta t), \quad (j = 0, 1, \cdots).$$

这样就得到有限多个等距离散数据. 对这种有限的离散时间序列作波谱分析时要用离散傅里叶变换公式，这在讲到对地震图作谱分析时再作介绍. 不过在这里要说明，上述傅里叶变换的重要性质对于离散变量的也都成立，只是形式不同而已(积分变成求和).

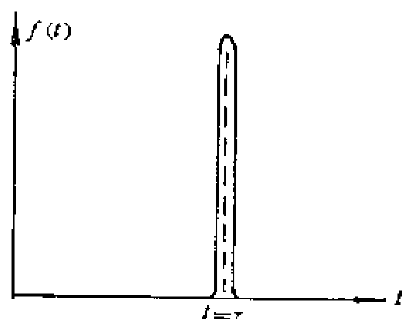


图 4.1

3. 非周期振动最简单的形式为脉冲 (图 4.1)

$$f(t) = c\delta(t - \tau), \tag{7}$$

其中 δ 函数定义为

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & 当 \ t \neq \tau, \\ \infty & 当 \ t = \tau. \end{cases} \tag{8}$$

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(t)\delta(t - \tau)dt = f(\tau), \tag{9}$$

其中 ε 为任意正数,

(7) 式表示的脉冲意味着振动在 $t \neq \tau$ 时为零，在 $t = \tau$ 时突然增为无穷大，而振动时间的积分，即图 4.1 中振动曲线与 t 轴之间所包围的面积为有限值 (这里为 c). 自然这是对某种物理现象进行的一种数学上的抽象. 爆炸激发的地震波，其震源函数有时就可看做 δ 函数. 从 (9) 式很容易得到:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t_1 - \tau)dt_1 = \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ 1 & t > \tau. \end{cases} \tag{10}$$

或记为

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t_1 - \tau)dt_1 = H(t - \tau). \tag{11}$$

其中

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ 1 & t > \tau. \end{cases} \tag{12}$$

证 (10) 式: 当 $t < \tau$, 则对 (10) 中被积函数 $\delta(t - \tau)$ 永有 $t \neq \tau$, 所以

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t_1 - \tau)dt_1 = 0.$$

当 $t > \tau$, 化

$$\int_{-\infty}^{t} = \int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon} + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} + \int_{\tau+\varepsilon}^{t},$$

显然积分 $\int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon}$ 及 $\int_{\tau+\varepsilon}^{t}$ 均为零 (注意 $\varepsilon > 0$), 而由 (11) 易见

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t_1 - \tau)dt = 1,$$

所以当 $t > \tau$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t_1 - \tau)dt_1 = 1.$$

由 (11) 可得

$$\frac{dH(t - \tau)}{dt} = \delta(t - \tau), \tag{13}$$

$H(t-\tau)$ 即阶跃函数，又称为亥维赛（Heaveside）函数（图 4.2）。

4. 任意振动化为脉冲的叠加

即有

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau, \qquad (14)$$

证 (14) 式：由 (8)

$$\int_{-\infty}^{\tau-\varepsilon} X(t)\delta(t-\tau)dt=0,$$

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{\infty} X(t)\delta(t-\tau)dt=0,$$

图 4.2

结合 (9) 可得

$$X(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\delta(t-\tau)dt,$$

或

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\delta(t-\tau)d\tau,$$

最后一等式利用了 δ 函数为偶函数的性质。

(14) 式可以这样求得，将时间均匀地分为许多个小段 Δt，可将振动 $f(t)$ 看做狭的矩形脉冲的叠加（图 4.3），即

$$f(t)=\sum f(\tau_K)\frac{H\left[t-\left(\tau_K-\frac{\Delta\tau}{2}\right)\right]-H\left[t-\left(\tau_K+\frac{\Delta\tau}{2}\right)\right]}{\Delta\tau}\Delta\tau,$$

令 $\Delta\tau\to 0$，注意到 (13)，得

$$f(t)=-\int f(\tau)\frac{dH(t-\tau)}{d\tau}d\tau=\int f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

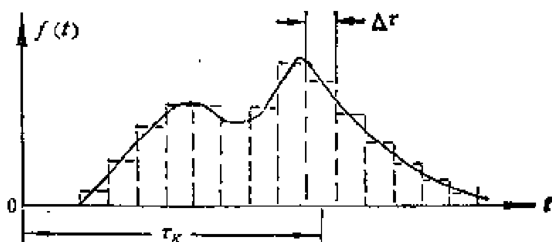


图 4.3

5. 单位瞬间脉冲的频谱

设有单位瞬间脉冲

$$f(t)=\delta(t-\tau),$$

由 (4) 其频谱为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega\tau}. \qquad (15)$$

因此其振幅谱为 $|f(\omega)|=1$，即为常数。也就是它由无限多的振幅相等的谐波所组成，因此单位瞬间脉冲有无限宽的频带。其复频谱为 $e^{-i\omega\tau}$。

将 (15) 代入 (3) 得

$$\delta(t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)}d\omega \qquad (16)$$

将上式中符号改写，令 $t\to\omega_0$, $\tau\to\omega$, $\omega\to t$，得

$$\delta(\omega_0-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0-\omega)t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt \qquad (17)$$

将 (17) 与 (4) 比较知 $\frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t}$ 的频谱是 $\delta(\omega_0-\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$，由 (15) 知，$\delta(t-\tau)$ 的频谱是 $e^{-i\omega\tau}$. 由 (17)，$e^{i\omega_0 t}$ 的频谱是 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$. 由此显示出谐和函数和 δ 函数的对偶关系。

二、波

波的严格定义不是一句话所能说得清楚的，但一般而论，可以认为波就是振动的传播过程（驻波可以看成是由传播的振动叠加而成的）. 物体内的各部分之间是相互联系着的，当一部分弹性介质由于某种原因产生运动时，这种运动就会传向周围的介质，而形成弹性波. 电磁场中扰动的传播就形成了电磁波。弹性波在传播过程中并不引起质点的迁移，介质中的质点只在自己的平衡位置附近振动，振动停止后一般仍留在原在的平衡位置. 从数学上来解，一维空间的波动满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{18}$$

u 为受到扰动的物理量，t 为时间，x 为一维空间的尺度. (18) 式的通解是

$$u(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{a}\right). \tag{19}$$

将 (19) 代入 (18) 式很容易证明它是满足 (18) 式的. (19) 中 f_1 和 f_2 为任意函数. 考察 $f_2\left(t+\frac{x}{a}\right)$ 的意义，当 $t=0$、$x=0$ 时，$f_2\big|_{\substack{t=0\\x=0}}=f_2(0)$，又有 $f_2\big|_{\substack{t=t\\x=-at}}=f_2(0)$，即 $t=0$ 时原点 $x=0$ 的扰动值为 $f_2(0)$，而在 $t=t$、$x=-at$ 处的扰动值也是 $f_2(0)$，由此可见扰动是沿着负 X 轴方向传播，传播的速度为

$$\frac{x}{t}=\frac{-at}{t}=-a.$$

同理 $f_1\left(t-\frac{x}{a}\right)$ 是沿正 x 轴方向传播的波，传播速度是 a，因此 (18) 式中 a 就是波速。

当 f_1、f_2 为正弦或余弦函数时，可得

$$u=\begin{cases}c\cos\omega\left(t\pm\frac{x}{a}\right),\\ c\sin\omega\left(t\pm\frac{x}{a}\right).\end{cases} \tag{20}$$

显然 (20) 仍满足波动方程. (20) 形式的波便为简谐波. 拿一根长绳子，一端固定，一端握在手中快速上下摆动，便可看到简谐波传播的形象化图象（图 4.4）. 常将简谐波写成指数形式



图 4.4

$$u=\begin{cases}ce^{\pm i\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)},\\ ce^{\pm i\omega\left(t+\frac{x}{a}\right)}.\end{cases} \tag{21}$$

对 (21) 理解为，实际的扰动是取 (21) 的实部或虚部. 简谐波的参数可用不同形式表达

$$u = c\cos\omega\left(t - \frac{x}{a}\right) = c\cos(\omega t - kx) = c\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \tag{22}$$

其中 a 为波速

$k = \frac{\omega}{a} = \frac{2\pi}{aT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 称为波数，表示 2π 长度内波的数目；

$\lambda = aT$ 为波长；

ω 为圆频率，$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ 为频率；

$\theta = \omega t - kx$ 称为简谐波的相位。

三、波的叠加

当地震波遇到地层界面时就会发生反射和折射，这样经过不同的反射和折射过程的几种波会同时到达测量地点，接收到的波就是已经叠加的波。下面讨论简谐波的几种叠加情况。

1. 频率、振幅相同，波速大小相同，传播方向相反的波的叠加

设

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c\sin\omega\left(t + \frac{x}{a}\right), \\ u_2 &= c\sin\omega\left(t - \frac{x}{a}\right), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

则

$$u = u_1 + u_2 = 2c\cos\omega\frac{x}{a}\sin\omega t. \tag{24}$$

叠加后的图象见图 4.5。当

$$\frac{\omega x}{a} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

时，亦即

$$x = \frac{n + \frac{1}{2}}{2}\lambda$$

时，对任意时刻 u 均为零。如是弹性波传播，则说该点永保持不动。此点称为波节，两波节之间差 $\frac{\lambda}{2}$ 也就是差半波长。一般在不同的位置，即不同的 x 处，振幅不同，在 $x = \frac{n}{2}\lambda$ 时，$\frac{\omega x}{a} = n\pi$，所以

$$\left|\cos\frac{\omega x}{a}\right| = 1,$$

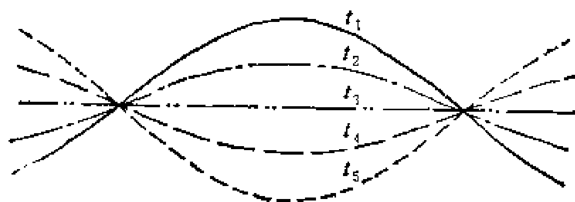


图 4.5

此处振幅最大，称为波腹。两波腹间距离也为半波长。由 (24) 可见，沿 x 轴振幅成余弦

函数分布，一些点上振幅为零，一些点上振幅最大，这就是驻波．所以驻波可看做两个大小相同，传播方向相反的简谐波的叠加．沿着相反的大圆路径到达震中的对蹠点的地震面波便会相互叠加，发生这种情况．

2. 速度相同、频率不同的两个简谐波的叠加

设

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \sin \omega_1\left(t-\frac{x}{a}\right), \\ u_2 &= c_2 \sin \omega_2\left(t-\frac{x}{a}\right). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

求 $u=u_1+u_2$，可将 u_1, u_2 写成复数形式

$$u_1 = c_1 e^{i\omega_1\left(t-\frac{x}{a}\right)}, \quad u_2 = c_2 e^{i\omega_2\left(t-\frac{x}{a}\right)},$$

求和后最后取虚部即可．最后得到

$$u = c \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)+\beta\right], \tag{26}$$

其中

$$c = \left\{c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\cos\left[\Delta\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

$$\beta = \tan^{-1}\left\{\frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}\tan\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]\right\},$$

(26)为拍频现象的表达式．当 $c_1=c_2$ 时，

$$c = 2c_1\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right],$$

$$u = 2c_1\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\right],$$

合成波的传播速度仍是 a，而

$$\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]$$

可以看做振幅的包络线（图 4.6），但与驻波不一样，包络线也以速度 a 向 x 的正向传播．这种情况在通过海洋的地震图上的面波部分经常可以见到．

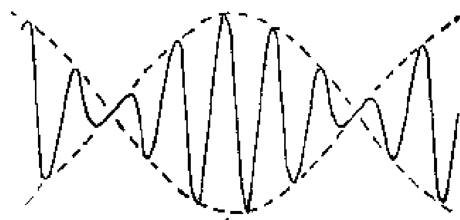


图 4.6

3. 频率相同、速度不同的两简谐波的叠加

令

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \sin \omega\left(t-\frac{x}{a_1}\right), \\ u_2 &= c_2 \sin \omega\left(t-\frac{x+l}{a_2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

用与前面类似方法可得

$$u = u_1 + u_2 = c\sin(\omega t + \beta), \tag{28}$$

其中

$$c = \left\{c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\cos\left[\omega\left(\frac{x}{a_1} - \frac{x+l}{a_2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{-c_1\sin\left(\omega\frac{x}{a_1}\right) - c_2\sin\left(\omega\frac{x+l}{a_2}\right)}{c_1\cos\left(\omega\frac{x}{a_1}\right) + c_2\cos\left(\omega\frac{x+l}{a_2}\right)},$$

当 $c_1 = c_2$, $l = 0$ 时，

$$u = 2c_1\cos\left[\frac{\omega x}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\right]\sin\left\{\omega\left[t - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\right]\right\},$$

此时由于有振幅因子

$$\cos\left[\frac{\omega x}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\right],$$

也形成波节和波腹．但是与 1 中的情况不同，波动以速度 $2\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}$ 向正 x 轴方向传播．

如果在固定的某点观测，也就是令 x 为常数，则第 1，3 种情况观测到的是等幅的振动也就是简谐波，而第 2 种情况观测到的是类似图 4.6 那样具有拍频性质的波．

四、波的频谱分析

同样可以利用傅里叶分析将波化为简谐波的叠加．设有波 $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$，令

$$\xi = t - \frac{x}{a},$$

得 $f(\xi)$，便可对 $f(\xi)$ 进行完全类似振动的频谱分析的讨论．因此有

$$f\left(t - \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)}d\omega, \tag{29}$$

其中

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi. \tag{30}$$

§ 4.2 均匀各向同性介质中的弹性波

本节中讨论的是均匀各向同性介质中允许什么样的弹性波在其中传播，暂且假定介质是无限的，也就是当弹性波在均匀各向同性介质中传播还未遇到分界面的情况．

一、无旋波和等容波——纵波和横波

从前面弹性力学部分，我们知道弹性介质的位移场应满足方程

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

由矢量分析知道，一个在无穷远处收敛的连续矢量场 $\boldsymbol{u}$ 总可以分为两部分，一部分为 $\boldsymbol{u}_1$，

其旋度为零称为无旋场，另一部分 $\boldsymbol{u}_2$，其散度为零称为无散场. 即

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{u}_1 \text{ 满足 } \nabla \times \boldsymbol{u}_1 = 0, \ \boldsymbol{u}_2 \text{ 满足 } \nabla \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0. \tag{3}$$

1. 令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$，由此

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1,$$

因为

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}_1) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1) - \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{u}_1,$$

由 (3) 等号左边为零，所以

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1) = \nabla^2 \boldsymbol{u}_1,$$

由此

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \boldsymbol{u}_1,$$

或

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_1, \tag{4}$$

这就是无旋位移场的波动方程，其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \tag{5}$$

为波速. (试与一维情况下波动方程 § 4.1 (18) 比较之)

在直角坐标系中

$$\nabla^2 \boldsymbol{u}_1 = \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial x_3^2}. \tag{6}$$

2. 令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_2$，由此 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$，将其代入 (1) 得

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}_2,$$

或

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_2 \tag{7}$$

这就是无散位移场的波动方程，其中

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{8}$$

为波速.

3. 对 (1) 式求散度，并有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \theta, \tag{9}$$

得

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta,$$

或

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \theta. \tag{10}$$

4. 对 (1) 式求旋度，并令

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}, \tag{11}$$

注意到 $\nabla\times\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0$，得

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=\mu\nabla^2\boldsymbol{\omega},$$

或

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=\beta^2\nabla^2\boldsymbol{\omega}. \tag{12}$$

二、用位势来表示的波动方程

由矢量分析可知，一个无旋场总可以表示为标量势的梯度，即如 $\nabla\times\boldsymbol{u}_1=0$，则总可以找到标量场 ϕ，使

$$\boldsymbol{u}_1=\nabla\phi, \tag{13}$$

同样一个无散场总可以表示为矢量势的旋度，即如有 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_2=0$，则总可找到矢量场 $\boldsymbol{\phi}$，使

$$\boldsymbol{u}_2=\nabla\times\boldsymbol{\phi}, \tag{14}$$

将 (13) 代入 (4) 得

$$\nabla\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\alpha^2\nabla^2\phi\right)=0,$$

因此只要 ϕ 满足方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\alpha^2\nabla^2\phi, \tag{15}$$

而令 $\boldsymbol{u}_1=\nabla\phi$，则 $\boldsymbol{u}_1$ 必满足方程 (4)。将 (14) 代入 (7) 得

$$\nabla\times\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}}{\partial t^2}-\beta^2\nabla^2\boldsymbol{\phi}\right)=0,$$

因此只要 $\boldsymbol{\phi}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}}{\partial t^2}=\beta^2\nabla^2\boldsymbol{\phi}, \tag{16}$$

令 $\boldsymbol{u}_2=\nabla\times\boldsymbol{\phi}$，则 $\boldsymbol{u}_2$ 必满足方程 (7)。

因此 ϕ 可以用来表示无旋波 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{\phi}$ 可以用来表示无散波 $\boldsymbol{u}_2$. 散度等于零其物理意义就是等体积，即等容。因此又称 $\boldsymbol{u}_2$ 为等容波。

三、总　　结

无旋位移场 $\boldsymbol{u}_1$、任意位移场的散度 θ (即体胀系数)、标量势 ϕ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\alpha^2\nabla^2 f,$$

f 可以为向量 $\boldsymbol{u}_1$ 或标量 θ 或 ϕ. 而 $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$, $\theta=\nabla\cdot\boldsymbol{u}$.

而无散位移场 $\boldsymbol{u}_2$、任意位移场的旋度 ω、矢量势 $\boldsymbol{\phi}$ 满足

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}}{\partial t^2}=\beta^2\nabla^2\boldsymbol{\phi},$$

而 $\boldsymbol{u}_2=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$, $\omega=\nabla\times\boldsymbol{u}$, 这里 α、β 由 (5), (8) 给出.

由于 $\lambda, \mu>0$, 所以 $\alpha>\beta$, 由

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{17}$$

(17) 式代入 (5)、(8) 式得到用杨氏模量 E 和泊松比 ν 来表达 α、β 的公式

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}},\\ \beta&=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

由于实际上 ν 只能在 0 到 1/2 范围内变动，因此有 $\alpha\geqslant\sqrt{2}\beta$ 对地球内介质，通常取 $\nu=1/4$，因而有

$$\alpha=\sqrt{\frac{6E}{5\rho}},\quad \beta=\sqrt{\frac{2E}{5\rho}}, \tag{19}$$

及

$$\alpha=\sqrt{3}\beta. \tag{20}$$

震源同时激发出无旋波和无散波. 由于前者波速为 α, 后者为 β, 由 (20) 知前者快，因而总是先到达观测点，因为对前者介质中粒子的振动方向与波的传播方向一致，故一般称为纵波或 P 波. 无散波的粒子振动方向垂直于波的传播方向，故称为横波或 S 波. 表 4.1 中给出了几种岩石和金属等介质的弹性波速.

表 4.1 几种岩石和金属材料的波速

材料	纵波速 α (公里/秒)	横波速 β (公里/秒)
花岗岩	$5-6\frac{1}{4}$	$2-3\frac{1}{2}$
玻璃质黑曜岩	5±	$3\frac{1}{2}$±
辉长岩	5--7	$3\frac{1}{2}-4$
纯橄榄岩	$7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}-4\frac{3}{4}$
水	1.45	
钢、铁	5.0	
铜	3.56	

§ 4.3 均匀各向同性介质中的平面波

一、平面波

总结 § 4.2(4, 10, 15) 及 § 4.2(7, 12, 16) 式知它们都有形式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 f, \tag{1}$$

其中 f 可以是 § 4.2(10, 15) 中的 θ, ϕ, 或 § 4.2(4, 7, 12, 16) 中 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\psi}$ 的一个分量,对 § 4.2(4, 10, 15) $c=\alpha$, 对 §4.2(7, 12, 16) $c=\beta$, 而 α、β 与介质的弹性常数之间的关系见 § 4.2(5, 8, 18). (1) 式在直角坐标系中的表示式为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right), \tag{2}$$

类似 § 4.1 (19), (1) 式可有如下形式的通解

$$f(x_1, x_2, x_3, t)=f_1\left(t-\frac{n_j x_j}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{n_j x_j}{c}\right), \tag{3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} n_j^2 &= n_1^2+n_2^2+n_3^2=1, \\ n_j x_j &= n_1 x_1+n_2 x_2+n_3 x_3=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将 (3) 表入 (2), 并利用 (4), 不难证明 (3) 式的确为 (2) 的解,下面看 (3) 中

$$f_1\left(t-\frac{n_j x_j}{c}\right)$$

的物理意义.

令

$$t-\frac{n_j x_j}{c}=\text{常数}=a. \tag{5}$$

对

$$t=t_1 \text{ 有 } n_j x_j=c(t_1-a) \tag{6}$$

对

$$t=t_2 \text{ 有 } n_j x_j=c(t_2-a) \tag{7}$$

由解析几何知 (6) 式表示离原点距离为 $c(t_1-a)$ 的平面, (7) 式表示离原点为 $c(t_2-a)$ 的平面, 并且两平面的法线方向都为 n_j (图 4.7). 因此两平面之间的距离为 $c(t_2-t_1)$, 在 t_1 时刻由 (6) 式给出的平面上的 f_1 值为 $f_1(a)$, 在 t_2 时刻由 (7) 式给出的平面上的 f_1 值也是 $f_1(a)$, 由此可见

$$f_1\left(t-\frac{n_j x_j}{c}\right)$$

表示平面波,且波的传播速度为

$$\frac{c(t_2-t_1)}{t_2-t_1}=c,$$

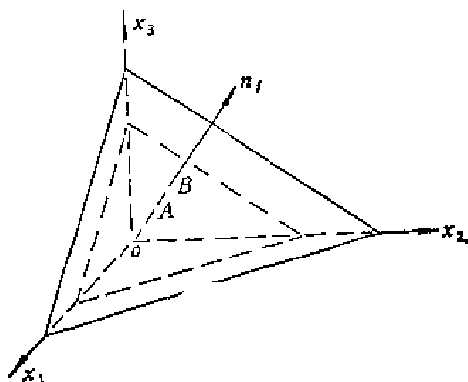


图 4.7

波的传播方向即为平面的法向 n_j. 类似有 $f_2\left(t+\frac{n_j x_j}{c}\right)$ 表示以速度 c 向 $-n_j$ 方向传播的平面波.

与 § 4.1 (29) 相似,可对平面波 (3) 进行频谱分析,如有

$$f_1\left(t-\frac{n_j x_j}{c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)e^{i\omega\left(t-\frac{n_j x_j}{c}\right)}d\omega, \tag{8}$$

其中

$$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi, \tag{9}$$

令

$$t - \frac{n_j x_j}{c} = \xi, \quad f_1\left(t - \frac{n_j x_j}{c}\right)$$

便化为 (9) 中的 $f_1(\xi)$, 对 $f_2\left(t + \frac{n_j x_j}{c}\right)$ 亦可同样进行频谱分析. 其他傅里叶分析的公式亦完全可以套用.

类似一维情况,当 f_1、f_2 为正弦或余弦或余弦函数时,便是简谐平面波. 即

$$f = \left.\begin{matrix} \cos\omega\left(t \mp \frac{n_j x_j}{c}\right), \\ \sin\omega\left(t \mp \frac{n_j x_j}{c}\right), \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

但是更常用的是复数形式

$$f = F_1 e^{i\omega\left(t - \frac{n_j x_j}{c}\right)} = F_1 e^{i(\omega t - k n_j x_j)} = F_1 e^{i(\omega t - k_j x_j)}, \tag{11}$$

其中

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ 为波数}, \tag{12}$$

$$k_i = k n_i \text{ 称为波矢或波矢量},$$

$$k_j^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{13}$$

如果给出 (11) 形式的平面波,则我们把它理解成取其实数部分,即 $F_1\cos(\omega t - k_j x_j)$.

(11) 也可写为

$$f = F_1 e^{i\omega t} e^{-i\omega\left(\frac{x_1}{c/n_1} + \frac{x_2}{c/n_2} + \frac{x_3}{c/n_3}\right)},$$

而 c/n_1、c/n_2、c/n_3 分别为波阵面与三个坐标轴交点的速度,称为各坐标轴方向的视速度,由于 n_1、n_2、$n_3 \leqslant 1$, 因此视速度总是大于或等于真速度 c.

(8) 式中的被积函数 $F_1(\omega)e^{i\omega\left(t - \frac{n_j x_j}{c}\right)}$ 就代表平面波,而 (8) 式表示

$$f_1\left(t - \frac{n_j x_j}{c}\right)$$

可化为不同频率的平面波的叠加. 由于 (8), 任何平面波都可以分解为简谐平面波的叠加,而简谐平面波的传播问题要简单得多,而利用叠加原理,就可以利用简谐平面波来讨论任意平面波的传播问题.

二、不均匀简谐平面波

简谐平面波 (11) 中的 k_1、k_2、k_3 并不限于实数,实际上它们可以取复数值,但必须满足方程 (13), 则即使 k_i 取复数值,平面波 (11) 仍满足波动方程 (2). 令

$$k_i = k_i' + i k_i'', \tag{14}$$

(14) 代入 (11) 得

$$f = F_1 e^{k_j'' x_j} e^{i(\omega t - k_j' x_j)}, \tag{15}$$

(14) 代入 (13) 得

$$\left.\begin{aligned} k_j'^2 - k_j''^2 &= (k_1'^2 + k_2'^2 + k_3'^2) - (k_1''^2 + k_2''^2 + k_3''^2) = k^2, \\ k_j'k_j'' &= k_1'k_1'' + k_2'k_2'' + k_3'k_3'' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

只要 (14) 满足 (16)，则 (15) 必满足 (2) 式. (15) 式代表不均匀平面波 (图 4.8).

波的等相面

$$\omega t - k_j'x_j = \text{常数}, \tag{17}$$

波的等幅面

$$k_j''x_j = \text{常数}, \tag{18}$$

由 (16) 可见，等相面和等幅面是互相垂直的. 取 (15) 的实数部分得

$$f = F_1 e^{k_j''x_j} \cos(\omega t - k_j'x_j), \tag{19}$$

由 (19) 可见波的传播方向为 $\frac{k_j'}{|k_j'|}$. 而 $\frac{k_i'}{|k_j'|}$ 就是波的等相面的法线方向.

对一般的平面波 (3) 也可作同样的推广. 令 (3) 中

$$n_j = n_j' + in_j'', \tag{20}$$

只要

$$n_j^2 = 1 \text{ 即 } n_j'^2 - n_j''^2 = 1, \ n_j'n_j'' = 0, \tag{21}$$

则尽管 n_j 可以是复数，但 (3) 仍满足方程 (2). 当然这只是形式上的，但是如果把

$$f_1\left(t - \frac{n_jx_j}{c}\right) \text{ 及 } f_2\left(t + \frac{n_jx_j}{c}\right)$$

进行频谱分析，得 (8) 式形式的积分后，就可以看出它的物理意义. 实际上可看成许多不均匀简谐平面波的叠加，而波的传播方向为 $\frac{n_j'}{|n_j'|}$. 因此开始时，对平面波的讨论中将 n_j 看做实数只是一般 n_j 可取复数的特例.

由 (15) 可见，当 k_1'' (或 k_2''、k_3'') > 0 及 x_1 (或 x_2、x_3) $\to +\infty$ 时，$f \to \infty$. 这是不可能的，因为波不可能变为无穷大，因此不均匀波不能在全空间存在，它或者出现于当空间中有界面存在的情况，存在于界面的一边或两边；或者将全空间分成两半，各半有不同形式的不均匀平面波，两者交界处要考虑连续性的要求. 后面讨论平面波在界面上的反射和折射时，我们还要讨论不均匀平面简谐波.

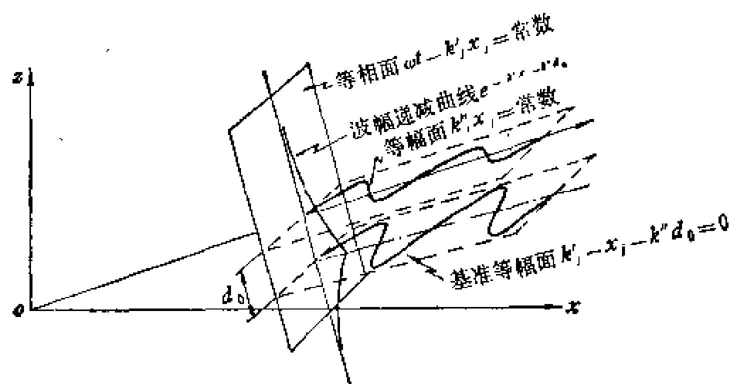


图 4.8

§ 4.4 无旋场和无散场的位移方向——纵波与横波

一、纵　波

从 § 4.2 (15)，标量势 ϕ 满足方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\alpha^2\nabla^2\phi, \tag{1}$$

而无旋场的位移

$$\boldsymbol{u}_1=\nabla\phi. \tag{2}$$

从 § 4.3 (3)，(1) 的通解为

$$\phi=\phi_1\left(t-\frac{n_jx_j}{\alpha}\right)+\phi_2\left(t+\frac{n_jx_j}{\alpha}\right),$$

仅讨论 ϕ_1，由 (2) 得

$$(u_1)_i=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i}=(\phi_1)'\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{n_jx_j}{\alpha}\right)=-\frac{n_i}{\alpha}(\phi_1)', \tag{3}$$

即

$$\boldsymbol{u}_1=-\frac{\boldsymbol{n}}{\alpha}(\phi_1)', \tag{4}$$

因此无旋场的质点位移方向与波的传播方向 $\boldsymbol{n}$ 一致，我们通常称之为纵波．注意这个结论只对 n_i 取实数时成立，对不均匀波一般不能下这样的结论．

二、横　波

从 § 4.2 (16)，矢量势 ϕ_i 满足

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial t^2}=\beta^2\frac{\partial^2\phi_i}{\partial^2x_j^2}, \tag{5}$$

而无散场的位移

$$\boldsymbol{u}_2=\nabla\times\boldsymbol{\phi}, \tag{6}$$

如果使用笛氏张量符号，则 (2) 化为

$$(u_2)_i=\delta_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_k), \tag{7}$$

其中

$$\delta_{ijk}=\begin{cases}0 & \text{当 } i,j,k \text{ 当中有任何两个相等时}\\ 1 & \text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,2,3 \text{ 或 } 2,3,1 \text{ 或 } 3,1,2 \text{ 排列}\\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,3,2 \text{ 或 } 2,1,3 \text{ 或 } 3,2,1 \text{ 排列}\end{cases}$$

从 § 4.3 (3)，(1) 的解取为

$$\phi_i=\phi_i\left(t-\frac{n_jx_j}{\beta}\right), \tag{8}$$

对 $\phi_i\left(t+\dfrac{n_jx_j}{\beta}\right)$ 可作类似讨论．

(8) 代入 (7) 得

$$(u_2)_i = \delta_{ijk}(\psi_k)' \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{n_l x_l}{\beta}\right) = -\delta_{ijk}\frac{n_j}{\beta}(\psi_k)', \tag{9}$$

或

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{1}{\beta}\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{\psi})', \tag{10}$$

因此由矢量分析可知 $\boldsymbol{u}_2 \perp \boldsymbol{n}$，即无散场位移方向与波的传播方向 $\boldsymbol{n}$ 相垂直，因而通常称之为横波。同样，n_j 必须取实数，否则不一定垂直。

如波的传播方向 $\boldsymbol{n}$ 沿 x_1 轴方向，即 $n_2 = n_3 = 0$，则

$$n_j x_j = x_1,$$

令

$$\phi = \phi_1\left(t - \frac{x_1}{\alpha}\right),$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \nabla\phi = -\boldsymbol{i}_1 \frac{(\phi_1)'}{\alpha},$$

即质点运动方向沿 x_1 轴。

令

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_2\left(t - \frac{x_1}{\beta}\right)\boldsymbol{i}_2,$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} = -\boldsymbol{i}_3 \frac{(\psi_2)'}{\beta},$$

即质点运动方向沿 x_3 轴，与波传播方向垂直。

令

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_3\left(t - \frac{x_1}{\beta}\right)\boldsymbol{i}_3,$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \nabla \times \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{i}_2 \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} = \boldsymbol{i}_2 \frac{(\psi_3)'}{\beta},$$

质点运动方向沿 x_2 轴，与波传播方向垂直。

注意如令

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_1\left(t - \frac{x_1}{\beta}\right)\boldsymbol{i}_1,$$

则

$$\boldsymbol{u}_2 = \nabla \times \boldsymbol{\psi} = 0.$$

§ 4.5 平面波的能量

平面波的能量及其传播问题十分重要。在讨论地震的能量及地震的破坏作用时都与此有关，因此我们将作比较详细的说明。平面波传播时就有一部分能量被输送向波的传播方向，我们以纵波为例来说明，对横波可以类推。

一、能 量 密 度

纵波位移所满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

设有纵波，其位移场为 $(u_P)_i$，波传播方向为 n_i，$(u_P)_i$ 为方程 (1) 的平面波形式的解，可表达为

$$(u_P)_i = n_i u\left(t - \frac{n_j x_j}{\alpha}\right), \tag{2}$$

这里的 u 相当于 § 4.4 (4) 式中的 $-\frac{1}{\alpha}(\phi_1)'$，下面求出平面纵波的能量密度 w，它由动能密度 w_1 和应变能密度 w_2 组成。

动能密度 w_1 为

$$w_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial (u_P)_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(n_i \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2. \tag{3}$$

应变能密度为

$$w_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ji}e_{ji} = \frac{1}{2}(\lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji})e_{ji} = \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + \mu e_{ji}e_{ji}, \tag{4}$$

其中应变张量

$$e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u_P)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_P)_j}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{\alpha} n_j n_i u',$$

而

$$u'(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}, \quad \xi = t - \frac{n_j x_j}{\alpha}.$$

由此

$$e_{ji}e_{ji} = \frac{1}{\alpha^2}(u')^2, \tag{5}$$

$$\theta = \frac{\partial (u_P)_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\alpha}u', \tag{6}$$

由 (5) 及 (6) 式得

$$e_{ji}e_{ji} = \theta^2,$$

所以可得

$$w_2 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\theta^2 = \frac{1}{2}\rho\alpha^2\theta = \frac{1}{2}\rho(u')^2, \tag{7}$$

因此有

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\alpha^2\theta^2, \tag{8}$$

或有

$$w = w_1 + w_2 = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2. \tag{9}$$

比较 (3) 式和 (7) 式可知，纵波的动能密度和应变能密度是时时相等的，它们都等于 $\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$。而在单摆的摆动问题中，我们知道，单摆的动能和位能之和始终是常数（如不考虑耗损）。因此在波的传播问题中，动能密度和应变能密度之间的关系与单摆情况中动能和位能之间的关系是不同的，这是由于波在传播，使弹性体的任一小体元中的能量并不是守恒的。

二、能量的传播速度

1. 能量守恒方程

考察由封闭面 S 所包围的体积 V，设能量由 V 内向外传播的速度为 v_i（图 4.9）．由于能量守恒，单位时间内 V 内能量的增加应等于通过 S 面流入的能量．令能量密度为 w，即有

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\oint_S w v_i n_i dS, \tag{10}$$

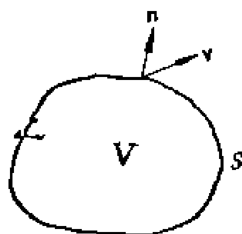


图 4.9

由高斯定理

$$-\oint_S w v_i n_i dS = -\int_V \frac{\partial (w v_i)}{\partial x_i} dV,$$

因此

$$\int_V \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (w v_i)}{\partial x_i}\right] dV = 0,$$

由于 V 为任取的，所以应有

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (w v_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{11}$$

这就是能量守恒方程．连续介质的质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

与 (11) 式完全相似．

2. 能量传播的速度

假设有平面纵波，传播方向为 n_i，其位移为

$$u_i = n_i u\left(t - \frac{n_j x_j}{\alpha}\right), \tag{12}$$

对 (8) 式中的纵波的能量密度公式求 $\frac{\partial}{\partial t}$，得

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + \rho\alpha^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial u_k \partial t}, \tag{13}$$

对 (12) 式求 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 得

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\alpha} n_j n_i u'\left(t - \frac{n_j x_j}{\alpha}\right),$$

由此很容易得到

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial t} = \frac{1}{\alpha^2} u' u'' = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial t},$$

利用上式及波动方程

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2},$$

得

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \rho\alpha^2 \frac{\partial u_k}{\partial t} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} + \rho\alpha^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\alpha^2 \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right), \tag{14}$$

对比上式与 (11) 式可得

$$v_i = \frac{-\rho\alpha^2 \dfrac{\partial u_k}{\partial t}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}}{w} = \frac{-\rho\alpha^2 \dfrac{\partial u_k}{\partial t}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}}{\dfrac{1}{2}\rho\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\rho\alpha^2\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2}. \tag{15}$$

将 u_i 的表达式 (12) 代入上式立即可得

$$v_i = \alpha n_i, \tag{16}$$

由 (11) 式可以看到，v_i 的物理意义是能量传播的速度，因此由 (16) 式知，对平面纵波，其能量传播的方向与波的传播方向一致，传播的速度就是波的相速度 α. 注意，当相速度 α 不是常数而是与频率有关时，能量传播的速度不再等于 α，这在后面还要讨论.

对横波同样可证，当相速度 β 与频率无关时，横波能量传播的速度就等于 β，且传播的方向与波的传播方向相一致.

三、平均能流密度

平均能流密度定义为单位时间内流过与波的传播方向相垂直的单位横截面上的能量.

对非周期的平面波，显然无平均可言，而只有瞬时能流密度的概念. 其值对纵波为 $w_P\alpha n_i$，对横波为 $w_S\beta n_i$，n_i 为波的传播方向，w_P、w_S 分别为纵、横波的能量密度. 而 α、β 为纵、横波的波速.

下面讨论简谐平面纵波的平均能流密度 $(W_P)_i$. 设 n_i 为简谐平面纵波的传播方向，其位移为

$$u_i = n_i u_P \cos\omega\left(t - \frac{n_j x_j}{\alpha}\right), \tag{17}$$

设 T 为波的周期，则

$$(W_P)_i = \frac{n_i}{T}\int_0^T w_P \alpha dt = n_i \frac{\alpha}{T}\int_0^T \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dt,$$

将 (17) 式代入上式可得

$$(W_P)_i = n_i \frac{1}{2}\rho\alpha\omega^2 u_P^2 = n_i \frac{(\lambda + 2\mu)}{2\alpha}\omega^2 u_P^2. \tag{18}$$

类似方法可得，简谐平面横波的平均能流密度为

$$(W_S)_i = n_i \frac{1}{2}\rho\beta\omega^2 u_S^2 = n_i \frac{\mu}{2\beta}\omega^2 u_S^2. \tag{19}$$

四、从做功的角度说明能量的传播

可以从另一角度讨论能量的传播，即求当弹性波传播时，在垂直于波的传播方向的单位截面上，截面后方的介质对截面前方的介质所做的功 A，从后方到前方为波的传播方向. 我们仍讨论沿 n_i 方向传播的简谐平面纵波，令其位移为

$$u_i = n_i u = n_i u_P \cos\omega\left(t - \frac{n_j x_j}{\alpha}\right), \tag{20}$$

考虑垂直于波传播方向上的某一横截面，其上应力为

$$\overset{n}{T}_i = n_j\sigma_{ji},$$

设在 dt 时间内此横截面有一小的元位移 $du_i = n_i du$，则应力做功为

$$\overset{n}{T}_i du_i = n_j\sigma_{ji}n_i du = \sigma_{(n)}du,$$

其中 $\sigma_{(n)}$ 为横截面上的正应力．设 $du > 0$、$\sigma_{(n)} > 0$，即位移 du_i 是顺着 n_i 的方向，而截面上的正应力为张力，因此可看出此时截面后方的介质对截面前方介质所作的功是负的，由此

$$\frac{dA}{dt} = -\overset{n}{T}_i n_i \frac{du}{dt} = -\sigma_{(n)}\frac{du}{dt}. \tag{21}$$

下面求正应力 $\sigma_{(n)}$，

$$\sigma_{(n)} = n_j\sigma_{ji}n_i = n_jn_i(\lambda\theta\delta_{ji} + 2\mu e_{ji}) = \lambda\theta + \mu n_jn_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

将位移 u_i 的表达式 (20) 代入上式可得

$$\sigma_{(n)} = \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha}\omega u_p \sin\omega\left(t - \frac{n_jx_j}{\alpha}\right), \tag{22}$$

而

$$\frac{du}{dt} = -\omega u_p \sin\omega\left(t - \frac{n_jx_j}{\alpha}\right), \tag{23}$$

平均能流密度显然等于在波的一个周期内横截面后方介质对横截面前方介质所做的平均功，即有

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dA}{dt}dt = -\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_{(n)}\frac{du}{dt}dt,$$

将 $\sigma_{(n)}$ 和 $\dfrac{du}{dt}$ 的表达式 (22)、(23) 代入上式立即可得

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{2\alpha}\omega^2u_p^2, \tag{24}$$

再考虑到波的传播方向就可看出所得结果与 (18) 式是一致的．

以上所作的种种讨论全部可类比的用于横波，这里不再重复．

§ 4.6 球 面 波

如果震源是球对称的，介质是均匀各向同性的，则当地震波在地球内部传播而遇到分界面之前可看做球面波．爆炸产生的地震波基本上属于这种情况．

用位势表示的波动方程为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 f, \tag{1}$$

这里 f 可为标量势，也可为矢量势 Φ 的一个分量．在球坐标中

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2},$$

由于球对称的性质，f 与 θ、φ 无关

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right), \tag{2}$$

(2) 代入 (1) 得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = c^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf),$$

或

$$\frac{\partial^2(rf)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf), \tag{3}$$

对比 (3) 与 §4.1 (18)，可见两者相似，由 §4.1 (19) 得

$$rf = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right), \tag{4}$$

$f_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$ 代表由外向内传播的波，显然与实际情况不符，所以 $f_2 = 0$，

$$f = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \tag{5}$$

这就是 (1) 式的球对称的通解. 可对 (5) 式进行频谱分析得到球面谐波的叠加，即有

$$f = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\,d\omega,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi,$$

而

$$\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}$$

便为球面谐波.

如令 f 为标量势 ϕ，则位移场为 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$，质点位移方向为

$$\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

球坐标中

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1\partial\phi}{r\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r. \tag{6}$$

(6) 代入 (5) 得质点位移方向为 $\pm\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_r$ 为沿矢径 r 方向的单位矢量. 对纵波，波的传播方向与质点位移方向相同，也就是波的传播方向是沿半径向外传播的，波阵面成球面状向外扩散，因此称为球面波 从位移函数的表达式 (5) 也可看出波的传播性质.

考虑球面谐波

$$\phi = \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{\alpha})}}{r} \propto \frac{1}{r},$$

位移

$$\boldsymbol{u}_P = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r = \left(-\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)}}{r^2} - i\frac{\omega}{\alpha}\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)}}{r}\right)\boldsymbol{e}_r,$$

由于

$$\frac{\omega}{\alpha}\frac{1}{r} = \frac{k}{r} = \frac{2\pi}{\lambda r}$$

因此当 $r \gg \lambda$(波长)时第一项远小于第二项,因此

$$|\boldsymbol{u}_p| \propto \frac{1}{r},$$

如果令

$$\psi_i = a_i\frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{\beta}\right)}}{r},$$

同样可证

$$|\boldsymbol{u}_S| = |\nabla\times\boldsymbol{\psi}| \propto \frac{1}{r},$$

因此球面谐波的位移场当 $r \gg \lambda$ 时,以 $\frac{1}{r}$ 衰减. 在第八章,我们还要讨论位移场与震源参数之间的关系. 当震源不具有球对称性质时,上述讨论还要重新考虑,这些也将在第八章讨论.

§ 4.7 弹性波的衰减及介质品质因子 Q

一、弹性波的衰减及介质的品质因子 Q

弹性波在介质中传播时,其能量会在介质中损耗而使波衰减,其能量被介质吸收而变成了热能. 如果没有这种损耗,那么自地球形成以来所发生的一切地震以及其他一切振动源所激起的弹性波就会永远在地球内传播着,这时将成为什么样的一种局面呢?

为简单起见,我们考虑平面波的衰减,所讨论的结果可以很容易地推广到球面波或其它情况. 设有平面波,沿着 x 轴方向传播,其位移可表达为

$$u(x) = A(x)e^{i(kx-\omega t)}, \tag{1}$$

其中 $A(x)$ 是波的振幅,由于介质的吸收损耗,振幅随着距离的增加而减小. k 为无损耗时的波数. 讨论波从 x 处传播到 $x+dx$ 处,由于介质的损耗造成波振幅的衰减. 当 dx 充分小时显然波振幅的相对变化 $\frac{A(x+dx)-A(x)}{A(x)}$ 应正比于 dx,设比例系数为 $-\gamma$,它是表征介质损耗性质的一个指数. 设波的传播服从线性微分方程,则 γ 应与振幅 A 无关,但它可能与频率 ω 有关,即有

$$\frac{A(x+dx)-A(x)}{A(x)} = -\gamma(\omega)dx, \tag{2}$$

令 $dx \to 0$,得

$$\frac{dA(x)}{dx}=-\gamma A(x), \tag{3}$$

设 $A(x)|_{x=0}=A_0$，解上述微分方程可立得 $A=A_0e^{-\gamma x}$，将它代入 (1) 式可得

$$u(x)=A_0e^{-\gamma x+i(kx-\omega t)}. \tag{4}$$

由此可见，随着波的传播，波的振幅随距离的增加而作指数衰减。

注意，得到上述结论时假定了波振幅的相对变化与波振幅的大小无关，这实际上代表了波的传播是服从线性微分方程的。而地震波的传播是受介质的弹性性质所控制的，只要波的振幅不太大，也可以看做是服从线性微分方程的，因而地震波的传播，无论是体波或是面波，由于介质的损耗而造成波振幅的衰减应服从上述指数衰减的规律。

亦可将波数 k 表达成复数形式，即令

$$K=k+i\gamma, \tag{5}$$

此时 (4) 式可化为

$$u(x)=A_0e^{i(Kx-\omega t)}, \tag{6}$$

其中 K 为复数，其实部为传播常数 k，其虚部为衰减系数 γ。

讨论介质的损耗性质时，经常还可用品质因子 Q 来表达，它在电路理论中已为人们所熟知，它定义为

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta E}{E}. \tag{7}$$

在讨论平面波沿 x 轴的传播时，E 可解释为在一个周期的时间间隔内，波通过垂直于 x 轴的单位截面的能量。ΔE 为 $x=x_0$ 处及 $x=x_0+\lambda$ 处，一个周期内通过的能量之差，亦即 ΔE 为波通过 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\lambda$ 段所损耗的能量(变为热能)，其中 λ 为波长。

将波的振幅的表达式 (6) 代入 Q 的定义 (7) 式，并注意到波的能量是正比于波振幅的平方，可得

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_0^T A_0^2e^{2i(Kx-\omega t)}dt-\int_0^T A_0^2e^{2i[K(x+\lambda)-\omega t]}dt}{\int_0^T A_0^2e^{2i(Kx-\omega t)}dt}=\frac{1}{2\pi}(1-e^{2iK\lambda}).$$

将 $K=k+i\gamma$ 代入上式并注意到 $k\lambda=2\pi$，得

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2\gamma\lambda}),$$

当 $\gamma\lambda\ll 1$ 时，也就是当在一个波长的范围内波的衰减足够小时，

$$\frac{1}{Q}\simeq\frac{\gamma\lambda}{\pi}=\frac{2\gamma c}{\omega}=\frac{2\gamma}{k}, \tag{8}$$

其中 c 为波速，而 $k=\frac{\omega}{c}$，

γ 称为衰减系数，

Q 称为品质因子，

$\frac{1}{Q}$ 称为损耗因子。

介质的品质因子 Q 也可以通过驻波的衰减来得到。设在介质中有驻波，其振幅为

$$u = e^{-t/\tau}\cos(kx+\varphi), \tag{9}$$

这时仍用(7)式来定义 Q，但此时讨论的是平面驻波，E 定义为单位横截面而长度为一个波长的介质内驻波的总储能，ΔE 是经过一个周期 T 的时间后总储能的减小．用求得(8)式的同样方法，利用(7)式与(9)式可得

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi}\frac{\int_x^{x+\lambda} e^{-2t/\tau}\cos^2(kx+\varphi)dx - \int_x^{x+\lambda} e^{-2(t+T)/\tau}\cos^2(kx+\varphi)dx}{\int_x^{x+\lambda} e^{-2t/\tau}\cos^2(kx+\varphi)dx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2T/\tau}).$$

当 $\frac{T}{\tau} \ll 1$ 时，也就是在一个周期的时间间隔内，驻波的相对衰减足够小时，上式可化为

$$\frac{1}{Q} \simeq \frac{T}{\pi\tau} = \frac{2}{\tau\omega}. \tag{10}$$

由 Q 的定义可见，Q 反映了介质中波的损耗性质，Q 值越高，亦即介质的品质因子越高，波的损耗越小．

对地震波例如地震体波或面波，可以通过测定其衰减系数 γ，并利用(8)式来确定地球介质的 Q 值．对地球自由振动，可通过测量振动的 τ 值，并利用(10)式求得地球介质的 Q 值．当然，在测量地震波的衰减时，还要先把由于波阵面的扩散及波的频散(见 §7.3)造成波振幅的变化的因子扣除．无论是实验室或是实际的地震测量都表明，对于固体，一般 $\frac{1}{Q}$ 与频率无关[39]．克诺波夫等[40]证明，如弹性波满足常系数的线性微分方程，则波的衰减系数 γ 必为 ω 的偶次方，从而 $\frac{1}{Q}$ 必为 ω 的奇次方．这与前面所述的 $\frac{1}{Q}$ 与频率无关的实测结果不符．如何解释这个矛盾，现在仍是有争议的．

二、体波的衰减与频散之间的关系

利用因果律可以证明[41]，体波的衰减与频散是相互联系着的，只要体波存在衰减，就必然发生频散(即波的相速度与频率有关)，并可以得到它们之间的关系式．

仍讨论平面波，我们可将任一脉冲 $u(x,t)$ 表达为平面波的叠加，也就是说是满足线性方程的．即有

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(0,\omega)e^{i[K(\omega)x-\omega t]}d\omega, \tag{11}$$

其中

$$K(\omega) = k(\omega) + i\gamma(\omega),$$

k 为波数，γ 为衰减系数，将复波数 $K(\omega)$ 表达成介质的折射系数 $n(\omega)$ 是方便的，定义

$$n(\omega) = \frac{K(\omega)}{K_0(\omega)}, \tag{12}$$

其中 $K_0(\omega)$ 定义为当不发生频散时 K 在同一频率的数值．而复折射系数可写为

$$n(\omega) = \mathrm{Re}\, n(\omega) + i\,\mathrm{Im}\, n(\omega). \tag{13}$$

实际观测发现，弹性体波的衰减系数随频率的降低而线性减小，因此有理由假定在足

够低的频率时波的吸收可以忽略。我们假定当 ω 低于某个截止频率 ω_0 时不发生频散，而此截止频率 ω_0 可与介质的性质有关。可以证明[42]从理论上要求 $\omega_0 \neq 0$，由此对于 $\omega < \omega_0$ 有 $K(\omega) = \frac{\omega}{c}$，其中 c 为相速度的低频极限，即 $\omega < \omega_0$ 时的相速度。因此，不发生频散的 $K_0(\omega)$ 就相当于当 $\omega > \omega_0$ 时相速仍为 c，即有

$$K_0(\omega) = \frac{\omega}{c},$$

由此

$$n(\omega) = \frac{K(\omega)}{\omega/c}, \tag{14}$$

且有

$$\lim_{\omega \to 0} n(\omega) = n(0) = 1.$$

由因果关系，即波只有经过一定时间后才能到达接收点这一要求，可从推导得到 Kramerms-Krönig 关系[2,42,43,44]，K-K 关系告诉我们，只要知道折射系数 $n(\omega)$ 的虚数部分，就能求出它的实数部分。由 K-K 关系得到

$$\mathrm{Re}\,\{n(\xi) - n(0)\} = \frac{2\xi^2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\, n(\xi')}{\xi'(\xi'^2 - \xi^2)} d\xi', \tag{15}$$

其中

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0},$$

P 为取哥西积分主值。

在推导得 (15) 式中还利用了折射系数 $n(\omega)$ 的对称性质

$$n(\omega) = n^*(-\omega),$$

这种对称性质可由 (11) 式得到。(11) 式的反变换为

$$U(0, \omega)e^{-iK(\omega)x} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\omega t}dt, \tag{16}$$

如在上式中将 $-\omega$ 代换 ω 可得

$$U(0, -\omega)e^{-iK(-\omega)x} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{i\omega t}dt,$$

再对等号两边取复共轭得

$$U^*(0, -\omega)e^{iK^*(-\omega)x} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\omega t}dt,$$

对比上式和 (16) 式可见应有

$$U(0, \omega) = \hat{U}^*(0, -\omega), \quad K(\omega) = -K^*(-\omega),$$

亦即

$$k(\omega) = -k(-\omega), \quad \gamma(\omega) = \gamma(-\omega). \tag{17}$$

它说明 $K(\omega)$ 的实部为 ω 的奇函数，而其虚部为 ω 的偶函数。这种奇偶性是与 k, γ 在 $\omega > 0$ 的区域服从 ω 的奇或偶次方或其他变化规律是无关的。

由于 $n(\omega) = \frac{K(\omega)}{\omega/c}$，因此折射系数 $n(\omega)$ 应满足关系式 $n(\omega) = n^*(-\omega)$。前面已

经提到，大量实验表明，衰减系数 $\gamma(\omega)$ 与 ω 成线性关系，即频率越高，衰减越强烈，因此 $\operatorname{Im} n(\omega)$ 应与 ω 无关，而当 $\omega < \omega_0$ 时不发生波的衰减，即有

$$\operatorname{Im} n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2Q_0} & \text{当 } 1 < \xi. \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

将上面的表达式代入 (15) 式可得

$$\operatorname{Re} n(\xi) - 1 = \frac{\xi^2}{\pi Q_0} P \int_1^\infty \frac{d\xi'}{\xi'(\xi'^2 - \xi^2)},$$

如令 $y = \frac{1}{\xi}$ 代入上面的积分，可将无穷积分积出得到

$$\operatorname{Re} n(\xi) - 1 = -\frac{1}{2\pi Q_0} \ln|\xi^2 - 1|,$$

或

$$\operatorname{Re} n(\xi) - 1 = -\frac{1}{2\pi Q_0} \ln\left|\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right|,$$

而

$$\operatorname{Re} n(\omega) = \frac{k(\omega)}{\omega/c} = \frac{c}{c_p},$$

所以得

$$c_p = \frac{c}{1 - \dfrac{1}{2\pi Q_0} \ln\left|\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right|}. \tag{19}$$

由此可见波的相速 c_p 与 ω 有关，即当体波存在衰减并且衰减与频率 ω 有关时，必发生频散，且频率越高相速度越大.

注意当 $\xi = 1$ 即 $\omega = \omega_0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi Q_0} \ln|\xi^2 - 1| = -\infty,$$

即 $\operatorname{Re} n(1) - 1 = \infty$，这显然是不合理的，这说明所取的 $\operatorname{Im} n(\omega)$ 的模型还有一定的缺陷，它只能在一定的频率范围内应用. 本节的讨论说明如体波存在衰减必导致频散，否则就不满足因果律的要求. 实际的地球介质，一般其 Q 值都很高，因而衰减所引起的地震波频散往往可以忽略，但当 Q 值不大(如软流层)或作较为精确的考虑时，就要把这种频散计算进去.

通过对地震波的测量，可以研究地球内部介质的 Q 值，例如根据兴都库什-泊米尔中源地震的 S_n 震相的大振幅和高频特征可知[45]，或者是该处地下介质的平均 Q 值十分高(几千)，或者是地震具有十分高的应力降(千巴)，或者两者都有. 如果地下介质的 Q 值十分高，则说明该地区地下的软流层中断或者很薄. 在研究西藏高原的隆起原因时，上述结果是值得注意的.

第五章　平面波的反射和折射，近震的地震波

地壳及地球内部是成层结构，内部有不少分界面，地表也可看做一个界面，震源在各向同性的均匀介质中产生的地震波波阵面是成球形的一层层向外传播，称为球面波. 因此严格来讲，我们应该讨论球面波遇到分界面时的情况. 但当距离震源足够远时，也就是当震源到接收点的距离比波长大得多时 ($r \gg \lambda$)，作为一种近似，可讨论平面波在分界面上的行为. 同时当 $\lambda \ll \rho$ (ρ 为分界面的曲率半径)，也可将分界面看做平面，这样可使讨论大大简化而并不影响对许多现象的本质的揭示. 同时，球面波在理论上可以看做是许多不同方向的均匀的或不均匀的平面波的叠加，因而先弄清了平面波在分界面上的行为，即使 r 与 λ 可相比时，也比较容易讨论球面波在分界面上的行为.

§5.1　P 波、SV 波和 SH 波

设平面波（指均匀的平面波）的传播方向在 xz 平面内（自本章起笛氏坐标系取为 x, y, z，位移分量为 u, v, w），传播方向就是波阵面的法线方向，又称为平面波的射线方向. 波的位移场

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_P + \boldsymbol{u}_S = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\phi}, \tag{1}$$

其中 ϕ 满足方程 §4.2 (15)，ϕ_x、ϕ_y、ϕ_z 满足方程 §4.2 (16).

由于均匀平面波波阵面上的 ϕ、ϕ_x、ϕ_y、ϕ_z 为常数，而这里平面波传播方向在 xz 平面内，因此垂直于 xz 平面的直线上的各点必在同一波阵面内，也就是

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_x}{\partial y} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \frac{\partial \phi_z}{\partial y} = 0,$$

由 (1)

$$\left.\begin{aligned} u_P &= (\boldsymbol{u}_P)_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ v_P &= (\boldsymbol{u}_P)_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ w_P &= (\boldsymbol{u}_P)_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u_S &= (\boldsymbol{u}_S)_x = \frac{\partial \phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial z} = -\frac{\partial \phi_y}{\partial z}, \\ v_S &= (\boldsymbol{u}_S)_y = \frac{\partial \phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \phi_z}{\partial x}, \\ w_S &= (\boldsymbol{u}_S)_z = \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} = \frac{\partial \phi_y}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

或

$$
\left.\begin{aligned}
u &= u_P + u_S = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \\
v &= v_P + v_S = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \\
w &= w_P + w_S = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

分析界面条件，界面应力为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu e_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \lambda\nabla^2\phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial z}\right) \\
&= \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) \\
&= \rho\left[\alpha^2\nabla^2\phi + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\right], \\
\sigma_{zx} &= 2\mu e_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}\right) \\
&= \rho\beta^2\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}\right) \\
\sigma_{zy} &= 2\mu e_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

界面条件为界面两边应力相等，位移连续，即

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \sigma_{zz'}, \\
\sigma_{zx} &= \sigma_{zx'}, \\
\sigma_{zy} &= \sigma_{zy'},
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

$$
u = u', \quad v = v', \quad w = w'. \tag{7}
$$

分析位移场在 y 方向的分量 v，$v = v_P + v_S = v_S$，也就是 v 全部为横波场的分量．再由界面应力条件 (5) 看，v 只出现在 σ_{zy} 的表达式中，而 u、w 只出现在 σ_{zz}、σ_{zx} 的表达式中．因此如入射波在 y 方向的位移分量 v 不为零，而 $u = w = 0$．则根据界面条件 (6)、(7) 知，产生的反射波和折射波也只在 y 方向的位移分量不为零，而反、折射波的 u、w 分量一定为零．这个结论与模拟试验及地震测量实践的结果是一致的．我们称横波在 y 方向的分量即 S 波平行于界面的位移分量为 SH 波．因此入射到界面的 SH 波只能产生反、折射 SH 波．我们把横波在入射射线和界面法线所构成的入射面（即图 5.1 中 x、z 平面）上的分量称为 SV 波，从界面条件(6)、(7)看，入射的 P 或 SV 波可能产生反、折射的 P 波和 SV 波，不能产生 SH 波．

§5.2 平面波在自由界面上的反射

所谓自由界面即指表面应力为零的界面，地表面可以看做自由界面，实践证明，地表面的大气层在讨论时可以略去不计．也就是大气层的存在对地震波在自由界面的反射性

质的影响是很小的.当然,在讨论地震的地声效应时,必须考虑大气层.由于任意平面波总可以用频谱分析的方法分解为许多简谐平面波的线性迭加,因此只要讨论简谐平面波在自由界面上的行为就可以利用叠加原理,讨论任意平面波的情况.

一、P 波在自由界面上的反射

令 xz 平面为入射面,$z=0$ 为自由界面(图 5.1). 已知 P 波的位移场 $\boldsymbol{u}_P=\nabla\phi$,位移势 φ 满足波动方程

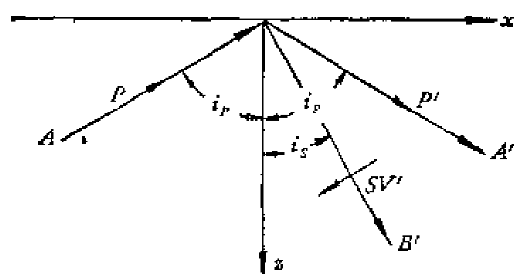


图 5.1

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\alpha^2\nabla^2\phi, \tag{1}$$

满足方程 (1) 而射线方向在 xz 平面内的入射简谐平面波的位移函数 φ 为

$$\phi=Ae^{i(xk\sin i_P-zk\cos i_P)-i\omega t}, \tag{2}$$

其中

$$k=\frac{\omega}{\alpha}, \tag{3}$$

i_P 为入射角(见图 5.1).

将 (2)、(3) 代入 (1) 易证它们的确满足方程 (1).

令反射 P 波的位移函数为

$$\phi'=A'e^{i(xk'_P\sin i'_P+zk'_P\cos i'_P)-i\omega'_Pt}, \tag{4}$$

反射 SV 波的位移函数 ψ' (相当于 § 5.1 (3) 中的 ϕ_y) 为

$$\psi'=B'e^{i(xk'_S\sin i'_S+zk'_S\cos i'_S)-i\omega'_St}, \tag{5}$$

且有

$$k'_P=\frac{\omega'_P}{\alpha}, \tag{6}$$

$$k'_S=\frac{\omega'_S}{\beta}. \tag{7}$$

易证 (4)、(6)满足波动方程(1)、(5)、(7)满足波动方程 § 4.2(16).自由界面的边条件为

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0}=0,\quad \sigma_{xz}\big|_{z=0}=0, \tag{8}$$

由 § 5.1 (5) 式,(8) 式可写为

$$\left.\begin{aligned}&\left[\lambda\nabla^2\phi+2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right)\right]\Big|_{z=0}=0,\\&\left[2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]\Big|_{z=0}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(9) 中

$$\phi=\phi+\phi',\quad \psi=\psi', \tag{10}$$

将 ϕ、ϕ'、ψ' 的表达式 (2)、(4)、(5) 代入 (9) 再令 $z=0$,所得的等式左边为指数项

$$e^{ixk\sin i_P-i\omega t},\quad e^{ixk'_P\sin i'_P-i\omega'_Pt},\quad e^{ixk'_S\sin i'_S-i\omega'_St}$$

的线性组合,等式右边为零. 因为边界条件 (9) 应对任意 x 和 t 值都成立,因此必应有

$$\left.\begin{aligned}&\omega=\omega'_P=\omega'_S,\\&k\sin i_P=k'_P\sin i'_P=k'_S\sin i'_S,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

将 k、k'、k'_S 的表达式 (3)、(6)、(7) 代入 (11) 得

$$\frac{\sin i_P}{\alpha}=\frac{\sin i'_P}{\alpha}=\frac{\sin i'_S}{\beta}, \tag{12}$$

由此 $i'_P=i_P$，而 i'_S 与 i_P 的关系由 (12) 式决定. (12) 式称为史内尔 (Snell) 定律，或称为折射、反射定律. 回忆几何光学，可见 (12) 与几何光学中的折射定律完全相似，这是由于它们在本质上(波动性)有相同之处. 而折射反射定律正是反映了与物质的波动性相关的一种规律. 在光学中是从光学实验或惠更斯原理得到了折射反射定律，而这里我们从波动方程和边界条件出发也得到了它. 同样的方法可以证明，平面波在两种介质的界面上折射与反射时，折射反射定律仍然适用.

由史内尔定律，即由 (12) 式，反射 P 和 SV 波的位移函数可写为

$$\left.\begin{aligned}\phi'&=A'e^{i(xk\sin i_P+zk\cos i_P)-i\omega t},\\ \psi'&=B'e^{i(xk_S\sin i_S+zk_S\cos i_S)-i\omega t},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中

$$k_S=\frac{\omega}{\beta},$$

将 (2)、(3) 代入 (10) 再一起代入边界条件 (9) 式，经过简单的代数运算，可求得位移函数的反射系数

$$\left.\begin{aligned}F_{PP'}&=\frac{A'}{A}=\frac{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S-\alpha^2\cos^2 2i_S}{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S+\alpha^2\cos^2 2i_S},\\ F_{PV'}&=\frac{B'}{A}=\frac{-2\beta^2\sin 2i_P\cos 2i_S}{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S+\alpha^2\cos^2 2i_S}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

利用 $\boldsymbol{u}_P=\nabla\phi$、$\boldsymbol{u}_S=\nabla\times\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{i}_y\psi)$，则很容易由位移函数的反射系数 (14) 求得位移的反射系数. 事实上，这样求得的位移的反射系数

$$\left.\begin{aligned}f_{PP'}&=F_{PP'},\\ f_{PV'}&=\frac{\alpha}{\beta}F_{PV'}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

也可直接假定入射 P 波的位移为

$$S_P=ae^{i\frac{\omega}{\alpha}(x\sin i_P-z\cos i_P)-i\omega t}, \tag{16}$$

反射 P 波及反射 SV 波的位移为

$$\left.\begin{aligned}S_{P'}&=a'e^{i\frac{\omega}{\alpha}(x\sin i_P+z\cos i_P)-i\omega t},\\ S_{V'}&=b'e^{i\frac{\omega}{\beta}(x\sin i_S+z\cos i_S)-i\omega t},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

并注意定义 S_P、$S_{P'}$、$S_{V'}$ 的正向方向 (见图 5.1)，边界条件为 (8) 式，利用 § 5.1 (5) 化为

$$\left.\begin{aligned}&\mu\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\frac{\partial w}{\partial z}\right]\Big|_{z=0}\\ &=\mu\left[\frac{\alpha^2-2\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\frac{\partial w}{\partial z}\right]\Big|_{z=0}=0,\\ &\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{z=0}=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} u &= u_P + u_{P'} + u_{S'} = s_P \sin i_P + s_{P'} \sin i_P - s_{V'} \cos i_S, \\ w &= w_P + w_{P'} + w_{S'} = -s_P \cos i_P + s_{P'} \cos i_P + s_{V'} \sin i_S. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

将 (16)、(17) 代入 (19) 再一起代入 (18)，经过简单的代数运算后可得到

$$\left.\begin{aligned} f_{PP'} &= \frac{a'}{a} = \frac{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S - \alpha^2 \cos^2 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S} = F_{PP'}, \\ f_{PV'} &= \frac{b'}{a} = \frac{-2\alpha\beta \sin 2i_P \cos 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S} = \frac{\alpha}{\beta} F_{PV'}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

二、*SV* 波在自由界面的反射

令入射 *SV* 波位移函数为

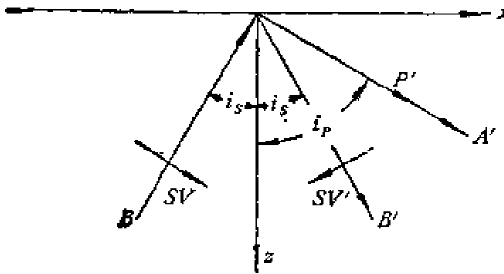


图 5.2

$$\phi = B e^{i\frac{\omega}{\beta}(x \sin i_S - z \cos i_S) - i\omega t}, \tag{21}$$

反射 *P*、*SV* 波为

$$\phi' = A' e^{i\frac{\omega}{\alpha}(x \sin i_P + z \cos i_P) - i\omega t}, \tag{22}$$

$$\psi' = B' e^{i\frac{\omega}{\beta}(x \sin i_S + z \cos i_S) - i\omega t}. \tag{23}$$

可以用与前面同样的方法得到反射 *P* 波和反射 *SV* 波的位移函数反射系数

$$\left.\begin{aligned} F_{VP'} &= \frac{A'}{B} = \frac{2\alpha^2 \sin 2i_S \cos 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S}, \\ F_{VV'} &= \frac{B'}{B} = \frac{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S - \alpha^2 \cos^2 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

与前面同法可得位移的反射系数

$$\left.\begin{aligned} f_{VP'} &= \frac{2\alpha\beta \sin 2i_S \cos 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S} = \frac{\beta}{\alpha} F_{VP'}, \\ f_{VV'} &= \frac{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S - \alpha^2 \cos^2 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S} = F_{VV'}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

三、*SH* 波在自由界面上的反射

前面已指出，*SH* 波入射到分界面上只有反射和折射的 *SH* 波出现，而不会产生反射和折射的 *P* 波和 *SV* 波. 因此对自由界面的情况，入射和反射的 *SH* 波位移为

$$\left.\begin{aligned} v &= B_H e^{i\frac{\omega}{\beta}(x \sin i_S - z \cos i_S) - i\omega t}, \\ v' &= B'_H e^{i\frac{\omega}{\beta}(x \sin i_S + z \cos i_S) - i\omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由边条件

$$\sigma_{yz}\big|_{z=0} = 0,$$

得

$$\left.\frac{\partial(v + v')}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \tag{27}$$

将 (26) 代入 (27) 化简后得 $B'_H = B_H$，即

$$f_{HH'} = 1. \tag{28}$$

四、自由界面上的位移，视出射角

地震测量得到的是地面实际位移，也就是自由界面上的位移．人射波射到自由界面后由于产生了反射波，因而自由界面上的位移并不等于人射波的位移，这是要十分注意的．对于 P 波我们称自由界面上的位移向量与界面法线之间的夹角 $\bar{i}$ 为 P 波的视人射角．称自由界面上的位移向量与地面之间的夹角 $\bar{e}$ 为 P 波的视出射角．当 P 波人射时有

$$\tan\bar{i}_P = \frac{u}{-w}\Bigg|_{z=0} = \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi'}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi'}{\partial z}}{-\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}+\dfrac{\partial\phi'}{\partial z}+\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}\right)}\Bigg|_{z=0}, \tag{29}$$

将 (2)、(4)、(5) 代人 (29) 并利用 (14) 式得

$$\tan\bar{i}_P = \tan 2i_S, \tag{30}$$

因此 $\bar{i}_P = 2i_S$，由地震记录可得到 P 波人射到地面后地面位移的北南、东西、垂直三个分量，将北南、东西分量取平方、求和再开方得到水平分量，而水平分量与垂直分量之比就是 $\tan\bar{i}_P$，求得 $\bar{i}_P$ 后取半为 i_S，由折射反射定律可得 i_P，即真人射角．即有

$$\sin i_P = \frac{\alpha}{\beta}\sin i_S = \frac{\alpha}{\beta}\sin\frac{\bar{i}_P}{2}, \tag{31}$$

或

$$\cos e_P = \frac{\alpha}{\beta}\cos\frac{90^\circ+\bar{e}_P}{2}. \tag{32}$$

(32) 式给出了当 P 波人射到自由界面时视出射角 $\bar{e}_P$ 与真出射角 e_P 之间的关系式．

同样当 SV 波人射时设视人射角为 $\bar{i}_S$，有

$$\cot\bar{i}_S = \frac{u}{w}\Bigg|_{z=0} = \frac{-\dfrac{\partial\psi}{\partial z}+\dfrac{\partial\phi'}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi'}{\partial z}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi'}{\partial z}+\dfrac{\partial\psi'}{\partial x}}\Bigg|_{z=0}, \tag{33}$$

将 (21)、(22)、(23) 代人 (33) 式并利用 (24) 式得

$$\cot\bar{i}_S = \frac{2\cot i_P}{\cot^2 i_S - 1}. \tag{34}$$

当 SH 波人射到自由界面时，由于 $B' = B$，显然自由界面的位移为人射 SH 波位移的两倍．

地震仪记录到的是地动位移，它是人射波与在地面上的反射波的位移叠加．按照前面的结果，很容易求出例如 P 波人射时的地动位移振幅与人射波位移的振幅之比 $\frac{u_{P地}}{u_{P人}}$. 其中

$$u_{P地} = \left|\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi'}{\partial x}-\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\phi'}{\partial z}+\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right|,$$

$$u_{P人} = |\nabla\phi|.$$

对 P 波和 S 波，当人射角从零变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，这个振幅比从 2 减为零．也就是垂直人射时为 2，水平掠人射时为零．因此当有两个位移振幅相同的 P 波人射到地面，一个人射角接近

于零，另一个入射角接近于 $\frac{\pi}{2}$ 即接近于水平入射时，则在地震记录图上前者的振幅要比后者大得多．对 SH 波这种振幅比保持为 2，而与入射角的大小无关．

五、全反射

当入射波是 SV 波时，由折射反射定律有

$$\sin i_P = \frac{\alpha}{\beta} \sin i_S,$$

由于 $\alpha > \beta$，因此反射 P 波的反射角 i_P 大于入射 SV 波的入射角 i_S，当入射角 i_S 满足

$$i_S = \sin^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$$

时，反射 P 波的反射角为 $\frac{\pi}{2}$，即 $90°$ 角．

当 $i_S > \sin^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$ 时，

$$\sin i_P = \frac{\alpha}{\beta} \sin i_S > \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

由有关复数的知识知这时 i_P 必为复数，且有

$$i_P = \frac{\pi}{2} - i\gamma, \quad \gamma > 0,$$

这里的 i_P 就是 (22) 式中的 i_P，将 i_P 值代入反射 P 波位移函数的表达式 (22) 中，得

$$\sin i_P = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\gamma\right) = \operatorname{ch} \gamma,$$

$$\cos i_P = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\gamma\right) = i \operatorname{sh} \gamma,$$

$$\varphi' = A' e^{-\left(\frac{\omega}{\alpha} \operatorname{sh} \gamma\right) z} e^{i\left(x \frac{\omega}{\alpha} \operatorname{ch} \gamma - \omega t\right)}. \tag{35}$$

易见这时反射 P 波为不均匀波，它的振幅随 z 的增大而按指数衰减，此不均匀波是沿 x 轴也就是沿界面传播的，传播的相速度为 $\alpha / \operatorname{ch} \gamma$．将 $i_P = \frac{\pi}{2} - i\gamma$ 代入 $f_{VV'}$ 的表达式 (25) 得到

$$f_{VV'} = \frac{-a + ib}{a + ib}, \tag{36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha^2 \cos^2 2i_S, \\ b &= \beta^2 \operatorname{sh} 2\gamma \sin 2i_S. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

由 (36) 得 $|f_{VV'}| = 1$，即反射系数是复数，其模为 1，也就是反射 SV 波与入射 SV 波振幅相同，两者之间有一个相位差，我们称之为类全反射．对地球介质，一般可认为 $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3}$，这时 SV 波在自由界面全反射的临界角约为 35.2°．

六、偏振交换

如果令 (14) 中的第一式或 (24) 式中的第二式的分子等于零，即

$$\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S - \alpha^2 \cos^2 2i_S = 0, \tag{38}$$

得

$$F_{PP'} = F_{VV'} = 0$$

或

$$f_{PV'} = f_{VV'} = 0,$$

(38) 式中 i_P 与 i_S 是由史内尔定律相联系的．也就是说，我们可能找到满足方程

$$\frac{\sin i_P}{\alpha} = \frac{\sin i_S}{\beta} \tag{39}$$

的入射角 i_P 或 i_S，当 P 波以 i_P 角入射到自由界面时被全部转变为反射 SV 波，而不产生反射 P 波，当 SV 波以 i_S 角入射时，在自由表面全部转变为反射 P 波，而不产生反射 SV 波，这称为偏振交换．为解方程 (38)，可利用视速度 c 来求解，即有

$$c = \frac{\alpha}{\sin i_P} = \frac{\beta}{\sin i_S}, \tag{40}$$

见图 5.3，当平面波由 AB 位置传播到 $A'B'$ 位置时，如传播时间为 t 秒，则 $BA' = \alpha t$，而

$$AA' = ct = \frac{\alpha}{\sin i_P} t,$$

因此 c 为波阵面与自由表面的交线沿 x 轴方向传播的速度．也就是在地面上所观察到的波的传播速度，因此称为视速度．将(40)代入(38)，消去 i_P 和 i_S 可得视速度 c 的方程

$$4\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1}\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} - \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^2 = 0. \tag{41}$$

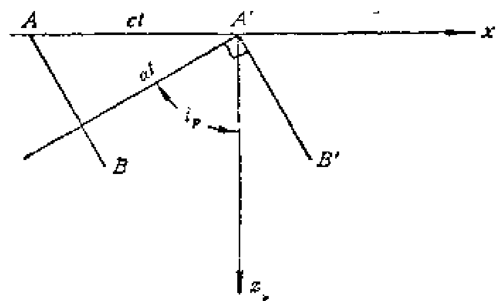


图 5.3

因为 $c > \alpha > \beta$，所以根式都是实值．再令

$$A = \frac{c^2}{\beta^2}, \quad B = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \tag{42}$$

则 (41) 化成

$$4\sqrt{AB - 1}\sqrt{A - 1} = (2 - A)^2,$$

或

$$B = \frac{A^3 - 8A^2 + 24A - 16}{16(A - 1)}. \tag{43}$$

(43) 式为 A 的三次方程，方程的根依赖于常数 B，而

$$B = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \tag{44}$$

这里 ν 是介质的泊松比．B 和 A 的关系曲线见图 5.4，方程的根是水平线 B = 常数和曲线的交点，由于 $A > 1$，所以只有曲线的右支才和原方程相应，曲线的左支是由于 (41) 到 (43) 的有理化过程中引入的．当 $\alpha < 1.74\beta$ 或 $B > 0.3314$ 时，方程有两个实根．对

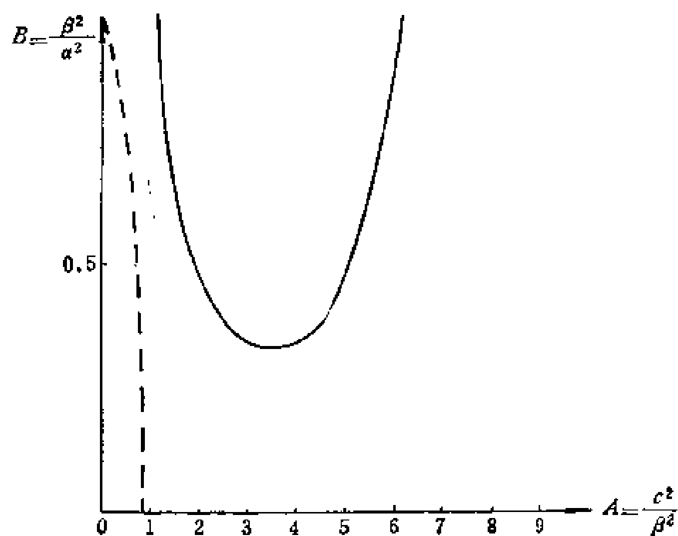


图 5.4

于泊松固体 $\lambda=\mu$，即 $\nu=0.25$，或 $\alpha=\sqrt{3}\beta$，可得

$$A=4,\quad 2+\frac{2}{\sqrt{3}},\tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{与此相应的 } P \text{ 波入射角} && i_P=60^\circ,\ 77^\circ13',\\ &\text{与此相应的 } SV \text{ 波入射角} && i_S=30^\circ,\ 34^\circ16'.\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

图 5.5 给出了不同的泊松比情况下在自由表面发生偏振交换时的入射角，以及 SV 波发生全反射的临界角 i_{SF}[3]。

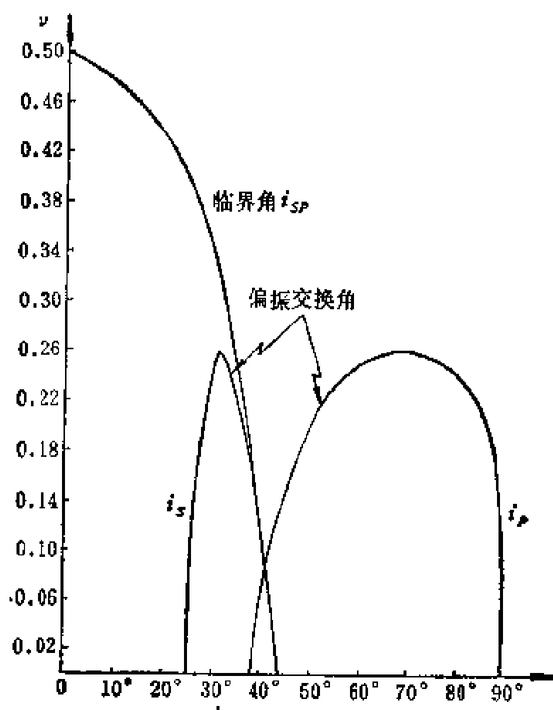


图 5.5

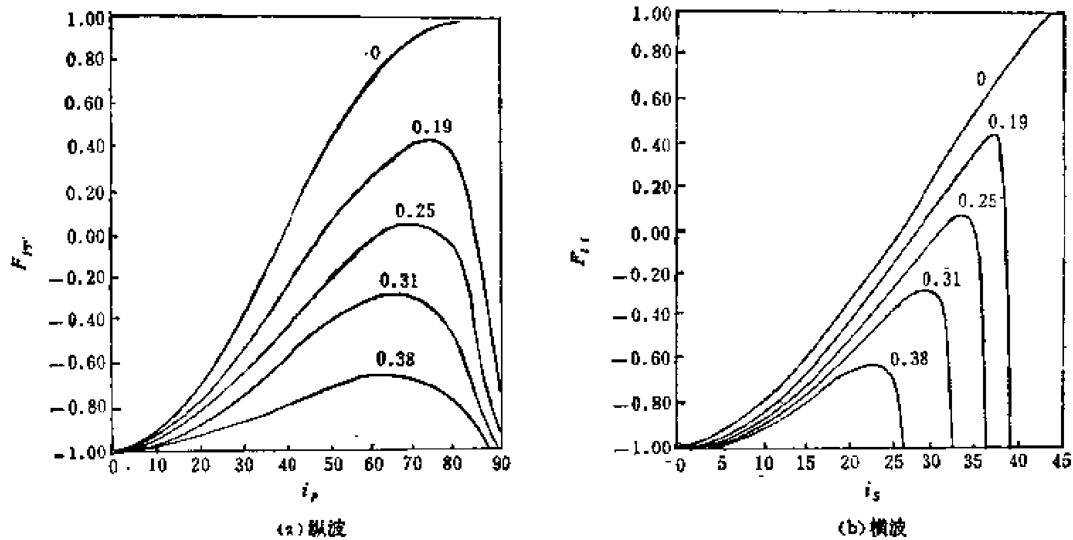


图 5.6 体波在固体的自由界面上的反射系数(位移函数振幅比)随入射角的变化.
曲线旁的数字为泊松比

图 5.6a 给出了不同的泊松比情况下，P 波的位移势在自由表面的反射系数 $F_{PP'}$[3]，自变量取入射角 i_P.

图 5.6b 给出了不同的泊松比的情况下，SV 波的位移势在自由界面的反射系数 $F_{VV'}$[3]，自变量取为入射角 i_S.

图 5.6 中反射系数为零处即为偏振交换的情况. 图 5.6[b]中 $F_{VV'}$ 为 -1 处即为发生了类全反射的情况. 另外我们注意到 i_P 或 i_S 为零时反射系数 $F_{PP'}=F_{VV'}=-1$，即垂直入射到自由界面时也产生全反射，不产生波的转换. 这时 P 波入射不能产生反射的 SV 波，SV 波入射角不能产生 P 波.

七、能 量 分 配

入射波的能量将分配到反射波上，按照能量守恒定律，入射到自由界面的能量应当等于从自由界面射出的反射波的能量. 设入射波为 P 波，则单位时间内流过与波传播方向相垂直的单位截面上的平均能量，即平均能流密度

$$W_P = \frac{1}{2}\alpha\rho\omega^2 u_0^2, \tag{47}$$

其中 u_0 为波的位移振幅，ω 为频率，ρ 为介质密度，α 为 P 波波速.

在入射波中截取横截面积为 a 的波束(图 5.7)，则波束内每秒流向自由界面的入射 P 波平均能量为 $W_P\cdot a$，同样反射 P 波和 SV 波平均能流密度为

$$\left.\begin{aligned} W_{P'} &= \frac{1}{2}\alpha\rho\omega^2 u_0^2 f_{PP'}^2, \\ W_{V'} &= \frac{1}{2}\beta\rho\omega^2 u_0^2 f_{PV'}^2. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

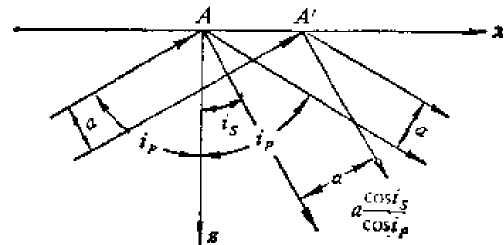


图 5.7

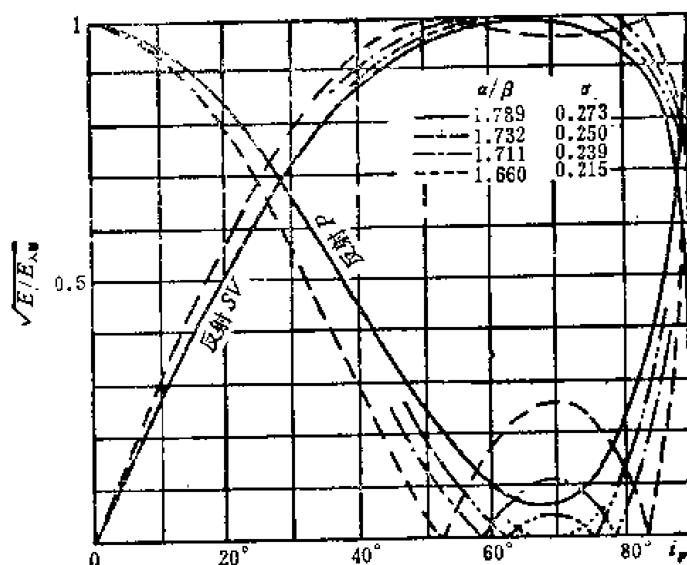
横截面积为 a 的波束射到自由界面上 AA' 段，每秒由 AA' 上流出的反射 P 波平均能

量应为 $W_{P'}a$，反射 SV 波波束截面积为 $\frac{a}{\cos i_P}\cos i_S$，因此每秒从 AA' 上流出的反射 SV 波平均能量为 $W_{V'}\frac{a}{\cos i_P}\cos i_S$，由能量守恒，应有

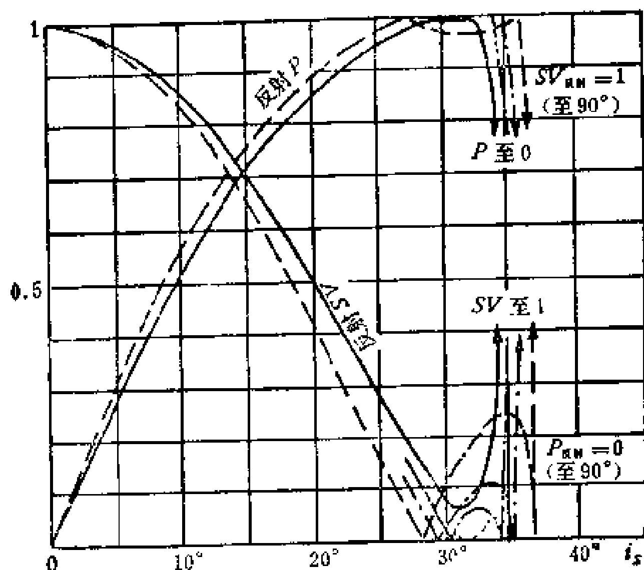
$$W_P a = W_{P'}a + W_{V'}\frac{a}{\cos i_P}\cos i_S, \tag{49}$$

将(47)、(48)代入(49)，化简后得

$$1 = f_{PP'}^2 + \frac{\beta\cos i_S}{\alpha\cos i_P}f_{PV'}^2 = f_{PP'}^2 + \frac{\sin 2i_S}{\sin 2i_P}f_{PV'}^2, \tag{50}$$



(a) P 波入射



(b) SV 波入射，α/β、σ 值同(a)

图　5.8[46]

而对于位移势的反射系数应有

$$1=F_{PP'}^2+F_{PV'}^2\frac{\tan i_P}{\tan i_S},\tag{51}$$

同样对 SV 波入射有

$$1=f_{VV'}^2+\frac{\alpha\cos i_P}{\beta\cos i_S}f_{VP'}^2=f_{VV'}^2+\frac{\sin 2i_P}{\sin 2i_S}f_{VP'}^2,\tag{52}$$

或

$$1=F_{VV'}^2+\frac{\tan i_S}{\tan i_P}F_{VP'}^2.\tag{53}$$

图 5.8(a) 给出了 P 波入射时，反射波能量与入射能量之比的平方根与入射角之间的关系.

图 5.8(b) 给出了 SV 波入射时的情况.

上面对平面波入射到自由界面的情况作了比较详细的讨论. 因为它对于地震研究具有重要的实际意义. 另一方面也介绍了解决这一类问题的方法. 这样就便于进一步讨论平面波入射到两种不同介质的分界面例如固体与固体，固体与液体的分界面的情况.

§5.3 平面波在分界面上的反射和折射

地球内部是成层结构的地震波在层与层之间的分界面将会产生反射和折射. 在海洋水层与洋底介质之间的分界面上也会产生反射和折射. P 波，SV 波和 SH 波在这些分界面上反射系数和折射系数的讨论与 §5.2 中所用的方法完全相似.

一、P 波和 SV 波入射时的反射和折射

我们讨论 P 波和 SV 波同时以 i_P 和 i_S 角入射到分界面上时产生的反射和折射. 而 i_P 和 i_S 角之间服从史内尔定律，即 §5.2 (39) 式. 这样讨论的目的是为了便于讨论 P 波和 SV 波单独入射时的情况.

一种介质中的波传到分界面上时，由于分界面上的运动必然会引起分界面另一面介质中产生波的扰动，即产生折射波. 设下介质中有入射 P 波和入射 SV 波，其位移函数分别为：

$$\left.\begin{aligned}\phi&=Pe^{i(\xi x-\zeta_P z)-i\omega t},\\ \psi&=Ve^{i(\xi x-\zeta_S z)-i\omega t}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

两者的入射角分别为 i_P 和 i_S，则有

$$\left.\begin{aligned}\xi&=k_P\sin i_P=\frac{\omega}{\alpha}\sin i_P=k_S\sin i_S=\frac{\omega}{\beta}\sin i_S,\\ \zeta_P&=k_P\cos i_P,\\ \zeta_S&=k_S\cos i_S.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

每一种波应该分别激发反射 P 波和 SV 波和折射的 P 波和 SV 波，但是入射波在 x 方向的视速度 $c=\frac{\omega}{\xi}$ 是一致的，因而它们所激发的反射和折射的波在 x 方向的视速度是一致的. 这样所激发的同类型波就两两归并，最后留下四个波. 设反射 P、SV 波的反射角

为 $i_{P'}$、$i_{S'}$. 折射的 P、SV 波的折射角为 $\bar{i}_P$、$\bar{i}_S$. 由史内尔定律有

$$c = \frac{\alpha}{\sin i_P} = \frac{\beta}{\sin i_S} = \frac{\alpha}{\sin i'_P} = \frac{\beta}{\sin i'_S} = \frac{\bar{\alpha}}{\sin \bar{i}_P} = \frac{\bar{\beta}}{\sin \bar{i}_P}, \tag{3}$$

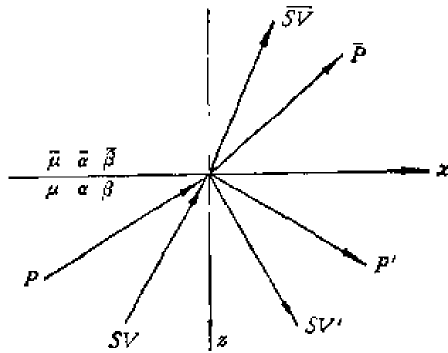


图 5.9

因此

$$i'_P = i_P, \quad i'_S = i_S, \tag{4}$$

下介质中 P、SV 波场的总位移函数分别为

$$\phi = Pe^{i(\xi x - \zeta_P z) - i\omega t} + P'e^{i(\xi x + \zeta_P z) - i\omega t}, \tag{5}$$

$$\psi = Ve^{i(\xi x - \zeta_S z) - i\omega t} + V'e^{i(\xi x + \zeta_S z) - i\omega t}. \tag{6}$$

上介质中只有折射的 P、SV 波场，其位移函数为

$$\bar{\phi} = \bar{P}e^{i(\xi x - \bar{\zeta}_P z) - i\omega t}, \tag{7}$$

$$\bar{\psi} = \bar{V}e^{i(\xi x - \bar{\zeta}_S z) - i\omega t}, \tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \zeta_P^2 &= k_P^2 = \frac{\omega^2}{\alpha^2}, \\ \xi^2 + \zeta_S^2 &= k_S^2 = \frac{\omega^2}{\beta^2}, \\ \xi^2 + \bar{\zeta}_P^2 &= \bar{k}_P^2 = \frac{\omega^2}{\bar{\alpha}^2}, \\ \xi^2 + \bar{\zeta}_S^2 &= \bar{k}_S^2 = \frac{\omega^2}{\bar{\beta}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

只要 (9) 式得到满足，则 (5)、(6)、(7)、(8) 式分别满足形式为 § 4.2 (15, 16) 的波动方程. 将 (5)、(6)、(7)、(8) 代入边界条件

$$\left.\begin{aligned} u &= \bar{u}, \\ w &= \bar{w}, \\ \sigma_{zz} &= \bar{\sigma}_{zz}, \\ \sigma_{zx} &= \bar{\sigma}_{zx}. \end{aligned}\right\} z = 0 \tag{10}$$

(10) 中的 u、w、σ_{zz}、σ_{zx} 由 § 5.1 (4, 5) 给出. 化简后可得到各波波幅 P、V、P'、V'、$\bar{P}$、$\bar{V}$ 所满足的条件

$$\left.\begin{aligned} &\xi P' - \zeta_S V' - \zeta \bar{P} - \bar{\zeta}_S \bar{V} = -\xi P - \zeta_S V, \\ &-\zeta_P P' - \xi V' - \bar{\zeta}_P \bar{P} + \xi \bar{V} = -\zeta_P P + \xi V, \\ &\mu\eta^2 P' - 2\mu\xi\zeta_S V' - \bar{\mu}\bar{\eta}^2 \bar{P} - 2\bar{\mu}\xi\bar{\zeta}_S \bar{V} = -\mu\eta^2 P - 2\mu\xi\zeta_S V, \\ &-2\mu\xi\zeta_P P' - \mu\eta^2 V' - 2\bar{\mu}\xi\bar{\zeta}_P \bar{P} - \bar{\mu}\bar{\eta}^2 \bar{V} = -2\mu\xi\zeta_P P + \mu\eta^2 V, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中

$$\eta^2 = \xi^2 - \zeta_S^2, \quad \bar{\eta}^2 = \xi^2 - \bar{\zeta}_S^2. \tag{12}$$

如果 P 波单独入射，则 $V = 0$，就可以从 (11) 式解出相应的反射、折射系数

$$\left.\begin{aligned} F_{PP'} &= \frac{P'}{P} = \frac{\Delta_{PP'}}{\Delta}, \quad F_{PV'} = \frac{V'}{P} = \frac{\Delta_{PV'}}{\Delta}, \\ F_{P\bar{P}} &= \frac{\bar{P}}{P} = \frac{\Delta_{P\bar{P}}}{\Delta}, \quad F_{P\bar{V}} = \frac{\bar{V}}{P} = \frac{\Delta_{P\bar{V}}}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

如果 SV 波单独入射，则 $P=0$，同样可从 (11) 解出相应的反射、折射系数：

$$\left.\begin{aligned} F_{VP'} &= \frac{P'}{V} = \frac{\Delta_{VP'}}{\Delta}, \quad F_{VV'} = \frac{V'}{V} = \frac{\Delta_{VV'}}{\Delta}, \\ F_{V\bar{P}} &= \frac{\bar{P}}{V} = \frac{\Delta_{V\bar{P}}}{\Delta}, \quad F_{V\bar{V}} = \frac{\bar{V}}{V} = \frac{\Delta_{V\bar{V}}}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(13)、(14) 中

$$\begin{aligned} \Delta = &(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)^2\xi^2 + 4(\mu - \bar{\mu})^2\xi^2\zeta_P\zeta_S\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S + (2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)^2\zeta_P\zeta_S \\ &+ (\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)^2\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S + \mu\bar{\mu}k_S^2\bar{k}_S^2(\zeta_P\bar{\zeta}_S + \bar{\zeta}_P\zeta_S), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{PP'} = &-(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)^2\xi^2 + 4(\mu - \bar{\mu})^2\xi^2\zeta_P\zeta_S\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S + (2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)^2\zeta_P\zeta_S \\ &-(\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)^2\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S + \mu\bar{\mu}k_S^2\bar{k}_S^2(\zeta_P\bar{\zeta}_S - \bar{\zeta}_P\zeta_S), \\ \Delta_{PV'} = &-4(\mu - \bar{\mu})(\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)\xi\zeta_P\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S \\ &-2(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)(2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)\xi\zeta_P, \\ \Delta_{P\bar{P}} = &\ 2\mu k_S^2(2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)\zeta_P\zeta_S - 2\mu k_S^2(\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)\zeta_P\bar{\zeta}_S, \\ \Delta_{P\bar{V}} = &-4\mu(\mu - \bar{\mu})k_S^2\xi\zeta_P\bar{\zeta}_P\zeta_S - 2\mu(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)k_S^2\xi\zeta_P, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{VP'} = &-4(\mu - \bar{\mu})(\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)\xi\bar{\zeta}_P\zeta_S\bar{\zeta}_S \\ &-2(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)(2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)\xi\zeta_S, \\ \Delta_{VV'} = &-(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)^2\xi^2 + 4(\mu - \bar{\mu})^2\xi^2\zeta_P\zeta_S\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S \\ &+ (2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)^2\zeta_P\zeta_S - (\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)\bar{\zeta}_P\bar{\zeta}_S \\ &+ \mu\bar{\mu}k_S^2\bar{k}_S^2(\bar{\zeta}_P\zeta_S - \zeta_P\bar{\zeta}_S), \\ \Delta_{V\bar{P}} = &-4\mu(\mu - \bar{\mu})k_S^2\xi\zeta_P\zeta_S\bar{\zeta}_S - 2\mu(\mu\eta^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)k_S^2\xi\zeta_S, \\ \Delta_{V\bar{V}} = &\ 2\mu(2\mu\xi^2 - \bar{\mu}\bar{\eta}^2)k_S^2\zeta_P\zeta_S - 2\mu(\mu\eta^2 - 2\bar{\mu}\xi^2)k_S^2\bar{\zeta}_P\zeta_S. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

下面对这些结果给以讨论：

1. (13)、(14) 中的全部反射、折射系数都可以利用 (9)、(12) 式化成 ξ 的函数，或利用(2) 式化成入射角 i_P 或 i_S 的函数；

2. 注意到反、折射系数的分子和分母都是 ω 的 6 次方项之和，因此可消去 ω，即反、折射系数与 ω 无关；

3. 当 i_P 或 i_S 等于零时，由 (2) 知 $\xi=0$，于是 $F_{PV'}=F_{P\bar{V}}=F_{VP'}=F_{V\bar{P}}=0$，即当波垂直入射到分界面时，只能产生同类型的反、折射波；

4. 当 $\beta<\bar{\beta}<\alpha<\bar{\alpha}$ 时，由史内尔定律

$$\sin\bar{i}_S = \frac{\bar{\beta}}{\beta}\sin i_S, \tag{18}$$

当 SV 波入射且入射角 $i_S > \sin^{-1}\dfrac{\beta}{\bar{\beta}}$ 时，由 (18) 知 $\sin\bar{i}_S>1$，因此 $\bar{i}_S$ 为复数. 同时由于

$$\sin i_P = \frac{\alpha}{\beta}\sin i_S > \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta}{\bar{\beta}} > 1,$$

因此 $\bar{i}_P$ 也为复数，同样 i_P 也为复数，且由 § 5.2 一五中的讨论知，它们的实数部分都是 $\dfrac{\pi}{2}$，这时折射 P、SV 波、反射 P 波都是沿 x 方向传播的不均匀波，波幅随着离开界面的距离增加而按指数衰减，而反射 SV 波的反射系数的模为 1，这时类似于自由界面中的情况，发生了全反射. 至于其他情况，可能只产生一种或两种不均匀波，可以按同样的原理

讨论.

5.(13)、(14)式给出的是位移函数的反射、折射系数，由此很容易求出位移的反射和折射系数. 由 $\boldsymbol{u}_P = \nabla\phi$、$\boldsymbol{u}_S = \nabla \times \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{i}_y\phi)$，可得对于 P 波其位移 $u_P = ik_P\phi$，对 SV 波有 $u_S = ik_S\phi$，因此如需求出按位移波幅比定义的反、折射系数，只要对(13)、(14)式分子和分母乘以相应的波数即可. 例如当 P 波入射，求折射 SV 波的位移的折射系数，则

$$f_{P\bar{V}} = \frac{\bar{k}_S\bar{\phi}}{k_P\phi} = \frac{\bar{k}_S}{k_P}F_{P\bar{V}} = \frac{\alpha}{\bar{\beta}}F_{P\bar{V}}.$$

二、SH 波入射

设入射 SH 波的位移为

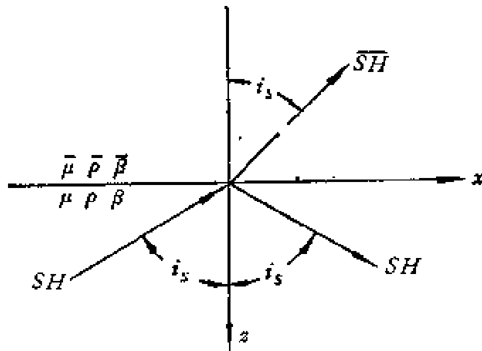


图 5.10

$$S = He^{i\frac{\omega}{\beta}(x\sin i_S - z\cos i_S) - i\omega t}, \tag{19}$$

反射、折射 SH 波位移分别为

$$S' = H'e^{i\frac{\omega}{\beta}(x\sin i_S + z\cos i_S) - i\omega t}, \tag{20}$$

$$\bar{S} = \bar{H}e^{i\frac{\omega}{\bar{\beta}}(x\sin \bar{i}_S - z\cos \bar{i}_S) - i\omega t}. \tag{21}$$

由折射、反射定律有

$$\frac{\sin i_S}{\beta} = \frac{\sin \bar{i}_S}{\bar{\beta}}, \tag{22}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{zy} &= \bar{\sigma}_{zy}, \\ V &= \bar{V}, \end{aligned}\right\} z = 0 \tag{23}$$

其中

$$V = S + S', \quad \bar{V} = \bar{S}, \tag{24}$$

$$\sigma_{zy} = \mu\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \bar{\sigma}_{zy} = \bar{\mu}\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}. \tag{25}$$

将(19)、(20)、(21)代入(24)、(25)后再一起代入(23)，与前面同样方法，经过代数运算后可得 SH 波的位移反、折射系数分别为

$$\left.\begin{aligned} f_{HH'} &= \frac{\rho\beta\cos i_S - \bar{\rho}\bar{\beta}\cos\bar{i}_S}{\rho\beta\cos i_S + \bar{\rho}\bar{\beta}\cos\bar{i}_S}, \\ f_{H\bar{H}} &= \frac{2\rho\beta\cos i_S}{\rho\beta\cos i_S + \bar{\rho}\bar{\beta}\cos\bar{i}_S} = 1 + f_{HH'}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

如用折射率 $n = \frac{\beta}{\bar{\beta}}$ 和剪切模量比 $m = \frac{\mu}{\bar{\mu}}$ 表示，则

$$\left.\begin{aligned} f_{HH'} &= \frac{m\cos i_S - \sqrt{n^2 - \sin^2 i_S}}{m\cos i_S + \sqrt{n^2 - \sin^2 i_S}}, \\ f_{H\bar{H}} &= \frac{2m\cos i_S}{m\cos i_S + \sqrt{n^2 - \sin^2 i_S}} = 1 + f_{HH'}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

如用类似(13)到(17)中所用的符号，则

$$f_{HH'}=\frac{\mu\zeta_S-\bar{\mu}\bar{\zeta}_S}{\mu\zeta_S+\bar{\mu}\bar{\zeta}_S},$$

$$f_{HB}=\frac{2\mu\zeta_S}{\mu\zeta_S+\bar{\mu}\bar{\zeta}_S}=1+f_{HH'},\tag{28}$$

当入射角 i_S 满足

$$\rho\beta\cos i_S-\bar{\rho}\bar{\beta}\cos\bar{i}_S=0$$

时，$f_{HH'}=0$，发生全透射.

当 $n=\dfrac{\beta}{\bar{\beta}}<1$ 而 $\sin i_S>n$ 时，$f_{HH'}$ 为复数，$|f_{HH'}|=1$，发生全反射，折射的 SH 波变为不均匀波，这里不再详细讨论.

§5.4 多层弹性半空间中的平面波

设地面下为多层的平行成层介质，并设有平面纵波或横波入射到此成层介质层上、下面来求此介质层对入射波的响应，即求地表的运动、地下任意深度处的位移场、以及求反射波. 本节中将把位移场表达成汉森 (Hanson) 向量[47,48]的展开并用哈斯克尔 (Haskell) 矩阵法来求解[49,50,4].

这个方法的核心在于求出地动位移、z 向平面上的应力共六个分量与上行波、下行波波振幅(也是六个分量)之间的关系，并把这种关系用矩阵的方法来表达，从而可以求出相邻界面上的地动位移以及 z 向平面上的应力之间的关系，这个关系可用一个矩阵来表达，从而使多层介质问题变成了层矩阵间的相乘.

一、将位移场表达成汉森向量的叠加形式

设在半无穷介质上有多层平行介质层，如图 5.11 所示，由于考虑平面波的情况，所以仍引入直角坐标系，使波在 xoz 平面内传播，z 轴垂直于地面向下，$z=0$ 平面取在自由表面上，介质层由地表向下依次编号，自由界面为 $z=z_0=0$，$z=z_1$ 为第一层与第二层之间的分界面，$z=z_{n-1}$ 为第 $n-1$ 层与第 n 层之间的分界面，第 n 层为半无穷弹性介质.

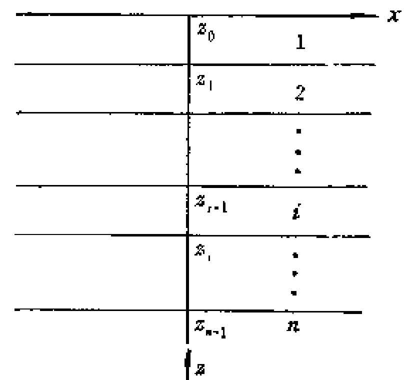


图 5.11

第 i 层中的介质质点的位移 $\boldsymbol{u}_i$ 应满足运动方程

$$(\lambda_i+\mu_i)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_i)+\mu_i\nabla^2\boldsymbol{u}_i=\rho_i\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_i}{\partial t^2}\tag{1}$$

对 $\boldsymbol{u}_i$ 作频谱展开，其复位移谱为 $\boldsymbol{U}_i$，即有

$$\boldsymbol{u}_i=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{U}_ie^{i\omega t}d\omega,\tag{2}$$

由(1)、(2)可知位移谱 $\boldsymbol{U}_i$ 应满足方程

$$(\lambda_i+\mu_i)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{U}_i)+\mu_i\nabla^2\boldsymbol{U}_i=-\rho\omega^2\boldsymbol{U}_i\tag{3}$$

或可写成

$$(\lambda_i+2\mu_i)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{U}_i)-\mu_i\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{U}_i=-\rho\omega^2\boldsymbol{U}_i\tag{4}$$

以下讨论均在第 i 层中进行，为简化符号暂省去角标 i.

由前面所述，可将位移谱 $\boldsymbol{U}$ 分成纵波位移谱 $\boldsymbol{U}_l$ 和横波位移谱 $\boldsymbol{U}_t$ 两部分，对纵波有 $\nabla\times\boldsymbol{U}_l=0$，对横波有 $\nabla\cdot\boldsymbol{U}_t=0$. 令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_l$，因为是纵波，所以有 $\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{U}_l=\nabla^2\boldsymbol{U}_l$，如令

$$k_\alpha=\frac{\omega}{\alpha},\quad k_\beta=\frac{\omega}{\beta},$$

其中

$$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad \beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

分别为纵、横波速，则 (4) 式可化为

$$\nabla^2\boldsymbol{U}_l+k_\alpha^2\boldsymbol{U}_l=0 \tag{5}$$

对横波 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_t$，因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{U}_t=0$，由 (3) 式可得到

$$\nabla^2\boldsymbol{U}_t+k_\beta^2\boldsymbol{U}_t=0 \tag{6}$$

由 (5)、(6) 式可见纵波位移谱 $\boldsymbol{U}_l$ 及横波位移谱 $\boldsymbol{U}_t$，均满足向量赫姆霍兹方程. 而现在所取的坐标系是直角坐标系，且 z 轴垂直于分界面. 因此根据附录二中所作的讨论，可以把位移谱表达成附录二中所给出的汉森向量的形式. 即我们可引入标量势 ϕ 和 ψ，只要它们分别满足赫姆霍兹方程

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\phi+k_\alpha^2\phi=0\\&\nabla^2\psi+k_\beta^2\psi=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

那末

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_l=\nabla\phi\\&\boldsymbol{U}_t=c_1\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_z)+c_2\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_z)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

分别是方程 (5) 和 (6) 的解.

在直角坐标系中标量赫姆霍兹方程 (7) 的通解形式可取为

$$\left.\begin{aligned}&\phi=e^{-ikx\pm az},\\&\psi=e^{-ikx\pm bz},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&a=\begin{cases}\sqrt{k^2-k_\alpha^2} & \text{当 } k>k_\alpha,\\ i\sqrt{k_\alpha^2-k^2} & \text{当 } k<k_\alpha,\end{cases}\\&b=\begin{cases}\sqrt{k^2-k_\beta^2} & \text{当 } k>k_\beta,\\ i\sqrt{k_\beta^2-k^2} & \text{当 } k<k_\beta,\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(9) 式中 $+az$、$+bz$ 对应向着自由表面方向传播的上行波，$-az$、$-bz$ 对应离开自由表面方向传播的下行波.

由于现在讨论的是平面波，且沿 xoz 平面传播，因此有 $\frac{\partial}{\partial y}$ 为零，由此得

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,\\&\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_z)=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_z,\\&\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_z)=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{e}_y.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

引入汉森向量 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$，它们定义为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L}^{\pm} &= \frac{1}{k_\alpha}\nabla\phi, \\ \boldsymbol{N}^{\pm} &= \frac{1}{k_\beta k}\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_z), \\ \boldsymbol{M}^{\pm} &= \frac{i}{k}\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_z). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

这里引入 k、k_β 是为了使 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 都化成无量纲的量；引入 i 是为了使后面得到的式子形式齐整，便于计算．将 ϕ、ψ 的通解形式 (9) 代入 (11) 式后，再一起代入 (12) 式得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L}^{\pm} &= \frac{1}{k_\alpha}(-ik\boldsymbol{e}_x \pm a\boldsymbol{e}_z)e^{-ikx\pm az}, \\ \boldsymbol{N}^{\pm} &= \frac{1}{k_\beta}(+ib\boldsymbol{e}_x + k\boldsymbol{e}_z)e^{-ikx\pm bz}, \\ \boldsymbol{M}^{\pm} &= -\boldsymbol{e}_y e^{-ikx\pm bz}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{L}^+$、$\boldsymbol{N}^+$、$\boldsymbol{M}^+$ 对应 $+az$ 或 $+bz$，而 $\boldsymbol{L}^-$、$\boldsymbol{N}^-$、$\boldsymbol{M}^-$ 对应 $-az$ 或 $-bz$．

再引入向量 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{C}$，它们分别沿着三个坐标轴 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_z$、$\boldsymbol{e}_y$，即有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= -ie^{-ikx}\boldsymbol{e}_x, \\ \boldsymbol{P} &= e^{-ikx}\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{C} &= -e^{-ikx}\boldsymbol{e}_y, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

那末可得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L}^{\pm} &= \frac{1}{k_\alpha}(k\boldsymbol{B} \pm a\boldsymbol{P})e^{\pm az}, \\ \boldsymbol{N}^{\pm} &= \frac{1}{k_\beta}(\pm b\boldsymbol{B} + k\boldsymbol{P})e^{\pm bz}, \\ \boldsymbol{M}^{\pm} &= \boldsymbol{C}e^{\pm bz}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{L}^+$ 对应上行纵波，$\boldsymbol{L}^-$ 对应下行纵波；$\boldsymbol{M}^{\pm}$ 为上、下行横波，且其位移方向平行 z 坐标面、即平行于成层介质的分界面，事实上它还垂直于入射面 xoz，它称为 SH 波；$\boldsymbol{N}^{\pm}$ 为上、下行横波的另一解，由 (13) 式可见 $\boldsymbol{N}^{\pm}$ 与 $\boldsymbol{M}^{\pm}$ 互相垂直，$\boldsymbol{N}^{\pm}$ 的位移方向就在入射面内，它称为 SV 波．因此 $\boldsymbol{L}^{\pm}$，$\boldsymbol{N}^{\pm}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\pm}$ 的物理意义是它们分别代表纵波、SV 横波和 SH 横波．在 $\boldsymbol{L}^{\pm}$、$\boldsymbol{N}^{\pm}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\pm}$ 的定义 (12) 式中引入的系数 $\frac{1}{k_\alpha}$，$\frac{1}{k_\beta k}$ 和 $\frac{1}{k}$ 是为了把它们表达为单位向量，而在 $\boldsymbol{M}^{\pm}$ 的定义中引入的 i 是为了将来化成层矩阵时形式比较齐整，运算方便[4]．

实际的位移谱应是 $\boldsymbol{L}^{\pm}$、$\boldsymbol{N}^{\pm}$、$\boldsymbol{M}^{\pm}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{U} = (a^+\boldsymbol{L}^+ + a^-\boldsymbol{L}^-) + (b^+\boldsymbol{N}^+ + b^-\boldsymbol{N}^-) + (c^+\boldsymbol{M}^+ + c^-\boldsymbol{M}^-), \tag{16}$$

其中 a^+、a^- 为上、下行纵波的振幅谱，b^+、b^- 为上、下行 SV 波的振幅谱，c^+、c^- 为上、下行 SH 波的振幅谱．

若将 $\boldsymbol{U}$ 沿 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{C}$ 方向分解，可利用 $\boldsymbol{L}^{\pm}$、$\boldsymbol{N}^{\pm}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\pm}$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{C}$ 之间的关系 (15) 式得

$$\boldsymbol{U}=\left(\frac{k}{k_\alpha}f_1+\frac{1}{k_\beta}f_2'\right)\boldsymbol{B}+\left(\frac{1}{k_\alpha}f_1'+\frac{k}{k_\beta}f_2\right)\boldsymbol{P}+f_3\boldsymbol{C}, \tag{17}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
f_1&=a^+e^{az}+a^-e^{-az},\\
f_2&=b^+e^{bz}+b^-e^{-bz},\\
f_3&=c^+e^{bz}+c^-e^{-bz},\\
f_1'&=\frac{df_1}{dz}=a(a^+e^{az}-a^-e^{-az})\\
f_2'&=\frac{df_2}{dz}=b(b^+e^{bz}-b^-e^{-bz})\\
f_3'&=\frac{df_3}{dz}=b(c^+e^{bz}-c^-e^{-bz}),
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

应力张量谱与位移谱之间的关系为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})=\lambda\boldsymbol{I}\nabla\cdot\boldsymbol{U}+\mu(\nabla\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}\nabla), \tag{19}$$

(19) 式亦可表达为

$$S_{jl}=\lambda\delta_{jl}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_l}\right), \tag{20}$$

$\boldsymbol{e}_z$ 方向的面上的应力向量为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{e}_z$，或记为

$$\frac{\boldsymbol{e}_z}{T_i}=S_{i3},$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
S_{13}&=\mu\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)=\mu\left(\frac{\partial U_z}{\partial x}+\frac{\partial U_x}{\partial z}\right),\\
S_{23}&=\mu\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)=\mu\left(\frac{\partial U_z}{\partial y}+\frac{\partial U_y}{\partial z}\right),\\
S_{33}&=\lambda\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)+2\mu\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\\
&=\lambda\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial U_z}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

而 U_x、U_y、U_z 为位移谱 $\boldsymbol{U}$ 沿 x、y、z 轴方向的分量，它们可由 (17) 式得到，即有

$$\left.\begin{aligned}
U_x&=-ie^{-ikx}\left(\frac{k}{k_\alpha}f_1+\frac{1}{k_\beta}f_2'\right),\\
U_y&=-e^{-ikx}f_3,\\
U_z&=e^{-ikx}\left(\frac{1}{k_\alpha}f_1'+\frac{k}{k_\beta}f_2\right),
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

由 (21) 式和 (22) 式可得

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{e}_z=2\mu\left(\frac{k}{k_\alpha}f_1'+\frac{\Omega}{k_\beta}f_2\right)\boldsymbol{B}+2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}f_1+\frac{k}{k_\beta}f_2'\right)\boldsymbol{P}+\mu f_3'\boldsymbol{C}, \tag{23}$$

其中

$$\Omega=k^2-\frac{k_\beta^2}{2}. \tag{24}$$

二、位移应力谱向量、波振幅谱向量和层矩阵

上面已得到波的位移谱和 z 方向应力的应力谱，将它们表达为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}kU &= k\left(\frac{k}{k_\alpha}f_1 + \frac{1}{k_\beta}f_1'\right)B + k\left(\frac{1}{k_\alpha}f_1' + \frac{k}{k_\beta}f_2\right)P + kf_3C,\\ \frac{1}{\mu_1}S(U)\cdot e_z &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\left(\frac{k}{k_\alpha}f_1' + \frac{\Omega}{k_\beta}f_2\right)B + 2\frac{\mu}{\mu_1}\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}f_1 + \frac{k}{k_\beta}f_2'\right)P + \frac{\mu}{\mu_1}f_3'C,\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

其中 μ_1 为第 1 层介质的剪切模量，之所以乘上 k 和除以 μ_1 是为了使它们的量纲整齐一致，这里都省去了层指标 i. 由 (25) 式可见 kU 和 $\frac{1}{\mu_1}S(U)\cdot e_z$ 可表达为如下形式

$$\left.\begin{aligned}kU &= kU_BB + kU_PP + kU_CC,\\ \frac{1}{\mu_1}S(U)\cdot e_z &= \frac{1}{\mu_1}\tau_BB + \frac{1}{\mu_1}\tau_PP + \frac{1}{\mu_1}\tau_CC,\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

对比 (26) 式与 (25) 式，并将 (18) 式代入 (25) 式最后可得

$$\left.\begin{aligned}kU_B &= \frac{k^2}{k_\alpha}\operatorname{ch}az(a^+ + a^-) + \frac{k^2}{k_\alpha}\operatorname{sh}az(a^+ - a^-) + \frac{kb}{k_\beta}\operatorname{ch}bz(b^+ + b^-)\\ &\quad + \frac{kb}{k_\beta}\operatorname{sh}bz(b^+ + b^-),\\ kU_P &= \frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{sh}az(a^+ + a^-) + \frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{ch}az(a^+ - a^-) + \frac{k^2}{k_\beta}\operatorname{sh}bz(b^+ - b^-)\\ &\quad + \frac{k^2}{k_\beta}\operatorname{ch}bz(b^+ + b^-),\\ kU_C &= k\operatorname{ch}bz(c^+ + c^-) + k\operatorname{sh}bz(c^+ - c^-),\\ \frac{1}{\mu_1}\tau_B &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{sh}az(a^+ + a^-) + \frac{2\mu}{\mu_1}\frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{ch}az(a^+ - a^-)\\ &\quad + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\beta}\operatorname{sh}bz(b^+ - b^-) + \frac{2\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\beta}\operatorname{ch}bz(b^+ + b^-),\\ \frac{1}{\mu_1}\tau_P &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\alpha}\operatorname{ch}az(a^+ + a^-) + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\alpha}\operatorname{sh}az(a^+ - a^-)\\ &\quad + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{kb}{k_\beta}\operatorname{ch}bz(b^+ - b^-) + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{kb}{k_\beta}\operatorname{sh}bz(b^+ + b^-),\\ \frac{1}{\mu_1}\tau_C &= \frac{\mu}{\mu_1}b\operatorname{sh}bz(c^+ + c^-) + \frac{\mu}{\mu_1}b\operatorname{ch}bz(c^+ - c^-).\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

引入位移应力谱向量 $\boldsymbol{H}$，记 $\boldsymbol{H}^T$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的转置，则有

$$H^T = \left[kU_B, kU_P, \frac{\tau_P}{\mu_1}, \frac{\tau_B}{\mu_1}, kU_C, \frac{\tau_C}{\mu_1}\right].\quad(28)$$

之所以要按这个次序排列是为了今后列出的矩阵排列整齐（见 (34) 式）. 排列的次序并非必须这样，按别的次序排列也是可以的.

再引入波的振幅谱向量 $\boldsymbol{K}$，它的转置 $\boldsymbol{K}^T$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}^T = [&k(a^+ + a^-), k(a^+ - a^-), k(b^+ - b^-),\\ &k(b^+ + b^-), k(c^+ + c^-), k(c^+ - c^-)]\end{aligned}\quad(29)$$

在K的定义中引入k后可以使下面得到的矩阵$\boldsymbol{D}(z)$的各分量成为无量纲的矩阵量.

引入矩阵$\boldsymbol{D}(z)$，使其满足下式

$$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{D}(z)\cdot\boldsymbol{K}. \tag{30}$$

由(27)式及(28)、(29)、(30)式可见，矩阵$\boldsymbol{D}(z)$可用下式表达

$$\boldsymbol{D}(z)=\begin{bmatrix}
\frac{k}{k_\alpha}\operatorname{ch}az & \frac{k}{k_\alpha}\operatorname{sh}az & \frac{b}{k_\beta}\operatorname{ch}bz & \frac{b}{k_\beta}\operatorname{sh}bz & 0 & 0\\
\frac{a}{k_\alpha}\operatorname{sh}az & \frac{a}{k_\alpha}\operatorname{ch}az & \frac{k}{k_\beta}\operatorname{sh}bz & \frac{k}{k_\beta}\operatorname{ch}bz & 0 & 0\\
2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{kk_\alpha}\operatorname{ch}az & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{kk_\alpha}\operatorname{sh}az & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{b}{k_\beta}\operatorname{ch}bz & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{b}{k_\beta}\operatorname{sh}bz & 0 & 0\\
2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{a}{k_\alpha}\operatorname{sh}az & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{a}{k_\alpha}\operatorname{ch}az & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{kk_\beta}\operatorname{sh}bz & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{kk_\beta}\operatorname{ch}bz & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{ch}bz & \operatorname{sh}bz\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\mu_1}\frac{b}{k}\operatorname{sh}bz & \frac{\mu}{\mu_1}\frac{b}{k}\operatorname{ch}bz
\end{bmatrix} \tag{31}$$

由$\boldsymbol{D}(z)$的表达式(31)可见，它是准对角矩阵，它由一个四阶方阵和一个二阶方阵组成. 由准对角矩阵的性质可知，它的各个子矩阵亦即这里的四阶方阵和二阶方阵在运算中是互不相关的，因此，与四阶方阵相联系的$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{P}$方向的位移应力谱和与二阶方阵相联系的$\boldsymbol{C}$向的位移应力谱是互不相关的，它们是不相耦合的，这我们在§5.1节中已经讨论过.

注意，在上面的讨论中实际上已把坐标原点移到了第i层的顶端，也就是说$z=0$时由(28)式给出的位移应力谱的值是第$i-1$层与第i层的分界面处的值，因此有

$$\boldsymbol{H}_i(0)=\boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1}), \tag{32}$$

其中d_{i-1}为第$i-1$层的层厚，由此得到

$$\boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1})=\boldsymbol{D}_i(0)\cdot\boldsymbol{K}_i \tag{33}$$

由$\boldsymbol{D}(z)$的表达式(31)可得

$$\boldsymbol{D}(0)=\begin{bmatrix}
\frac{k}{k_\alpha} & 0 & \frac{b}{k_\beta} & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{a}{k_\alpha} & 0 & \frac{k}{k_\beta} & 0 & 0\\
2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{kk_\alpha} & 0 & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{b}{k_\beta} & 0 & 0 & 0\\
0 & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{a}{k_\alpha} & 0 & 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{kk_\beta} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\mu_1}\frac{b}{k}
\end{bmatrix} \tag{34}$$

在上式中省去了层指标i，再引入符号$\boldsymbol{E}$，令

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}(0). \tag{35}$$

由(30)式，令$z=d_i$可得

$$\boldsymbol{H}_i(d_i)=\boldsymbol{D}_i(d_i)\cdot\boldsymbol{K}_i. \tag{36}$$

由 (36) 和 (33) 式可得

$$\boldsymbol{H}_i(d_i) = \boldsymbol{D}_i(d_i)\cdot E_i^{-1}\cdot H_{i-1}(d_{i-1}) = \boldsymbol{a}_i\cdot \boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1}), \tag{37}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{D}_i(d_i)\cdot \boldsymbol{E}_i^{-1} = \boldsymbol{D}_i(d_i)\cdot \boldsymbol{D}_i(0)^{-1}. \tag{38}$$

(37) 式反映了第 i 层底部 $z = d_i$ 处的位移应力谱向量 $\boldsymbol{H}_i(d_i)$ 和第 i 层顶部 $z = 0$ 处的位移应力谱向量 $\boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1})$ 之间的关系，这两个向量以矩阵 $\boldsymbol{a}_i$ 相联系着. $\boldsymbol{a}_i$ 称为层矩阵，它反映了介质层上、下两分界面上的位移应力谱向量之间的关系.

由 (34) 式可求出 $\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{E}^{-1}$ 如下

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2kk_\alpha}{k_\beta^2} & 0 & -\dfrac{\mu}{\mu_1}\dfrac{kk_\alpha}{k_\beta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2\Omega k_\alpha}{ak_\beta^2} & 0 & \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{k^2k_\alpha}{ak_\beta^2} & 0 & 0 \\ -\dfrac{2\Omega}{bk_\beta} & 0 & \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{k^2}{bk_\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2k}{k_\beta} & 0 & -\dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{k}{k_\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{k}{b} \end{bmatrix}. \tag{39}$$

由 (38)、(31) 和 (39) 式可求出层矩阵 $\boldsymbol{a}$ 来，为了简化表达式，简记

$$\left.\begin{aligned} C_\alpha &= \mathrm{ch}\, ad, \quad C_\beta = \mathrm{ch}\, bd, \\ S_\alpha &= \mathrm{sh}\, ad, \quad S_\beta = \mathrm{sh}\, bd, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \dfrac{2k^2}{k_\beta^2}C_\alpha - \dfrac{2\Omega}{k_\beta^2}C_\beta & -\dfrac{2\Omega k}{ak_\beta^2}S_\alpha + \dfrac{2kb}{k_\beta^2}S_\beta & -\dfrac{\mu_1k^2}{\mu k_\beta^2}C_\alpha + \dfrac{\mu_1k^2}{\mu k_\beta^2}C_\beta & \dfrac{\mu_1k^3}{\mu ak_\beta^2}S_\alpha - \dfrac{\mu_1kb}{\mu k_\beta^2}S_\beta & 0 & 0 \\ \dfrac{2ka}{k_\beta^2}S_\alpha - \dfrac{2\Omega k}{bk_\beta^2}S_\beta & -\dfrac{2\Omega}{k_\beta^2}C_\alpha + \dfrac{2k^2}{k_\beta^2}C_\beta & -\dfrac{\mu_1ka}{\mu k_\beta^2}S_\alpha + \dfrac{\mu_1k^3}{\mu bk_\beta^2}S_\beta & \dfrac{\mu_1k^2}{\mu k_\beta^2}C_\alpha - \dfrac{\mu_1k^2}{\mu k_\beta^2}C_\beta & 0 & 0 \\ \dfrac{4\mu\Omega}{\mu_1k_\beta^2}C_\alpha - \dfrac{4\mu\Omega}{\mu_1k_\beta^2}C_\beta & -\dfrac{4\mu\Omega^2}{\mu_1kak_\beta^2}S_\alpha + \dfrac{4\mu kb}{\mu_1k_\beta^2}S_\beta & -\dfrac{2\Omega}{k_\beta^2}C_\alpha + \dfrac{2k^2}{k_\beta^2}C_\beta & \dfrac{2\Omega k}{ak_\beta^2}S_\alpha - \dfrac{2kb}{k_\beta^2}S_\beta & 0 & 0 \\ \dfrac{4\mu ka}{\mu_1k_\beta^2}S_\alpha - \dfrac{4\mu\Omega^2}{\mu_1kbk_\beta^2}S_\beta & -\dfrac{4\mu\Omega}{\mu_1k_\beta^2}C_\alpha + \dfrac{4\mu\Omega}{\mu_1k_\beta^2}C_\beta & -\dfrac{2ka}{k_\beta^2}S_\alpha + \dfrac{2\Omega k}{bk_\beta^2}S_\beta & \dfrac{2k^2}{k_\beta^2}C_\alpha - \dfrac{2\Omega}{k_\beta^2}C_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_\beta & \dfrac{\mu_1k}{\mu b}S_\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\mu b}{\mu_1k}S_\beta & C_\beta \end{bmatrix}. \tag{41}$$

现在 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{a}$ 中的各元素均为无量纲量. 且 $\boldsymbol{a}$ 的矩阵元素中 S_α 总是以 $a^{\pm1}S_\alpha$ 形式出现，S_β 总是以 $b^{\pm1}S_\beta$ 形式出现，所以不管 a、b 是实数或是虚数，可以看出 $\boldsymbol{a}$ 中的各元素均为实数. 但 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 矩阵的元素仍可为实数或虚数. 因此 $\boldsymbol{a}$ 永远是实数矩阵，但 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 可以是复数矩阵.

三、自由表面的位移谱

设在弹性半空间即第 n 层有上行波入射时，现在来求自由表面的位移谱. 往往把地球表面看做由成层介质组成，例如至少地壳本身可以看作一层，而地壳本身又可看作由若

干介质层组成．因此上述问题就相当于当地下有地震波入射时，求地面的运动，这个问题当然有着重要的实际意义．

引入前面的层矩阵 $\boldsymbol{a}$ 等量后，便可以很容易地利用矩阵代数解决上述问题，而介质层数目的多少并无碍大局． 由 (33) 和 (37) 式立即可得到，对第 n 层的波振幅向量谱 $\boldsymbol{K}_n$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_n &= \boldsymbol{E}_n^{-1}\cdot\boldsymbol{H}_{n-1}(d_{n-1}) = \boldsymbol{E}_n^{-1}\cdot\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{H}_{n-2}(d_{n-2})\\ &= \boldsymbol{E}_n^{-1}\cdot\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{a}_{n-2}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{H}_1(0).\end{aligned}\tag{42}$$

$\boldsymbol{K}_n$ 的转置 $\boldsymbol{K}_n^T$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_n^T = [&k(a^+ + a^-),\ k(a^+ - a^-),\ k(b^+ - b^-),\ k(b^+ + b^-),\\ &k(c^+ + c^-),\ k(c^+ - c^-)].\end{aligned}\tag{43}$$

$\boldsymbol{H}_1(0)$ 是第 1 层顶端也就是自由表面上的位移应力谱向量，其转置为

$$\boldsymbol{H}_1^T(0) = \left[kU_B(0),\ kU_P(0),\ \frac{1}{\mu_1}\tau_P(0),\ \frac{1}{\mu_1}\tau_B(0),\ kU_C(0),\ \frac{\tau_C(0)}{\mu_1}\right].\tag{44}$$

引入 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{a}_{n-2}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1\tag{45}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}_n^{-1}\cdot\boldsymbol{A},\tag{46}$$

$\boldsymbol{A}$ 为多层介质的合成层矩阵，而 $\boldsymbol{J}$ 反映了自由表面的位移应力谱向量与第 n 层的波振幅向量之间的关系，由 (42) 式和 (45)、(46) 式知有

$$\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{H}_1(0).\tag{47}$$

由于自由表面上 z 方向面上的应力为零，即有

$$\tau_B(0) = \tau_P(0) = \tau_C(0) = 0,$$

因此由 (47) 式得

$$\left.\begin{aligned}a_n^+ + a_n^- &= J_{11}U_B(0) + J_{12}U_P(0),\\ a_n^+ - a_n^- &= J_{21}U_B(0) + J_{22}U_P(0),\\ b_n^+ - b_n^- &= J_{31}U_B(0) + J_{32}U_P(0)\\ b_n^+ + b_n^- &= J_{41}U_B(0) + J_{42}U_P(0)\\ c_n^+ + c_n^- &= J_{55}U_C(0)\\ c_n^+ - c_n^- &= J_{65}U_C(0)\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

其中 J_{kl} 为矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的元素，上式中消去反射波的振幅谱 a_n^-、b_n^-、c_n^-，可得

$$\left.\begin{aligned}U_B(0) &= \frac{2}{F_R}[(J_{32}+J_{42})a_n^+ - (J_{12}+J_{22})b_n^+]\\ U_P(0) &= \frac{2}{F_R}[(J_{11}+J_{21})b_n^+ - (J_{31}+J_{41})a_n^+],\\ U_C(0) &= \frac{2}{F_L}c_n^+,\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}F_R &= (J_{11}+J_{21})(J_{32}+J_{42}) - (J_{12}+J_{22})(J_{31}+J_{41}),\\ F_L &= J_{55}+J_{65}.\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

(50)式反映了自由表面的位移谱与第 n 层的上行波(即入射波)振幅谱 a_n^+、b_n^+、c_n^+ 之间的

关系，其中 a_n^+ 反映了入射 P 波的位移振幅谱，b_n^+ 反映了入射 SV 波的位移振幅谱，c_n^+ 反映了入射 SH 波的位移振幅谱.

下面来求多层弹性半空间的自由表面的位移谱与入射 P 波的位移谱之比. 用 $[\boldsymbol{U}^+(z_{n-1})]_P$ 表示入射 P 波在第 n 层顶面的位移谱，用 $[\boldsymbol{U}^+(z_{n-1})]_{SV}$ 及 $[\boldsymbol{U}^+(z_{n-1})]_{SH}$ 分别表示入射 SV 波和入射 SH 波在第 n 层顶面的位移谱. 为求出它们，可以利用 (33) 式. 当仅有 P 波入射时，$a_n^+ \neq 0$，而令

$$b_n^+ = c_n^+ = a_n^- = b_n^- = c_n^- = 0;$$

当仅有 SV 波入射时，令 $b_n^+ \neq 0$，其余的均为零；当仅有 SH 波入射时，令 $c_n^+ \neq 0$，其余的均为零. 由 (17) 式可求得

$$\left.\begin{aligned}
&[\boldsymbol{U}^+(z_{n-1})]_P = \frac{k}{k_{\alpha n}}\, a_n^+\boldsymbol{B} + \frac{a}{k_{\alpha n}}\, a_n^+\boldsymbol{P},\\
&[\boldsymbol{U}^+(z_{n-1})]_{SV} = \frac{b}{k_{\beta n}}\, b_n^+\boldsymbol{B} + \frac{k}{k_{\beta n}}\, b_n^+\boldsymbol{P},\\
&[\boldsymbol{U}^+(z_{n-1})]_{SH} = c_n^+\boldsymbol{C}.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

相应的自由表面的总位移可由 (49) 式得到. 记 $[\boldsymbol{U}(0)]_P$、$[\boldsymbol{U}(0)]_{SV}$、$[\boldsymbol{U}(0)]_{SH}$ 为当仅有 P, SV 或 SH 波入射时，自由表面的位移谱. 由此有

$$\left.\begin{aligned}
&[\boldsymbol{U}(0)]_P = \frac{2}{F_R}(J_{32} + J_{42})a_n^+\boldsymbol{B} - \frac{2}{F_R}(J_{31} + J_{41})a_n^+\boldsymbol{P},\\
&[\boldsymbol{U}(0)]_{SV} = \frac{2}{F_R}(J_{12} + J_{22})b_n^+\boldsymbol{B} + \frac{2}{F_R}(J_{11} + J_{21})b_n^+\boldsymbol{P},\\
&[\boldsymbol{U}(0)]_{SH} = \frac{2}{F_L}\, c_n^+\boldsymbol{C},
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

由 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的关系式 (14) 以及 (51)、(52) 式可立即求出自由表面的位移向量谱与入射波相应的位移分量谱之间的关系.

对 P 波入射：

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{U_x(0)}{U_x^+(z_{n-1})}\right]_P = \frac{2}{F_R}(J_{32} + J_{42}) - \frac{k_{\alpha n}}{k},\\
&\left[\frac{U_z(0)}{U_z^+(z_{n-1})}\right]_P = -\frac{2}{F_R}(J_{31} + J_{41})\frac{k_{\alpha n}}{a},\\
&[U_y(0)]_P = 0
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

对 SV 波入射：

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{U_x(0)}{U_x^+(z_{n-1})}\right]_{SV} = -\frac{2}{F_R}(J_{12} + J_{22})\frac{k_{\beta n}}{b},\\
&\left[\frac{U_z(0)}{U_z^+(z_{n-1})}\right]_{SV} = \frac{2}{F_R}(J_{11} + J_{21})\frac{k_{\beta n}}{k},\\
&[U_y(0)]_{SV} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

对 SH 波入射

$$\left.\begin{aligned}
&[U_x(0)]_{SH} = [U_z(0)]_{SH} = 0\\
&\left[\frac{U_y(0)}{U_y^+(z_{n-1})}\right]_{SH} = \frac{2}{F_L}.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

有时用地面的位移分量谱与入射波的总位移谱 U_t 之比来表达更为方便．下面引入入射波的总位移谱 U_t，P 波的 U_t 和 U_x、U_z 之间的关系见图 5.12 (a)． SV 波的总位移谱 U_t 和 U_x、U_z 之间的关系见图 5.12 (b)． SH 波的总位移谱 $U_t = U_y$． 为了表达方便，图中已把 U_t 都移到了坐标原点处． U_t 的正方向的定义见图 5.12．

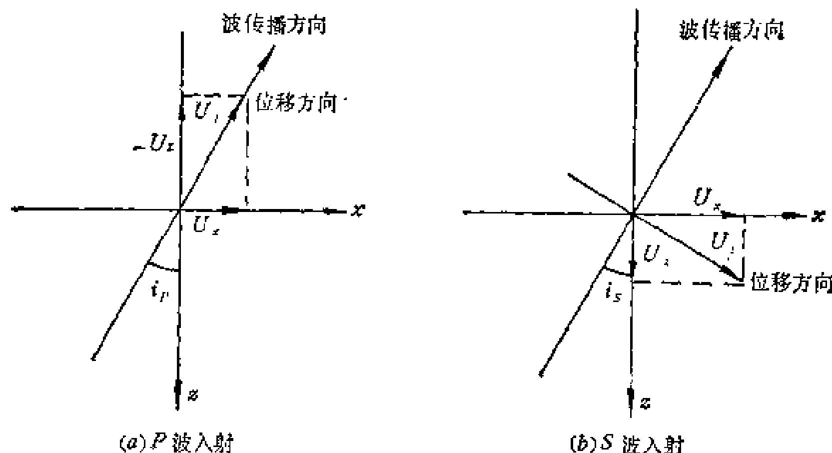


图 5.12 入射波总位移谱与位移分量谱之间的关系

令 i_P 和 i_S 分别为入射 P 和 SV 波的入射角。由于

$$\sin i_P = \frac{k}{k_\alpha}, \quad \cos i_P = \sqrt{1 - \sin^2 i_P} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_\alpha^2}} = -\frac{ia}{k_\alpha}.$$

因此对 P 波，其总位移谱 U_t 和 x、z 方向的分量谱之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} U_t &= \frac{U_x}{\sin i_P} = U_x \frac{k_\alpha}{k}, \\ U_t &= -\frac{U_z}{\cos i_P} = U_z \frac{k_\alpha}{ia}. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

同理对 SV 波有

$$\left.\begin{aligned} U_t &= \frac{U_x}{\cos i_S} = U_x \frac{k_\beta}{-ib}, \\ U_t &= \frac{U_z}{\sin i_S} = U_z \frac{k_\beta}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

前面讲过对 SH 波有

$$U_t = U_y. \tag{58}$$

由 (53) 和 (56) 式可得，对 P 波入射有

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{U_x(0)}{U_t^+(z_{n-1})}\right]_P = \frac{2}{F_R}(J_{32} + J_{42}), \\ &\left[\frac{U_z(0)}{U_t^+(z_{n-1})}\right]_P = -i\frac{2}{F_R}(J_{31} + J_{41}), \\ &[U_y(0)]_P = 0. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

由 (54) 和 (57) 式可得，对 SV 波入射有

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{U_x(0)}{U_t^+(z_{n-1})}\right]_{SV} = i\frac{2}{F_R}(J_{12}+J_{22}),\\
&\left[\frac{U_z(0)}{U_t^+(z_{n-1})}\right]_{SV} = \frac{2}{F_R}(J_{11}+J_{21}),\\
&[U_y(0)]_{SV} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由 (55) 和 (58) 式可得，对 SH 波入射有

$$\left.\begin{aligned}
&[U_x(0)]_{SH} = [U_z(0)]_{SH} = 0,\\
&\left[\frac{U_y(0)}{U_t^+(z_{n-1})}\right]_{SH} = \frac{2}{F_L}.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

(59)、(60)、(61) 式为自由表面的位移分量谱与入射波的总位移谱之比.

四、任意深度处的位移、应力谱

给定了入射波，由前面所述，可以求得自由表面的位移谱，从而得到自由表面的位移应力谱 $\boldsymbol{H}_1(0)$(自由表面上的应力为零). 再由 $\boldsymbol{H}_1(0)$ 就可以求得任意深度 h 处的位移应力谱向量.

设 $z_{i-1} < h < z_i$, 即所求点在第 i 层内. 且 $h = z_{i-1} + h_i$, 也就是说所求点离第 i 层顶面的距离为 h_i, 因此现在要求出位移应力谱向量 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$. 在 (41) 式中令

$$C_\alpha = \operatorname{ch}\alpha h_i,\quad C_\beta = \operatorname{ch}\beta h_i,\quad S_\alpha = \operatorname{sh}\alpha h_i,\quad S_\beta = \operatorname{sh}\beta h_i,$$

可得矩阵 $\boldsymbol{a}(h_i)$, 由此

$$\boldsymbol{H}_i(h_i) = \boldsymbol{a}_i(h_i)\cdot\boldsymbol{a}_{i-1}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{H}_1(0) = \boldsymbol{A}_i(h_i)\cdot\boldsymbol{H}_1(0), \tag{62}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_1^T(0) = [kU_B(0), kU_P(0), 0, 0, kU_C(0), 0], \tag{63}$$

$$\boldsymbol{A}_i(h_i) = \boldsymbol{a}_i(h_i)\cdot\boldsymbol{a}_{i-1}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_0. \tag{64}$$

只要给定了入射波，亦即给定了入射波的振幅谱 a_n^+、b_n^+、c_n^+, 则从 (49) 式可得 $U_B(0)$、$U_P(0)$、$U_C(0)$, 由此得到 $\boldsymbol{H}_1(0)$. 将之代入 (62) 式便可得到所要求的 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$. 也可以解如下联立方程:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{H}_1(0),\\
&\boldsymbol{H}_i(h_i) = \boldsymbol{A}_i(h_i)\cdot\boldsymbol{H}_1(0),
\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

(65) 中一共 12 个方程，未知量为 a_n^-、b_n^-、c_n^-、$U_B(0)$、$U_P(0)$、$U_C(0)$ 以及 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$ 的六个分量，亦即未知量也是 12 个. 因此可以解出 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$ 来.

注意不能直接由 $\boldsymbol{K}_n$ 求 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$, 也就是不能在方程 (65) 中消去 $\boldsymbol{H}_1(0)$ 得到

$$\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{E}_n^{-1}\cdot\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{a}_{n-2}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_{i-1}(d_i - h_i)\cdot\boldsymbol{H}_i(h_i),$$

再来求 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$, 因为这样的话，所得到的方程中未知量有 9 个，即除了 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$ 的六个分量外，还有 a_n^-、b_n^- 和 c_n^-. 而方程只有六个. 上面的讨论说明必须要考虑自由表面的边界条件，即自由表面上应力为零的条件.

五、多层弹性半空间对平面入射波的反射波

由于 a_n^+、b_n^+、c_n^+ 分别反映第 n 层半空间内入射 P、SV、SH 波振幅，a_n^-、b_n^-、c_n^- 分别反映第 n 层半空间内反射 P、SV、SH 波振幅，所以可以用它们之比来反映反射系数. 最

后给出用总位移谱来表达的反射系数的式子.

在(48)式中先消去 a_n^+、b_n^+、c_n^+ 得到用 $U_B(0)$、$U_P(0)$、$U_C(0)$ 来表达 a_n^-、b_n^- 或 c_n^- 的式子，然后用(49)式代入消去 $U_B(0)$、$U_P(0)$ 和 $U_C(0)$，得到用 a_n^+、b_n^+ 或 c_n^+ 来表达 a_n^-、b_n^- 或 c_n^- 的式子，得

$$\left.\begin{aligned}
a_n^- &= \frac{1}{F_R}\{a_n^+[(J_{11}-J_{21})(J_{42}+J_{32})-(J_{12}-J_{22})(J_{41}+J_{31})] \\
&\qquad + b_n^+[(J_{12}-J_{22})(J_{11}+J_{21})-(J_{11}-J_{21})(J_{12}+J_{22})]\}, \\
b_n^- &= \frac{1}{F_R}\{a_n^+[(J_{41}-J_{31})(J_{42}+J_{32})-(J_{42}-J_{32})(J_{41}+J_{31})] \\
&\qquad + b_n^+[(J_{42}-J_{32})(J_{11}+J_{21})-(J_{41}-J_{31})(J_{12}+J_{22})]\}, \\
c_n^- &= \frac{J_{55}-J_{65}}{J_{55}+J_{65}}c_n^+.
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

当 P 波入射时，$a_n^+ \neq 0$，$b_n^+ = c_n^+ = 0$，由(66)得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_n^-}{a_n^+} &= \frac{1}{F_R}[(J_{11}-J_{21})(J_{42}+J_{32})-(J_{12}-J_{22})(J_{41}+J_{31})], \\
\frac{b_n^-}{a_n^+} &= \frac{2}{F_R}(J_{32}J_{41}-J_{31}J_{42}), \\
\frac{c_n^-}{a_n^+} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

当 SV 波入射时，$b_n^+ \neq 0$，$a_n^+ = c_n^+ = 0$，由(66)得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_n^-}{b_n^+} &= -\frac{2}{F_R}(J_{12}J_{21}-J_{11}J_{22}), \\
\frac{b_n^-}{b_n^+} &= \frac{1}{F_R}[(J_{42}-J_{32})(J_{11}+J_{21})-(J_{41}-J_{31})(J_{12}+J_{22})], \\
c_n^- &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

当 SH 波入射时，$c_n^+ \neq 0$，$a_n^+ = b_n^+ = 0$，由(66)得

$$\left.\begin{aligned}
a_n^- &= b_n^- = 0, \\
\frac{c_n^-}{c_n^+} &= \frac{J_{55}-J_{65}}{J_{55}+J_{65}}.
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

现在来求总位移谱的反射系数，并用角标 I 表示入射波，R 表示反射波. 将(18)式代入(17)式，则有

对 P 波

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_I &= \frac{k}{k_\alpha}a_n^+e^{az}\boldsymbol{B} + \frac{a}{k_\alpha}a_n^+e^{az}\boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{U}_R &= \frac{k}{k_\alpha}a_n^-e^{-az}\boldsymbol{B} + \frac{a}{k_\alpha}a_n^-e^{-az}\boldsymbol{P}.
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

对 SV 波入射和反射

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_I &= \frac{b}{k_\beta}b_n^-e^{bz}\boldsymbol{B} + \frac{k}{k_\beta}b_n^+e^{bz}\boldsymbol{P}, \\
\boldsymbol{U}_R &= -\frac{b}{k_\beta}b_n^-e^{-bz}\boldsymbol{B} + \frac{k}{k_\beta}b_n^-e^{-bz}\boldsymbol{P},
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

对 SH 波入射

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U}_I &= c_n^+ e^{bz} \boldsymbol{C}, \\ \boldsymbol{U}_R &= c_n^- e^{-bz} \boldsymbol{C}. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

其中 $\boldsymbol{U}_I$ 代表入射波的位移，$\boldsymbol{U}_R$ 代表反射波的位移.

图 5.13 给出了入射和反射 P、SV 波的总位移振幅谱的正方向. 由图 5.13 再结合 (56) 式、(57) 式可知，对 P 波有

$$\left.\begin{aligned} (U_t)_{PI} &= (U_x)_{PI} \frac{k_\alpha}{k}, \\ (U_t)_{PR} &= (U_x)_{PR} \frac{k_\alpha}{k}, \\ (U_t)_{SVI} &= -(U_x)_{SVI} \frac{k_\beta}{ib}, \\ (U_t)_{SVR} &= (U_x)_{SVR} \frac{k_\beta}{ib}, \\ (U_t)_{SHI} &= (U_y)_{SHI}, \\ (U_t)_{SHR} &= (U_y)_{SHR}, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

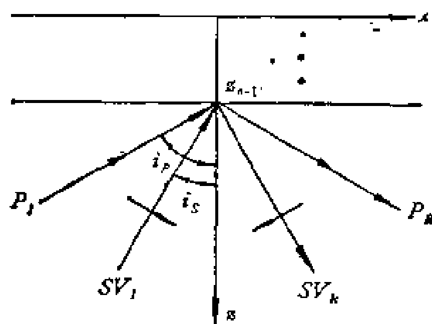


图 5.13 入射和反射 P、SV 波的总位移振幅谱的正方向

其中下角标 I 代表入射波，R 代表反射波.

根据 (70)—(75) 式便可得到总位移谱的反射系数，例如

$$\frac{(U_t)_{PR}}{(U_t)_{RI}} = \frac{(U_x)_{PR}}{(U_x)_{PI}} \frac{k_\alpha/k}{k_\alpha/k} = \frac{(U_B)_{PR}}{(U_B)_{PI}} = \frac{a_n^-}{a_n^+},$$

类似地可得到其他结果，总结如下：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(U_t)_{PR}}{(U_t)_{PI}} = \frac{a_n^-}{a_n^+}, \quad \frac{(U_t)_{SVR}}{(U_t)_{PR}} = i\frac{b_n^-}{a_n^+}, \\ &\frac{(U_t)_{SVR}}{(U_t)_{SVI}} = \frac{b_n^-}{b_n^+}, \quad \frac{(U_t)_{PR}}{(U_t)_{SVI}} = -i\frac{a_n^-}{b_n^+}, \\ &\frac{(U_t)_{SHR}}{(U_t)_{SHI}} = \frac{c_n^-}{c_n^+}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

(74)式便是总位移振幅谱的反射系数，例如 $\frac{(U_t)_{SVR}}{(U_t)_{PR}}$ 便代表反射 SV 波的总位移振幅谱与入射 P 波总位移振幅谱之比. 将 (67)、(68)、(69) 代入 (74) 便可得到最后的结果，这里不再列出.

上面讨论了多层弹性半空间对平面入射波的响应，得到了自由表面的位移谱与入射波的总位移振幅谱之比 (59)—(61) 式. 讨论了任意深度处的位移应力谱向量 $\boldsymbol{H}_i(h_i)$，它可由 (65) 式解出. 最后得到了总位移振幅谱的反射系数 (74) 和 (67)—(69) 式.

§ 5.5 近震的地震波

关于地壳特别是其深部的知识，很大的一部分来自地震（包括天然和人工爆破）记录

的分析．通过大量的实践，人们不断概括总结，逐步加深了对地壳结构的认识．现在一般认为，大陆地壳主要分为两层，即所谓花岗岩层及下部的玄武岩层．大陆地壳总的厚度约在30公里到70公里之间，平原地区一般在35公里左右．这个尺度与地球半径6371公里相比是很小的．地壳内地震波的速度一般随着深度的增加而增加，然而在一级近似下，往往在地壳的两层内地震波速的变化可以忽略，因而看做常数．这个常数随地区而略有不同．在我国许多地区（例如西北）不易发现此两层之间的分界面，也许它们并不存在．地壳与其下的地幔之间的分界面十分明显地存在，分界面上下介质的物理性质如地震波速、密度有明显的差别，这个界面称为莫霍界面．有不少人认为莫霍界面上下物质的化学组成成份是一样的，而只是物相的不同，也就是莫霍界面是相变面．海洋的洋底盆地莫霍面的深度平均只有11公里，可分为四层，各层的P波波速和平均厚度见表5.1．其中III与IV之间为莫霍面，I层为洋底未固结的沉积层，II层为硅铝层，III层的波速介于花岗岩与纯橄榄岩之间，称为硅镁层．

震中距小于1000公里的地震称为近震（包括震中距小于100公里的地方震）．讨论近震时，地球表面的曲率可以忽略不计，地壳内部各地层间的界面以及莫霍面等在后面的讨论中都将作为平面来考虑．

表 5.1

层	P 波波速	厚度
海水	1.5公里/秒	4.5公里
I	2	0.45
II	4–6	1.75
III	6.7	4.7
IV	8.1	

近震的震相体波部分主要为：直达波，反射波和首波，各种面波将在第七章介绍．所谓震相就是具有不同振动性质且经过不同传播路径的各种地震波在地震记录图上的反映．不同的振动性质是指例如纵波和横波、各种面波等等．不同的传播路径是指例如由震源直接传到接收点的直达波，在地壳底部莫霍界面上经过一次反射而到达接收点的反射波等等．

由于震源的扰动，在地球介质内将会产生纵波和横波，波阵面成球面形状向外传播，波阵面的传播速度对纵，横波分别为α和β，这就是球面波．在§4.6中已对球面波作了初步的讨论，在那里没有考虑震源的方向性．然而，实际的地震震源是具有方向性的，即在不同的方向上产生的P、S波的振幅和周期是不同的，在后面第八章中还要讨论．这里，暂时不考虑震源的方向性，也不考虑震源的线度．令R为震源到接收点的距离，λ为地震波的波长，H为震源深度．对球面波来说，如$R \gg \lambda$，则球面（P、S）波的位移振幅是按r^{-1}的规律衰减的，如果计入介质吸收的影响，则衰减还要快一点．不同频率的吸收系数是不一样的，一般说频率越高，衰减越快．如果同时还有$H \gg \lambda$，则震源产生的球面波，当入射到地面时产生的地动位移近似等于在入射点把球面波看成平面波入射时产生的地动位移．详细的理论推导将占用过多的篇幅，这里从简．实际上，这样的条件经常得到满足，因此在球面波入射到地面时我们经常可以近似地把它当作平面波来考虑．

一、直达波

由震源出发，直接传播到接收点的体波称为直达波．由于地壳内存在各界面，因此实际上直达波可能经过了折射．近震中直达波一般记为$\bar{P}$，$\bar{S}$（图5.14）．

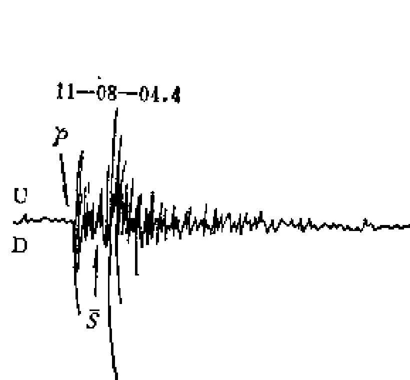


图 5.14 1974.4.27 江苏溧阳县上沛埠地震余震，江苏溧阳台记录 $V_0 = 1.0 \times 10^5$，$\bar{S} - \bar{P} = 2.6$ 秒

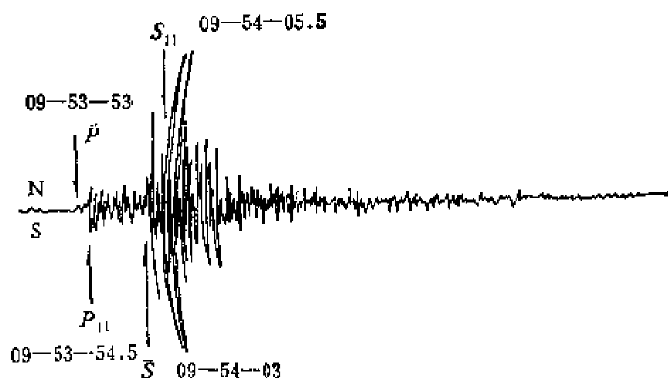


图 5.15 江苏溧阳县上沛埠地震的余震记录，南京台 DD-1 记录 ($V_0 = 2.0 \times 10^5$) O:1974.4.22. 09—53—46 M_S:3.1

二、反 射 波

在近震记录中还经常可以记到地壳底部莫霍面上的反射波，称为 P_{11}、S_{11} 如图 5.15 中所标出者. 反射波大致上在 $\Delta = 60 \sim 120$ 公里左右比较明显[2]. P_{11}、S_{11} 的射线路径见图 5.16. 莫霍界面上的反射转换波例如 P 波入射转换成 SV 波，虽然理论上也应存在，但实际上在近震记录中由于波幅较小不太容易分析. 地震记录中发现，当震中距为 70—90 公里左右时，往往反射波要大于直达波，有时甚至要大好几倍. 研究表明，由于莫霍界面下的波速要大于地壳底部的波速，正是在这个震中距上发生了 P_{11}、S_{11} 在莫霍界面的全反射. 然而全反射并不能增强振幅，而且反射波所走过的路径

$$[\Delta^2 + (H - h)^2]^{1/2}$$

要大于直达波所走过的路径

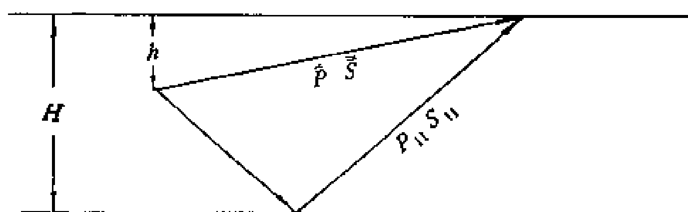


图 5.16

$(\Delta^2 + h^2)^{1/2}$，因而理应衰减更多. 但应注意到反射波的出射角要远大于直达波的出射角（图 5.16），由 § 5.2 的讨论知反射波的地动位移就有可能会比直达波大，这个效应在 h 比较小时特别明显. 另外反射波和直达波在震源是从不同方向辐射的，因此还应考虑震源辐射的方向性的影响. 随着震中距 Δ 的增大，两者的出射角越来越接近，因而由于出射角的差异对记录振幅差异的影响相应也会越来越小.

三、首 波

首波又称为侧面波. 它是在分界面地震波速较高的一侧中沿着界面传播的不均匀 $P(S)$ 波在波速较低的一侧内激起的一种地震波. 莫霍界面上下的波速差异比较大，因而激起的首波比较强，经常可以在近震记录中被观测到. 详细的动力学解释比较复杂，可以参见专门的著作和文献，这里仅从运动学的方面作初步介绍.

设莫霍面上下 P 波波速为 v_1、v_2，震源位于地壳中（图 5.17）. 知 $v_2 > v_1$，地震发生时，地震射线会以各种角度入射到莫霍面上，令入射角为 i_1，只要

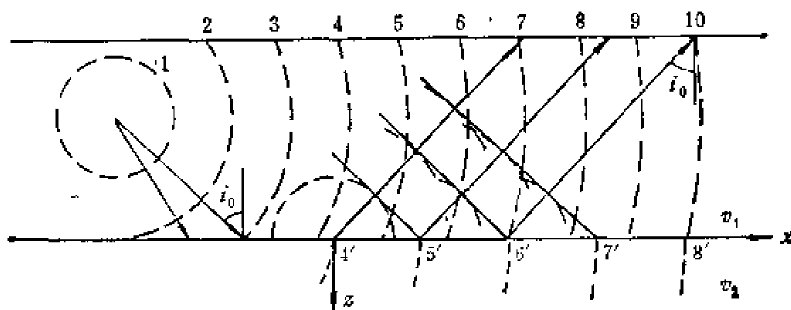


图 5.17

$$i_1 < i_0 = \sin^{-1}\frac{v_1}{v_2},$$

则进入上地幔的射线按折射反射定律折射，当 $i_1 = i_0$ 时，上地幔中的折射 P 波就沿着界面以 v_2 传播，且为不均匀 P 波．上面 i_0 称为临界角．由于 $v_2 > v_1$，沿界面传播的波阵面可脱离且超前于入射波的波阵面而独立的向前传播(图 5.17 中比较波阵面 5 与 5′)，由于界面的连续性条件，以速度 v_2 沿界面传播的折射波反过来可以看做一个以 v_2 沿界面运动的波源而引起上介质中质点的振动．我们来看这样的波源怎样引起上介质中质点的振动．设在 $t = 0$ 时，波源在 $x = 0$，$z = 0$ 处 (图 5.17) 在 $t = \tau$ 时，波源位置在 $z = 0$，$x = v_2\tau$ 处．到 $t = t$ 时，$t = \tau$ 时刻的波源在上介质中产生的 P 波子波阵面方程为

$$(x - v_2\tau)^2 + z^2 = v_1^2(t - \tau)^2 \tag{1}$$

根据振动传播的“费涅尔原理”，在 $t = t$ 时刻的子波阵面的包络线便为实际的波阵面，因此可对 (1) 式所代表的曲线族求包络线，即对 (1) 式求 $\frac{\partial}{\partial\tau}$，得

$$2(x - v_2\tau)(-v_2) = 2v_1^2(t - \tau)(-1) \tag{2}$$

(1)、(2) 中消去 τ 可得

$$z = \pm\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}(x - v_2 t) \tag{3}$$

从图 5.17 看应取正号，即波阵面方程为

$$z = \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}(x - v_2 t) \tag{4}$$

这就是首波的波阵面方程．此为直线方程，所以首波波阵面与 xz 面的交线为一直线．也就是首波波阵面为一圆锥曲面．令波前与界面之间的夹角为 i_1，由 (4) 知

$$\tan i_1 = \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}},$$

由此

$$\sin i_1 = \left(\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 i_1}\right)^{1/2} = \frac{v_1}{v_2},$$

因此 i_1 就等于临界角 i_0．首波的射线垂直于波阵面，因此首波射线与界面法线之间的夹角等于波阵面与界面之间的夹角，而等于临界角．而由于莫霍面大致上平行于地面，因此首波入射到地面时的入射角也等于临界角 i_0．

地壳内首波的射线如图 5.18(*a*) 所示，即图中 OAB，OAA_1B_1 等等．地震图见 5.18(*b*)．

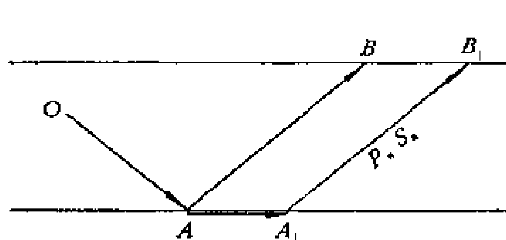


图 5.18(*a*)

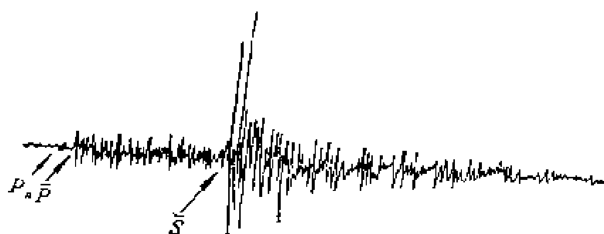


图 5.18(*b*) 1968 年 9 月 28 日 18 时 39 分 14 秒 河北围场地震 $M = 3.0$ 与道峪台 $\Delta = 2.0°$

详细的动力学理论分析可证，首波的振幅随震中距 Δ 的增大按 Δ^{-2} 衰减，所以首波衰减较快，但它的出射角比直达波 $\bar{P}$ 和反射波 P_{11} 都要小．

首波是在刚形成全反射的地方产生的，因此它仅在一定的震中距后出现．一般在 $\Delta > 100$ 公里左右开始出现，由于 $v_2 > v_1$，因此当它在 $\Delta > 150$ 公里左右时，比直达波先到，所以又叫首波．首横波 S_n 的产生与首纵波 P_n 完全相似．

首波与船在水里航行时产生的水波波前及超音速飞机在空气中形成的激波波前在某些方面有点相似，它们都是波源运动速度大于波在介质中的传播速度时产生的．

在地壳内的康腊德界面上也会形成首波，条件是震源要在康腊德界面的上面，它们记为 P^* 和 S^*，其形成条件，射线路径等与 P_n、S_n 完全相似．表 5.2 给出了直达，反射、首波波速．

表 5.2 直达、反射、首波波速

波	波速(公里/秒)	波	波速(公里/秒)
$v_{\bar{P}}$	5.6	$v_{\bar{S}}$	3.3
$v_{P_{11}}$	6.3	$v_{S_{11}}$	3.7
v_{P_n}	8.1	v_{S_n}	4.7

§5.6 近震走时曲线

所谓走时曲线就是对于某种地震波(或某一震相)的到达走时与震中距关系的曲线．又可称为时距曲线．而走时表就是表达走时与震中距关系的表格．对近震，走时与震中距关系的公式推导很简单，只要研究一下射线的路径就可很容易的得到，因此下面一般仅给出公式，不再作详细的推导．

一、单层地壳模型

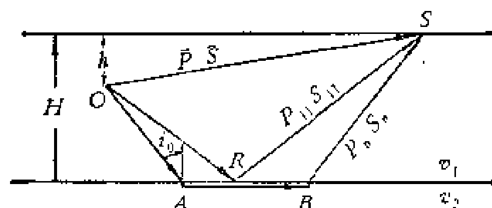


图 5.19

1. 震源在莫霍面上方(图 5.19)

(1) 直达波

射线：OS

走时方程

$$t=\frac{\sqrt{\Delta^2+h^2}}{v_1} \tag{1}$$

其中 t. 走时

v_1. 地壳中波速

Δ. 震中距

h. 震源深度

走时曲线：图 5.20 中 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 曲线.

曲线性质：双曲线.

讨论:

a) 当 $h=0$，走时曲线为过原点的直线；

b) 由 $\Delta=0$ 的走时 t 及 v_1 可求出震源深度 h；

c) 在某一 Δ 处作横轴的垂线，与 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 曲线的交点可看出 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 的到时及到时差 t_{S-P}；

d) $\bar{P}$、$\bar{S}$ 曲线都以过原点的直线为渐近线，渐近线的斜率分别为 $1/\alpha_1$，和 $1/\beta_1$.

(2) 反射波

射线：ORS（图 5.19）

走时方程

$$t=\frac{\sqrt{\Delta^2+(2H-h)^2}}{v_1} \tag{2}$$

其中H为地壳厚度

走时曲线：如图 5.21 中曲线 P_{11} 和 S_{11}.

曲线性质：双曲线.

讨论:

a) 走时曲线在时间轴的截距为 $\frac{2H-h}{v_1}$，

b) 曲线的渐近线与直达波相同.

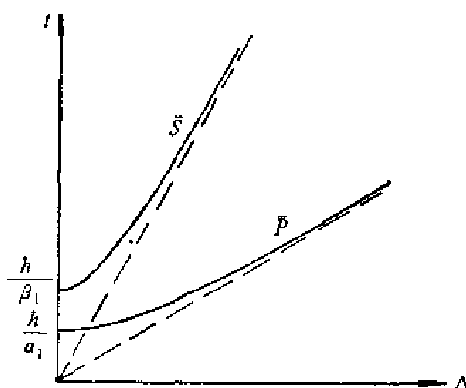


图 5.20

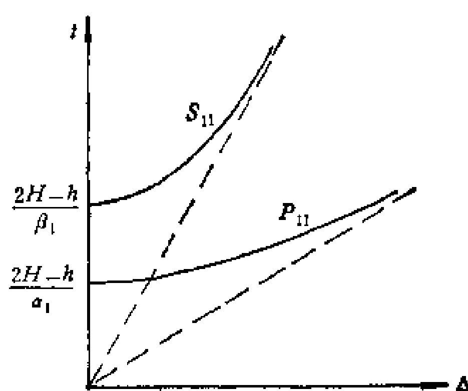


图 5.21

(3) 首波

射线：OAA_1S（图 5.19）

走时方程：

$$t = t_{OA} + t_{AA_1} + t_{A_1S} = \frac{OA}{v_1} + \frac{AA_1}{v_2} + \frac{A_1S}{v_1} = \frac{(H-h)/\cos i_0}{v_1}$$
$$+ \frac{\Delta - (H-h)\tan i_0 - H\tan i_0}{v_2} + \frac{H/\cos i_0}{v_1}$$
$$= \frac{2H-h}{v_1}\cos i_0 + \frac{\Delta}{v_2}. \tag{3}$$

其中 v_2 为莫霍面下波速，i_0 为临界角。

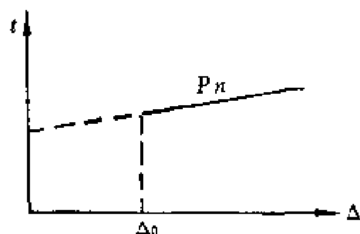


图 5.22

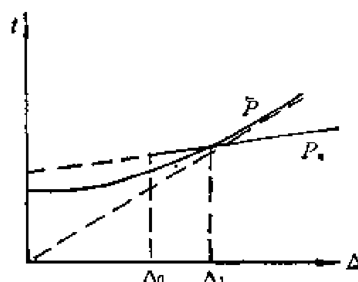


图 5.23

走时曲线：图 5.22 中 $P_n(S_n)$

曲线性质：直线

讨论：

a）首波在 $\Delta > \Delta_0$ 后出现，当 $\Delta = \Delta_0$ 时 $AA_1 = 0$ 所以

$$\Delta_0 = (2H-h)\tan i_0 = (2H-h)\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \tag{4}$$

Δ_0 一般约为 100 公里左右。

b）走时曲线斜率为 $1/v_2$，因为首波曲线的斜率比直达波小，两者的相交点对应的震中距为 Δ_1（图 5.23）由（1）、（3）得

$$\frac{2H-h}{v_1}\cos i_0 + \frac{\Delta_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + h^2}}{v_1}.$$

由此可介出 Δ_1 来有

$$\Delta_1|_{h=0} = 2H\sqrt{\frac{v_2+v_1}{v_2-v_1}}, \tag{5}$$

$$\Delta_1|_{h=H} = H\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \tag{6}$$

易证有 $\Delta_1|_{h=H} < \Delta_1|_{h=0}$ 由此 $\Delta_1|_{h=H}$ 为首波比直达波先到的最小距离，一般 Δ_1 约为 150—200 公里左右，地壳越厚即 H 越大，则 Δ_1 越大，震源越浅，即 h 越小，则 Δ_1 也越大。

（4）反射转换波

在莫霍面反射时还会产生反射转换波，例如 P 波入射而反射 SV 波或 SV 波入射而反射 P 波。

射线：OAS（图 5.24）

走时方程：

$$t = \frac{OA}{v_I} + \frac{AS}{v_f} = \frac{H-h}{v_I\cos i_I} + \frac{H}{v_f\cos i_f}$$

$$= \frac{H-h}{V_l^2\sqrt{\frac{1}{v_l^2}-C^2}} + \frac{H}{V_f^2\sqrt{\frac{1}{v_f^2}-C^2}}, \tag{7}$$

其中

$$C = \frac{\sin i_l}{v_l} = \frac{\sin i_f}{v_f}, \tag{8}$$

$$\Delta = (H-h)\tan i_l + H\tan i_f = \frac{(H-h)C}{\sqrt{\frac{1}{v_l^2}-C^2}} + \frac{HC}{\sqrt{\frac{1}{v_f^2}-C^2}}. \tag{9}$$

(7)、(9) 式为以 C 为参数的反射转换波走时方程.

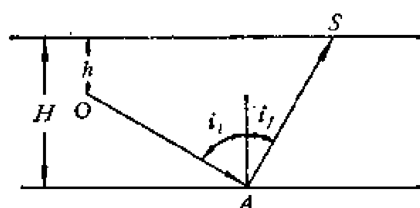


图 5.24

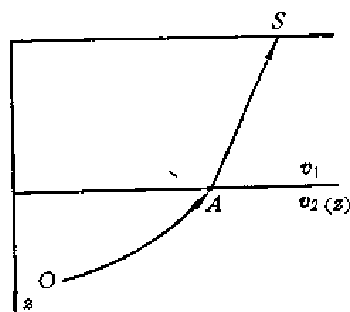


图 5.25

2. 震源在莫霍面下方 (图 5.25) 这时只有直达波一种.

射线: OAS (OA 段为曲线),

由于莫霍面下波速变化较大，所以在地壳下一般要考虑波速随深度的变化引起射线的弯曲.

走时方程:

$$t = t_{\widehat{OA}} + \frac{AS}{v_1},$$

$$t_{\widehat{OA}} = \int_H^h \frac{dz}{v(z)\cos i(z)} = \int_H^h \frac{dz}{v\sqrt{1-\sin^2 i(z)}}$$

$$= \int_H^h \frac{dz}{v(z)\sqrt{1-v(z)^2C^2}} = \int_H^h \frac{dz}{v^2(z)\sqrt{\frac{1}{v(z)^2}-C^2}}, \tag{10}$$

其中

$$C = \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i(z)}{v(z)} = \text{常数}. \tag{11}$$

而

$$AS = \frac{H}{\cos i_1} = \frac{H}{\sqrt{1-v_1^2C^2}},$$

$$t = \int_H^h \frac{dz}{v(z)^2\sqrt{\frac{1}{v(z)^2}-C^2}} + \frac{H}{v_1^2\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}, \tag{12}$$

$$\Delta=\int_H^h \tan i(z)dz+H\operatorname{tg} i_1=\int_H^h \frac{Cdz}{\sqrt{\frac{1}{v(z)^2}-C^2}}+\frac{CH}{\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}. \tag{13}$$

(12)、(13) 便为以 C 为参数的走时方程.

讨论: 在莫霍面上还会产生折射转换波,但我们上面给出 $v(z)$ 与 v_1 时并没有限定波的性质, 因此折射转换波的走时方程仍是 (12)、(13), 只要方程中的 v 值取相应的波的波速即可.

二、双层地壳模型

1. 震源在康腊德面上方

① 直达波与康腊德面上的反射波,首波反射转换波的走时方程分别与单层模型中的 (1)、(2)、(3)、(7)、(9) 相同 (见图 5.26)

② 莫霍面上的反射波射线: $OABCS$ (图 5.26)

走时方程:

$$t=\frac{OA}{v_1}+\frac{AB}{v_2}+\frac{BC}{v_2}+\frac{CS}{v_1}=\frac{H_1-h}{v_1\cos i_1}+\frac{H_2}{v_2\cos i_2}+\frac{H_2}{v_2\cos i_2}+\frac{H_1}{v_1\cos i_1}$$
$$=\frac{2H_1-h}{v_1^2\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}+\frac{2H_2}{v_2^2\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-C^2}}, \tag{14}$$

其中

$$C=\frac{\sin i_1}{v_1}=\frac{\sin i_2}{v_2}, \tag{15}$$

$$\Delta=(H_1-h)\tan i_1+2H_2\tan i_2+H_1\tan i_1=\frac{(2H_1-h)C}{\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}+\frac{2H_2C}{\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-C^2}}. \tag{16}$$

(15)、(16) 便为以 C 为参数的反射波走时方程, 它们和单层模型反射转换波的走时方程 (7)、(9) 比较相似.

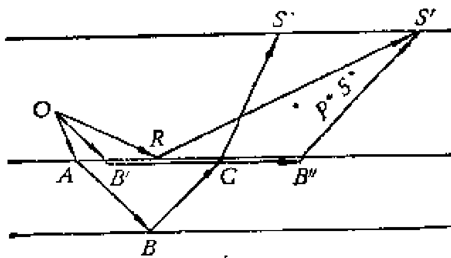


图 5.26

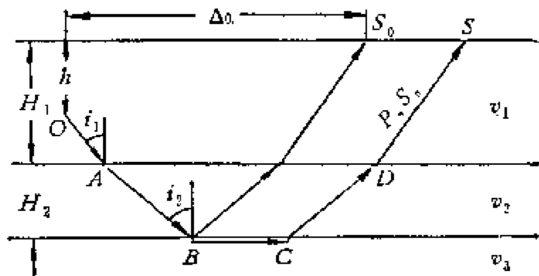


图 5.27

③ 莫霍面上的首波 P_n, S_n (图 5.27)

射线: $OABCDS$

走时方程:

$$t=\frac{OA+DS}{v_1}+\frac{AB+CD}{v_2}+\frac{BC}{v_3}=\frac{2H_1-h}{v_1\cos i_1}+\frac{2H_2}{v_2\cos i_2}$$

$$+\frac{\Delta-(2H_1-h)\tan i_1-2H_2\tan i_2}{v_3}=\frac{\Delta}{v_3}+\frac{2H_1-h}{v_1}\cos i_1$$

$$+\frac{2H_2}{v_2}\cos i_2=\frac{\Delta}{v_3}+(2H_1-h)\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_3^2}}+2H_2\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-\frac{1}{v_3^2}}, \tag{17}$$

其中

$$\frac{\sin i_1}{v_1}=\frac{\sin i_2}{v_2}=\frac{1}{v_3}. \tag{18}$$

由 (17) 知其走时曲线为直线。

讨论：首波在 $\Delta>\Delta_0$ 后出现 (图 5.27)

$$\Delta_0=(2H_1-h)\tan i_1+2H_2\tan i_2=(2H_1-h)\frac{v_1}{\sqrt{v_3^2-v_1^2}}+2H_2\frac{v_2}{\sqrt{v_3^2-v_2^2}}. \tag{19}$$

2. 震源在康腊德面与莫霍面之间(图 5.28)

(1) 直达波(折射波)

射线：OAS (图 5.28)

走时方程：

$$\begin{cases} t=\dfrac{h-H_1}{v_2\cos i_2}+\dfrac{H_1}{v_1\cos i_1}=\dfrac{h-H_1}{v_2^2\sqrt{\dfrac{1}{v_2^2}-C^2}}+\dfrac{H_1}{v_1^2\sqrt{\dfrac{1}{v_1^2}-C^2}}, & (20)\\ \Delta=(h-H_1)\dfrac{C}{\sqrt{\dfrac{1}{v_2^2}-C^2}}+\dfrac{H_1C}{\sqrt{\dfrac{1}{v_1^2}-C^2}}. & (21)\end{cases}$$

其中 C 的定义见 (15) 式。

折射转换波的走时方程同法可得。

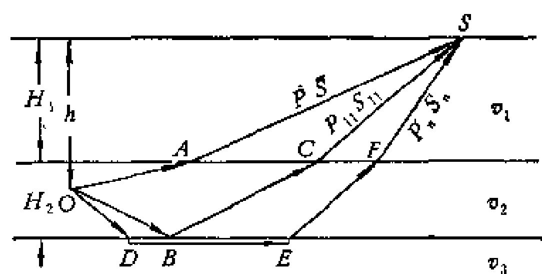


图 5.28

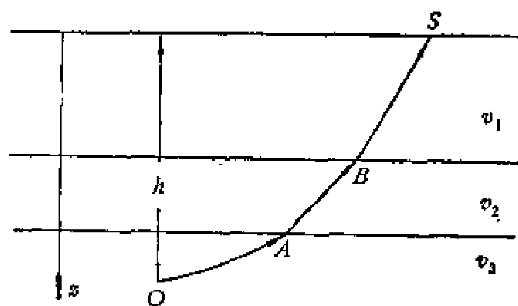


图 5.29

(2) 莫霍界面上的反射波 P_{11}, S_{11}

射线：$OBCS$ (图 5.29)

走时方程：

$$t=\frac{H_1+2H_2-h}{v_2^2\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-C^2}}+\frac{H_1}{v_1^2\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}, \tag{22}$$

$$\Delta=(H_1+2H_2-h)\frac{C}{\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-C^2}}+\frac{H_1C}{\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}. \tag{23}$$

反射转换波及反射后的折射转换波走时方程同法可得.

(3) 莫霍面上的首波 P_n、S_n

射线：$ODEFS$

走时方程：

$$t=\frac{\Delta}{v_3}+(H_1+2H_2-h)\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-\frac{1}{v_3^2}}+H_1\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_3^2}}, \tag{24}$$

讨论：与前面类似，P_n 或 S_n 出现的最近距离为

$$\Delta_0=\frac{H_1v_1}{\sqrt{v_3^2-v_1^2}}+(H_1+2H_2-h)\frac{v_2}{\sqrt{v_3^2-v_2^2}}. \tag{25}$$

3. *震源在莫霍面下*(图 5.29)

设壳下波速为 $v(z)$，与单层模型相似，同样有：

$$\begin{cases} t=\int_{H_1+H_2}^{h}\frac{dz}{v^2(z)\sqrt{\frac{1}{v(z)^2}-C^2}}+\frac{H_2}{v_2^2\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-C^2}}+\frac{H_1}{v_1^2\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}, & (26)\\ \Delta=\int_{H_1+H_2}^{h}\frac{Cdz}{\sqrt{\frac{1}{v(z)^2}-C^2}}+\frac{CH_2}{\sqrt{\frac{1}{v_2^2}-C^2}}+\frac{CH_1}{\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-C^2}}. & (27)\end{cases}$$

折射转换波的走时方程与之完全相同.

至此，我们给出了单层，双层地壳模型中各种近震体波的走时方程，并作了简单讨论.只要掌握了单层模型中的公式推导方法，其他各种情况乃至在地面与莫霍界面上的多次反射波均可用举一反三的方法得到.

三、走时曲线(走时表)的应用

(1) 它是分析，鉴定地震记录中震相的重要依据：

将地震图上的各震相与理论走时曲线对比，即对比记录震相的到时差与走时曲线上各种波的到时差，就能有助于分析鉴定震相，如能从许多台的记录中作出震相的实测走时曲线，再与理论曲线对比，则证据更为充分.

(2) 研究地球结构：

从某地区实测的走时曲线是研究该地区地壳结构及其性质的重要资料． 例如从 P_n，S_n 波的走时曲线斜率就能知道壳下上地幔的波速，从反射或首波的走时曲线可研究地壳厚度等.

(3) 与走时曲线相应的各震相的走时表是确定近震参数的重要资料．具体怎样利用

走时表交切震中,以后还要详细介绍.

(4) 用来求波的视速度或出射角:

设地震波射线方向为 BS' (图 5.30), 出射角为 e, 称为真出射角, 以区别于从地表运动得到的视出射角 $\bar{e}$. 在 dt 时间内波前从 SB 到达 $S'B'$, 由图 5.30 易见 $BS' = vdt$ 而 $SS' = \bar{v}dt$, $\bar{v}$ 为视速度,即波前沿地面的传播速度. 而

$$\cos e = \frac{BS'}{SS'} = \frac{v}{\bar{v}}, \tag{28}$$

或

$$\sin i = \frac{v}{\bar{v}}. \tag{29}$$

而波前沿地面的传播速度实际上可以从两台站的震中距差 $d\Delta$ 除以记录到的同一种波(震相)的到时差 dt 得到. 即

$$\bar{v} = \frac{d\Delta}{dt}. \tag{30}$$

而 $\frac{d\Delta}{dt}$ 即为走时曲线上对应点的斜率 $\frac{dt}{d\Delta}$ 的倒数 (图 5.31) 因此走时曲线的斜率的倒数就是波的视速度,如再知道波的真速度 v, 就可从 (28) 式求得波的真出射角 e.

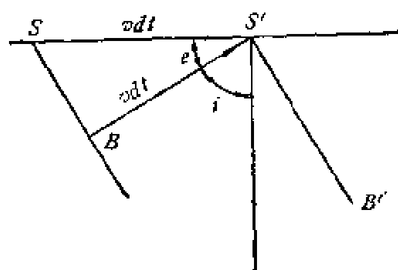


图 5.30

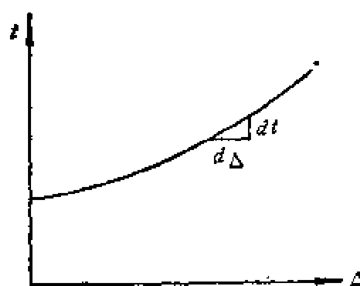


图 5.31

由此可见,走时曲线是地震研究中的重要原始资料,而它是经过许多地震记录的资料整理而总结出来的, 各地区由于地壳结构并不完全相同, 因而它们相应的近震走时曲线(走时表)在细节方面不一定完全相同,需要由各地区的近震资料来分别总结,并由此得到各地区的地壳及上地幔结构参数, 并可反过来再计算出各种波(震相)的理论走时曲线及表,以便应用.

第六章　球对称介质中的地震射线及远震地震波

地震发生后，地震波由震源传向四处．对于强震，全球各处都能用仪器记录到这种地震波．当震中距超过 1000 公里时，我们称记录到的地震为远震．远震地震波的研究对确定地震的震中位置，研究地震的震源参数，研究地球内部构造及其性质都起着十分重要的作用．通过远震记录能侦察到地下核爆炸．

在研究远震的地震射线时必须考虑到地球内部的波速随深度的变化，一般随深度的增加而增加，在一级近似下，可以把地球介质看做球对称的，因此地震波速只与离地心的距离 r 有关．

§6.1　球对称介质中的地震射线

一、地震射线方程

1.球对称介质中的折射定律

假设介质是由均匀的同心球质组成（图 6.1）各层中的波速分别为 v_1，v_2，地震射线在各层之间的界面上将发生折射，由史内尔定律有

$$\frac{\sin i_1}{v_1}=\frac{\sin i_1'}{v_2}. \tag{1}$$

$\triangle OA_1A_2$ 中应用正弦定理

$$\frac{\sin i_1'}{r_2}=\frac{\sin i_2}{r_1}. \tag{2}$$

(1)、(2) 中消去 i_1' 得

$$\frac{r_1\sin i_1}{v_1}=\frac{r_2\sin i_2}{v_2}. \tag{3}$$

当层数无限增加，速度随 r 连续变化时，射线则成为一条光滑的连续曲线，仍有

$$\frac{r\sin i}{v(r)}=\frac{R\sin i_0}{v_0}=p. \tag{4}$$

其中 R 为地球外径；i_0，v_0 分别为地表处的入射角和波速；R，i_0，v_0 都是常数；因此 p 也是常数．这就是球对称介质中的折射定律．同样的证明方法可得到，对水平成层的介质，当速度随深度而连续变化时有（图 6.2）

$$\frac{\sin i}{v(z)}=\frac{\sin i_0}{v_0}=p. \tag{5}$$

(4)、(5) 式中的 p 为射线参数，不同的 p 值对应不同的地表入射角，或者说对应不同形状的射线．而对同一条射线，p 为常数．

设有射线 EMS，其中 M 为对应向径 r 为最小的地方（图 6.3）．这样射线在 M 点必与以 r_M 为半径的圆相切，因此在 M 点 $i_M=\frac{\pi}{2}$．以此代入 (4) 式得

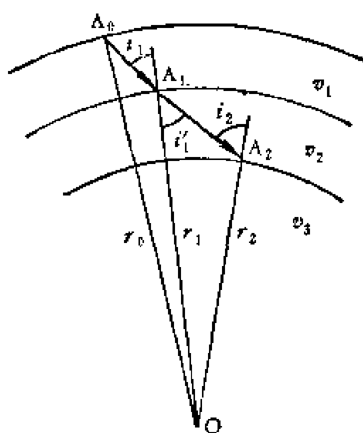


图 6.1

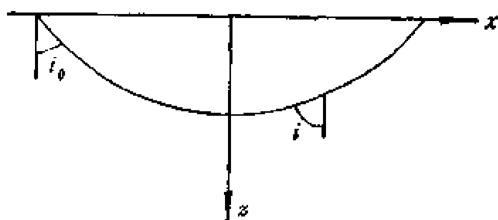


图 6.2

$$p = \frac{r\sin i}{v(r)}\bigg|_M = \frac{r_M}{v(r_M)}. \tag{6}$$

2. 射线方程

(4) 式中仅给出了 i 与 r 的关系，并没有给出射线的坐标方程，下面来求它. 由于介质的对称性，显然射线应在通过球心的平面内，事实上考虑射线的初始一小段 EE'(图 6.4)，可近似看做直线段，过球心 O 和 EE' 可作一平面 Q. 由于对称性，平面 Q 两面的介质完全对称，射线以后的路径一定仍在平面 Q 内而不会偏向任何一方，因此可以用平面极坐标 r、θ 来表达射线方程. 图 6.4 中 E 为震源，S 为台站，A 为射线上任一点，OA 便为向径 r，$\angle AOE$ 为角坐标 θ.

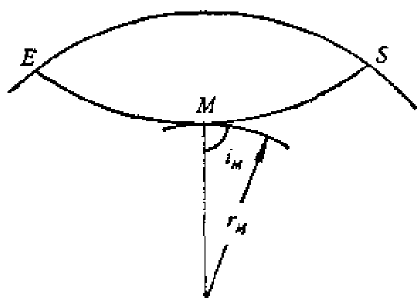


图 6.3

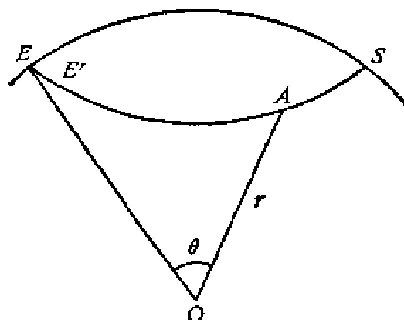


图 6.4

考虑射线上相邻两点 A, B，令 $AB = ds$ (图 6.5)，有

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{7}$$

$$\sin i = \frac{r d\theta}{ds}, \tag{8}$$

(7)、(8) 中消去 ds 得

$$d\theta = \pm \frac{\sin i}{\cos i}\frac{dr}{r}, \tag{9}$$

(4) 代入 (9) 消去 i 得

$$d\theta = \pm \frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}} dr, \tag{10}$$

这就是射线的微分方程. 正负号对应射线顶点两侧的不同段，对 EM 段(图 6.5)取负号，MS 段取正号. 对 (10) 式积分得

$$\theta(r) = \pm \int_{r_M}^{r} \frac{p dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}, \tag{11}$$

(11) 式给出了 $\theta \sim r$ 关系，这就是射线方程，其中 r_M 满足

$$p = \frac{r_M}{v(r_M)},$$

即 r_M 为射线顶点处的半径. 当 $r = r_M$，有 $\theta(r_M) = 0$，即 θ 角现在从射线顶点处起算，(11) 式中的 ＋、－ 号各代表射线顶点的前后侧段. (11) 式中的 p 为射线参数，与前面一样，不同的 p 对应不同的射线，对同一条射线，p 为常数. 注意 p 值不仅改变被积函数，而且影响积分下限 r_M.

3. 走时方程

地震波由 A 传到 B (图 6.5) 所需时间为

$$dt = \frac{ds}{v}. \tag{12}$$

由 (8)、(12) 中消去 ds，进一步与 (10) 联合消去 $d\theta$ 得 dt 与 dr 的关系，即

$$dt = \pm \frac{r dr}{v^2\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}. \tag{13}$$

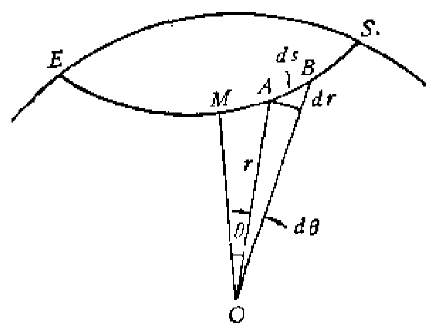


图 6.5

如果令 ES 对应的弧度角为 Δ，积分 (10)、(13) 得

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= 2p\int_{r_M}^{R} \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}, \\ t &= 2\int_{r_M}^{R} \frac{r dr}{v^2\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(14) 式为球对称介质中的走时方程. 它们以 p 为参数，(14) 中去掉了 (10)、(13) 中的正、负号，而积分后乘以 2，这样就包括了顶点 M 前后侧的两段. 当震源不在地表而有一定深度 h 时，可同样得到走时方程，只要把 (14) 中的因子 2 去掉，再将

$$\int_{r_M}^{R} \text{改成} \int_{r_M}^{R} + \int_{r_M}^{R-h} \text{即可.}$$

二、本多夫 (Benndorf) 定律

下面将给出走时曲线的斜率 $\frac{dt}{d\Delta}$ 与 p 的关系. 这样能从实测的走时曲线求出射线参

数 p 值. 设有由 E 出发，在同一平面内的两条相邻射线 $\widehat{EA}$ 和 $\widehat{EB}$ (图 6.6).

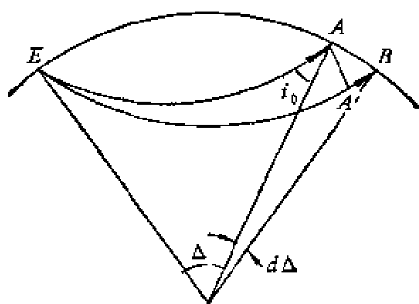


图 6.6

AB 之间的距离为 $d\Delta$ (注意 Δ 代表弧度角), AA' 为波前，经 dt 时间后，波前传到 B 处，设地表处的波速为 v_0，则有

$$A'B = ds = v_0 dt. \tag{15}$$

而

$$\frac{ds}{Rd\Delta} = \sin i_0. \tag{16}$$

(15)、(16) 中消去 ds 得：

$$R\sin i_0 d\Delta = v_0 dt,$$

再与 (4) 联合可得：

$$\frac{dt}{d\Delta} = \frac{R\sin i_0}{v_0} = p. \tag{17}$$

因此走时曲线 $t \sim \Delta$ 图上的斜率就等于射线参数 p，再次强调，注意 Δ 为弧度角.

$$\frac{Rd\Delta}{dt} = \bar{v}_0 \quad \text{为地震波的视速度}$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \quad \text{为地震波的真速度}$$

上两式与 (16) 联合可得

$$\sin i_0 = \frac{v_0}{\bar{v}_0}, \tag{18}$$

(18) 式的形式与近震中 § 5.6 (29) 式完全相似. (18) 式称为本多夫定律.

§ 6.2 不同的速度分布对射线形状及走时曲线形状的影响

在研究地震波的走时曲线时发现了许多特别的现象，如 p 波和 s 波在震中距为 5°—15° 时非常弱，在 15°—20° 出现圈环，p 波走时曲线在 142° 出现分支现象等等，这些现象激起了人们对地震波速度分布与走时曲线的关系作进一步的研究，从而对地球内部的地震波速度分布及地球内部的结构有了进一步的了解.

一、速度分布与射线形状间的关系

1. 射线的曲率

令 ρ 为射线上某点的曲率半径，ds 为弧元长，$d\omega$ 为过 ds 的两端所作射线的法线间的交角. 由曲率半径之定义

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{ds}. \tag{1}$$

由图 6.7 中 $\triangle ACD$ 有 $i = (i + di) + d\theta + d\omega$ 因此 $d\omega = -di - d\theta$，即

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{di}{ds} - \frac{d\theta}{ds},$$

但由 § 6.1 (8) 式

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin i}{r},$$

再对 § 6.1 (4) 式

$$\frac{r\sin i}{v}=p$$

求微分得:

$$\frac{\sin i}{v}dr+\frac{r}{v}\cos i di-\frac{r}{v^2}\sin i dv=0,$$

或

$$-\frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dr}=-\cos i\frac{di}{dr}-\frac{\sin i}{r}.$$

由

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{di}{ds}-\frac{d\theta}{ds},$$

将

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\sin i}{r}$$

代入

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{di}{ds}-\frac{\sin i}{r},$$

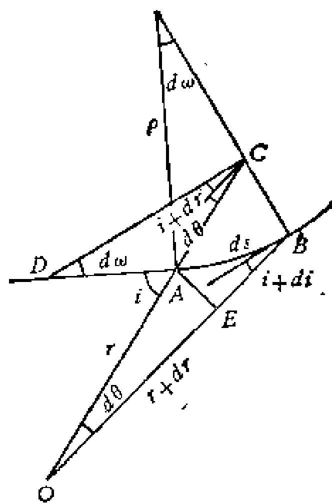


图 6.7

再由

$$ds=\frac{dr}{\cos i},$$

得

$$\frac{1}{\rho}=-\cos i\frac{di}{dr}-\frac{\sin i}{r},$$

因此

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dr}=-\frac{p}{r}\frac{dv}{dr}. \tag{2}$$

(2) 式为射线曲率的表达式. 如果从曲率的极坐标表示式出发

$$\rho=\pm\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{3}$$

由 § 6.1 (10) 得

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r}{p}\sqrt{\frac{r^2}{v^2}-p^2},$$

而

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{dr}{d\theta}=\frac{r}{p^2}\left(2\frac{r^2}{v^2}-p^2-\frac{r^3}{v^3}\frac{dv}{dr}\right).$$

将 $\frac{dr}{d\theta}$ 与 $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ 的表达式代入 (3) 化简后同样可得到 (2) 式.

2. 不同的速度分布与射线形状的关系

① 当 $\frac{dv}{dr}<0$，由 (2) 知 $\rho>0$ 射线是凸向球心的 (图 6.8 (*a*))，射线与以 O 为心，最低点的向径 r_M 为半径的圆外切；

② 当 $\frac{dv}{dr}=0$，即 $v=c=$ 常数，则由 (2) 知 $\rho=0$，射线为直线；

③ $\frac{dv}{dr}>0$，则 $\rho<0$，射线凹向球心，射线与以 O 为心，最低点的向径 r_M 为半径的圆内切；

④ $\frac{dv}{dr}=\frac{v}{r}>0$，积分可得 $v=cr$，c 为常数，将之代入 § 6.1 (4) 式得

$$p=\frac{r\sin i}{v}=\frac{\sin i}{c},$$

即

$$\sin i=cp=\text{常数},$$

因此射线的入射角处处相等，而由 § 6.1 (8)

$$\sin i=\frac{rd\theta}{ds}=\frac{rd\theta}{\sqrt{(rd\theta)^2+dr^2}},$$

因此

$$\frac{rd\theta}{\sqrt{(rd\theta)^2+dr^2}}=cp,$$

由此有 $dr=-brd\theta$，积分后得 $r=ae^{-b\theta}$，其中

$$b=\frac{1-c^2p^2}{c^2p^2},$$

a 为积分常数，因为 $\theta=0$ 时 $r=R$，所以 $a=R$，由此可见地震射线成螺旋线状卷入地心，但对应于 $p=\frac{1}{c}$ 的射线，由于 $b=0$，得 $r=R$，即此射线是以 R 为半径的圆，也就是沿地表前进 (图 6.8 (*b*))。注意，当震源不在地表而有一定深度时，还是能有许多射线出射到地面上来。

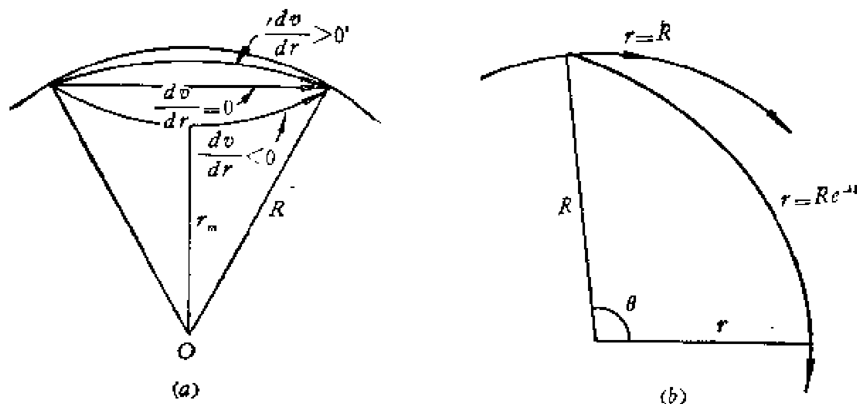


图 6.8

⑤ $\frac{dv}{dr} > \frac{v}{r}$，这时如果震源在地表，则全部射线卷入地心。

下面讨论走时曲线，显然对 $v = cr$ 的速度分布，当震源在地表时，只有一根沿地面行走的射线能被接收到，其余射线均卷入地心。所以相应的走时曲线为直线，令地面的波速为 v_0，这时应有 $\frac{dt}{d\Delta} = \frac{R}{v_0}$. 对 $\frac{dv}{dr} < \frac{v}{r}$，其射线如图 6.8($a$) 所示.（可凹向或凸向地心）显见当 Δ 越大，相应的射线 r_M 越小，其 i_0 也越小，由 § 6.1 (4) 知 p 值也越小，即 $\frac{dp}{d\Delta} < 0$，而由 §6.1 (17) $\frac{dt}{d\Delta} = p$，所以

$$\frac{d^2t}{d\Delta^2} = \frac{dp}{d\Delta} < 0,$$

因此走时曲线总是凹向 Δ 轴的（图 6.10）.

当 $\frac{dv}{dr} = 0$，即 $v = v_0 =$ 常数时可得 $t = \frac{2R}{v_0} \sin\frac{\Delta}{2}$.



图 6.9

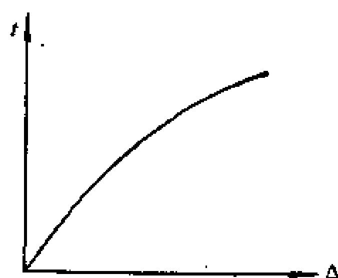


图 6.10

二、速度异常带及间断面的影响

对实测的走时曲线的研究表明，尽管一般地震波的速度随深度的增加而增加，即 $\frac{dv}{dr} < 0$，但地球内部还存在许多速度异常带及间断面，因此有必要来讨论它们对射线形状及走时曲线的影响，这里仅作定性的讨论。

1. 低速层

设有速度分布

$$\begin{cases} \frac{dv}{dr} < \frac{v}{r} & \text{当 } R \geqslant r > r_1,\ r < r_2, \\ \frac{dv}{dr} > \frac{v}{r} & \text{当 } r_1 > r > r_2, \end{cases}$$

即在 $r_1 > r > r_2$ 层内，速度不但随 r 的减小而减小，而且减小得相当快. 见图 6.11 (a)，射线 EA 的最低处 $r_M = r_1$，而从 E 处进一步向下射出的射线，也就是 i_0 更小的射线进入 r_1 到 r_2 的低速层后便卷向地心，直到射线穿过 $r = r_2$ 直到 $r = r_3$ 处才出现最低点，然后弯向上射到地面 B 处，r_3 满足 $\frac{v(r_3)}{r_3} = \frac{v(r_1)}{r_1}$，这时地面上 AB 段便收不到地震波，对应的走时曲线便在相应的震中距处出现一段空档（图 6.11 (b)).

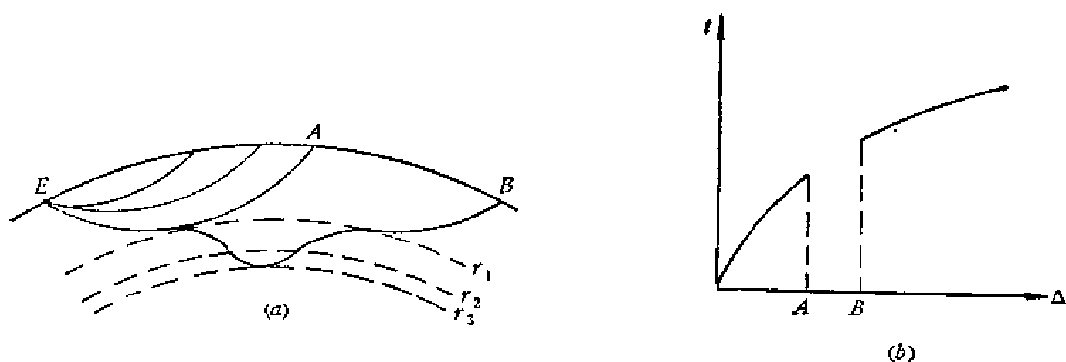


图 6.11

2. 高速层

设在 r_1 到 r_2 的层中速度随深度的增加要比其上下要快些．即有

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r_2<r<r_1} < \left.\frac{dv}{dr}\right|_{\substack{r>r_1\\ r<r_2}} < 0,$$

由 (2) 可见在 r_1 与 r_2 之间的射线曲率要大些，这样会使射线到达地面时发生密集的现象，甚至汇集到同一点出射 (图 6.12(a))，所对应的走时曲线在相应处曲率加大以至出现角点 (图 6.12 (b))．

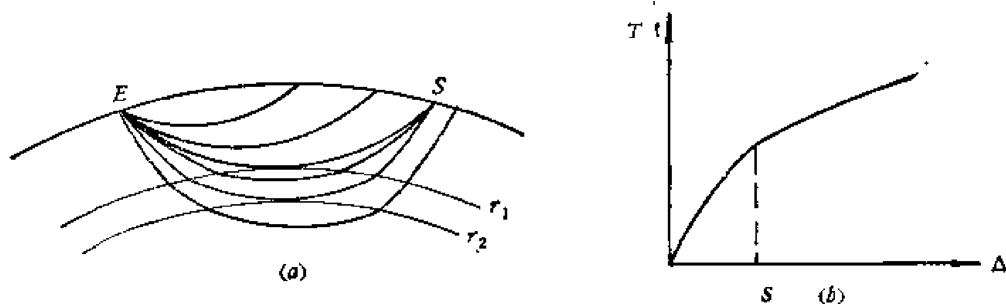


图 6.12

当 r_1 到 r_2 的层中速度随深度的增加而增加得更快时，会发生射线的交叉，即射得更深的射线到达地面出射点的震中距反而比较小 (图 6.13(a))，这时走时曲线发生迴折圈，图 6.13 (b)．

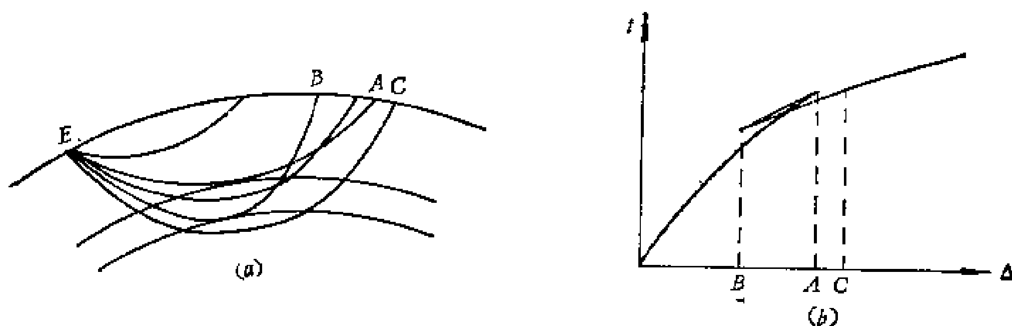
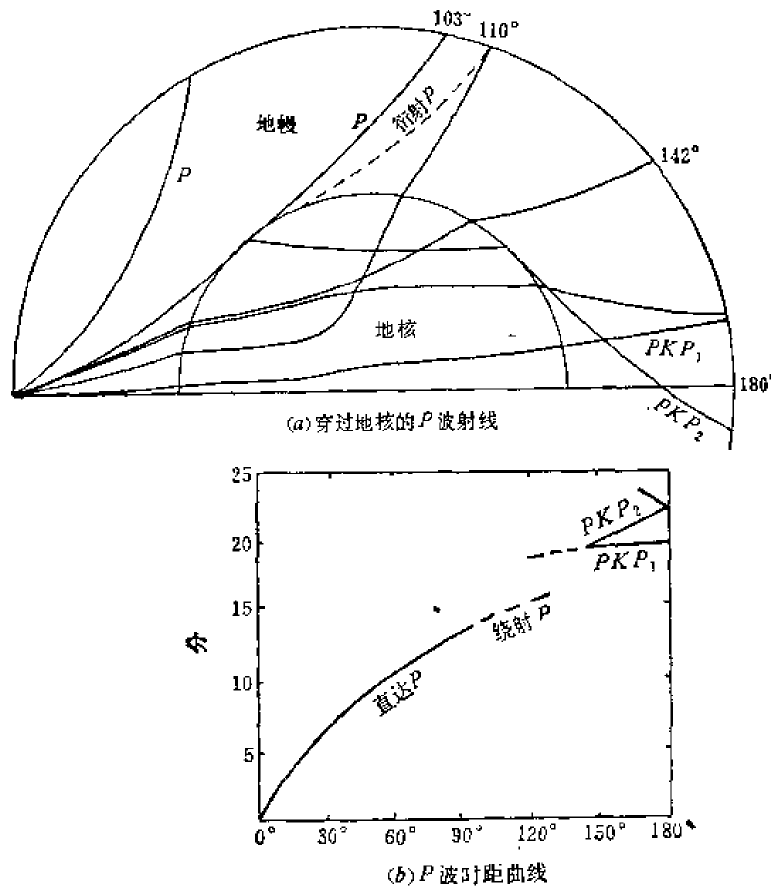


图 6.13

3. 低速间断面

当分界面上下波速发生突变时称为间断面. 而所谓低速间断面是指在间断面的上、下都有 $\frac{dv}{dr}<0$，而间断面下的波速小于间断面上的波速. 这时射线在低速间断面上发生折射（图 6.14(a)），与低速层的效应相似，走时曲线也会出现一段空档. 地球内部最明显的低速间断面为离地面深度为 2900 公里处的地幔与地核的分界面. 在其上部波速为 13.6 公里/秒，而其下则突降到 8.1 公里/秒，这时走时曲线不但出现空档，而且由于地核的"焦散"作用，使穿过地核的波对应的走时曲线分为二支，射线与走时曲线的对应关系见图 6.14 (a) 和 (b).



(a)穿过地核的 P 波射线

(b) P 波时距曲线

图 6.14

4. 高速间断面

高速间断面是指在间断面下的波速要大于其上的波速，在间断面处波速有一个突增. 我们仍讨论间断面上方和下方均有 $\frac{dv}{dr}<0$ 的情况. 射线及相应的走时曲线见图 6.15 (a) 和 (b). 这时走时曲线也出现迴折圈（图 6.15 (b)），但与高速层情况不同，迴折圈一直延伸到 $\Delta=0$ 处，但分支点不在 $\Delta=0$ 处而在 B 点，对应于 B 点的射线在高速层正好处于临界角，OA 段相当于直达波，AG 段相当于反射波，GA 段在 B 点开始分叉，BD 段

相当于折射波，B 点相当于在间断面上开始出现全反射的临界情况，图上的点划线相当于沿间断面的绕射波，点划线也通过 B 点，并在 B 点与曲线 AB，BD 相切．走时曲线的空档、迴折和分叉现象已为大量的地震观测所证实，对它们的详细分析表明，地球内部的这些速度异常和间断面是确实存在的．

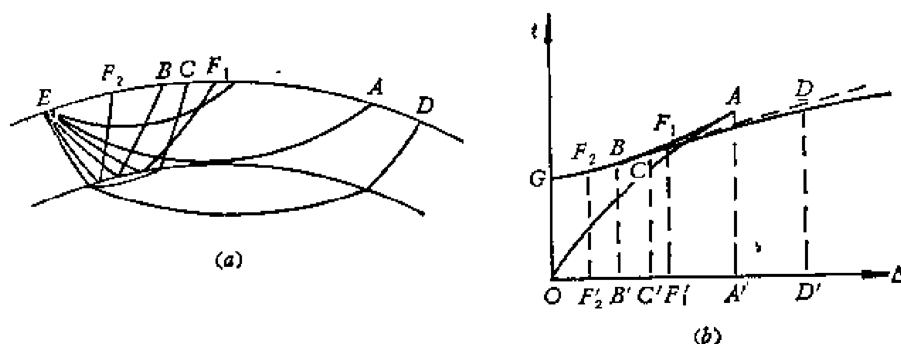


图 6.15

§ 6.3 地球内部的地震波速度分布、远震的地震射线和走时曲线

地球内部的地震波速度分布是根据大量的地震记录资料归纳出来的走时曲线计算求出的，由得到的速度分布能对许多未发现和认识的地震波(震相)作出预言，并为实践观测所证实．正是这种实践、认识、再实践的反复过程，使我们逐渐加深了对地球内部某些性质的认识．

目前一般认为地球大致上可分为三层，地壳、地幔和地核，地球内部的地震波速度分布如图 6.16 (a)、(b) 所示，图中没有包括地壳．不同的作者得到的速度分布大致相同，但在细节上略有差别．

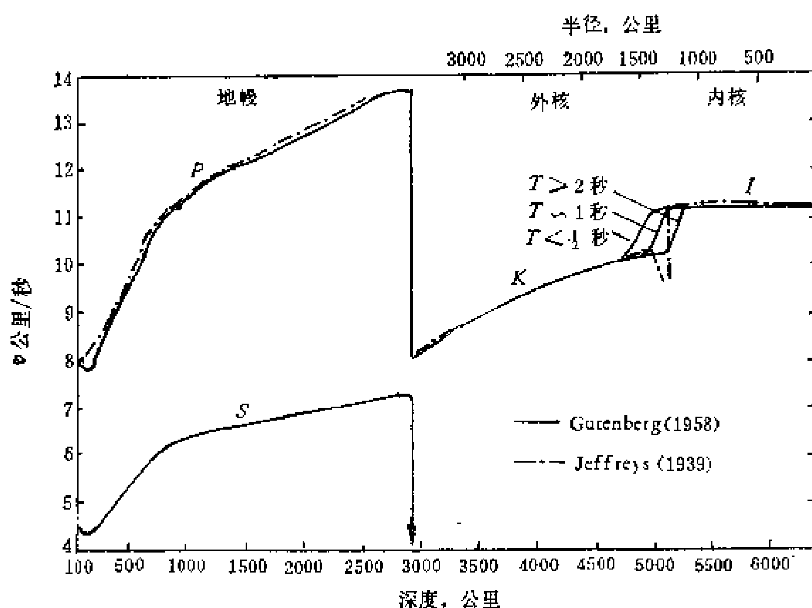


图 6.16 (a) 地球中纵波 (P, K, I) 和横波 (S) 的速度 (T 是周期)[6]

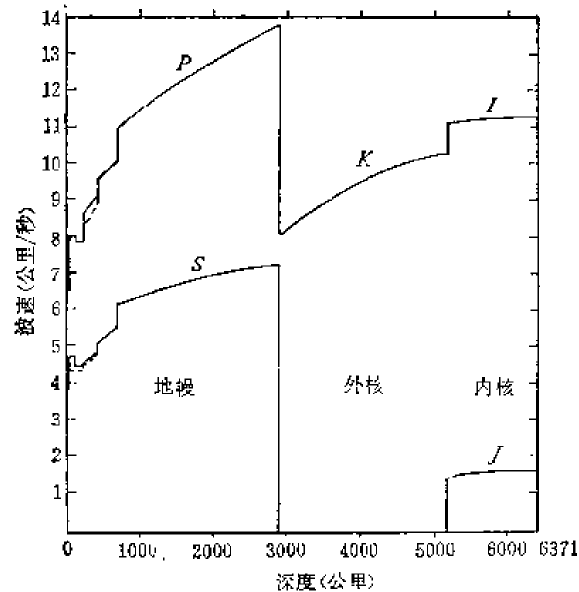


图 6.16 (*b*) 地球内部 *P* 波和 *S* 波的波速[51]

一、地幔折射波和地幔

大量的地震观测表明，*P* 波振幅从震中距 Δ 为 5° 开始迅速减小，至 8° 到 15° 达到最小，以后随 Δ 的增加而增大，到 19° 后呈正常衰减(图 6.17(*a*))相应 *S* 波振幅在 8° 开始减小，10° 到 15° 达最小，至 19° 又回到极大值，以后呈正常衰减 (图 6.17(*b*)). 正如前面 § 6.2 中所讨论的，*P* 波和 *S* 波影区的出现说明在地幔中的某一深度范围内出现波速随深度的增加而减小，亦即出现低速层. 计算表明，这个深度大致在 200 公里或更浅一些的地方，因地区的不同而有差异. 古登堡根据地震资料，算出了从地面算起到 600 公里深处的速度分布(图 6.18)，图中双箭头代表莫霍面处的速度值的范围.

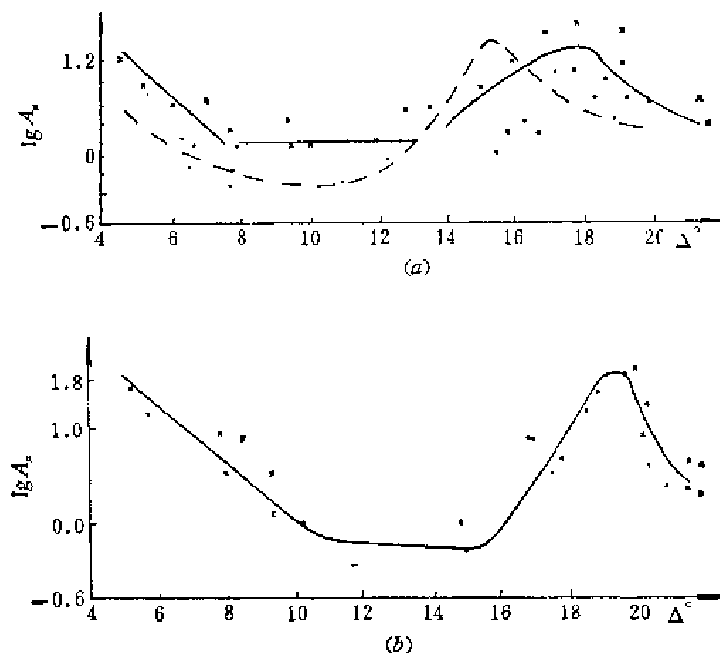


图 6.17

从我国的地震资料得到，P 波的影区大致在 6°—15°，S 波影区大致在 7°—17°，因地而异. 有人将低速层与所谓“软流层”相联系，认为在这个深度由于温度随深度的增加而增加，使物质达到接近于熔化的状态，同时使地震波速度也有所减低，而该层中物质的“软化”可能就是产生重力均衡作用的原因，由于物质在水平方向的缓慢流动从而使重力达到均衡状态.

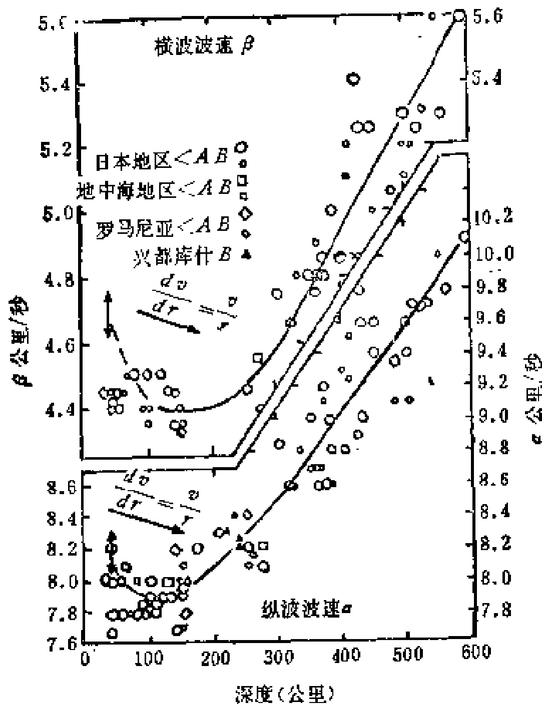


图 6.18　纵、横波速随深度的变化[6]

P，S 波走时曲线在 Δ 为 20° 左右出现转折，同时在 16° 之后初始 P，S 波之后常可见几个强脉冲（或者说震相）出现，我国的地震工作者曾作出了类似于图 6.15 (b) 的走时曲线，由此认为在相应的大约 400 公里深度有高速间断面存在. 一般也有称为 20° 间断面，因为初至 S 波（或 P 波）的走时曲线转折点在 Δ = 20° 处. 20° 间断面的存在也许并不是全球性的，也有人认为在 400 公里深度处仅存在速度梯度 $\frac{dv}{dh}$ 的不连续增加，而速度或多或少是连续的.

莫霍面到 2900 公里深度处称为地幔，又可分为几层，下面分层介绍.

莫霍面到 410 公里深处称为地幔的 B 层，又称为上地幔. B 层内存在低速层，B 层底面是高速间断面或者速度梯度间断面(二级间断面)，B 层的结构并不均匀，这一层性质的研究对弄清地壳运动的动力来源，研究地震的成因及对地震震相的分析都有十分重要的意义.

走时曲线的曲率在 Δ = 45° 处有明显的减小，计算表明相应于速度梯度 $\frac{dv}{dh}$ 在 950 公里深度有明显的减小，因此可能这里是个二级间断面. 410 公里到 950 公里深度范围称为 C 层，但也有作者(古登堡)把 200 公里到 950 公里划为 C 层. C 层中的速度梯度比较大，也就是速度随深度的增加比较快.

950 公里到 2900 公里深度范围为 D 层，这层的速度梯度没有 C 层大，有时又可分为二层 D' 层和 D'' 层，其中 D'' 为 2800 公里—2900 公里，为过渡层，此层中速度梯度明显减小，甚至达到负值.

二、通过地核的波与地核

2900 公里深度为地核与地幔的分界面，2900 公里深度以下为地核. P 波速度从地幔底部的 13.6 公里/秒一下降到 8.1 公里/秒，同时地核中不能通过 S 波，因而认为这里的物相类似于液体. 地核与地幔的分界面对 P 波是低速间断面，而对 SV 波折射入地核的转换 P 波则是高速间断面（见图 6.16）. P 波和 S 波在地核表面的反射波经常十分清晰地记

录到，称为 PcP 和 ScS 及 PcS、ScP，其中小 C 表示在地核表面经过一次反射，P 波进入地核后会发生折射，进入地核的那一段称为 K，是纵波性质，进入地核的折射波记为 PKP、SKS、PKS、SKP 等等. PKS 表示进入地核前为纵波，而从地核回到地幔后为横波（且为 SV 波），余类推.

进入地核的波的走时曲线十分复杂，同时有证据表明地核中还有内核、外核之分，外核的上部称为 E 层，外核底部为过渡带，称为 F 层，捷弗里斯得到的结果是 F 层中速度起先随深度的增加而下降，而后在内地核的界面上突然增大，而古登堡认为 F 层中速度随深度有一个渐进的增大而不存在初始的下降. 内地核表面的半径为 1200 公里. 内地核称为 G 层，其波速随深度有极小的增加，直到地心.

进入地核中的地震波射线如图 6.19 所示，图 6.19 仅给出了 PKP 的射线，相应的走时曲线如图 6.20 所示. 图 6.19 中射线 A 与图 6.20 中 A 点相对应，类似有 $B—B$、$C—C$ 一一对应，问题是图 6.20 中走时曲线中的 C 点位于什么地方，如果位于 170° 左右，则有利于捷弗里斯的结论，如 C 点仅在 150° 左右，则有利于古登堡的结果，B 点处由于射线的汇

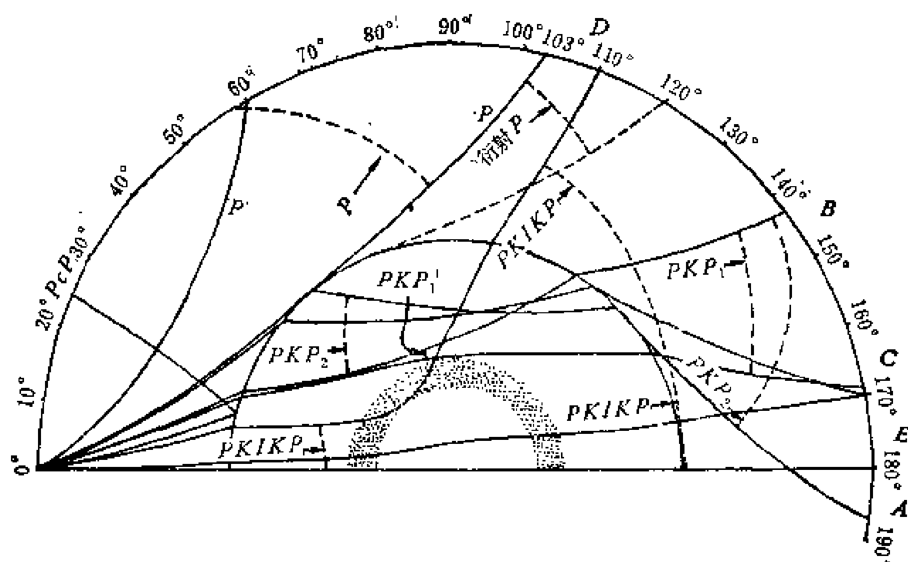


图 6.19[6]

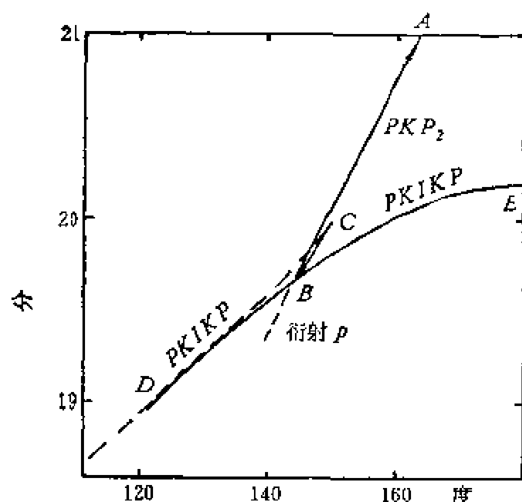


图 6.20 起始点为地表并通过地核的纵波射线的走时曲线[6]

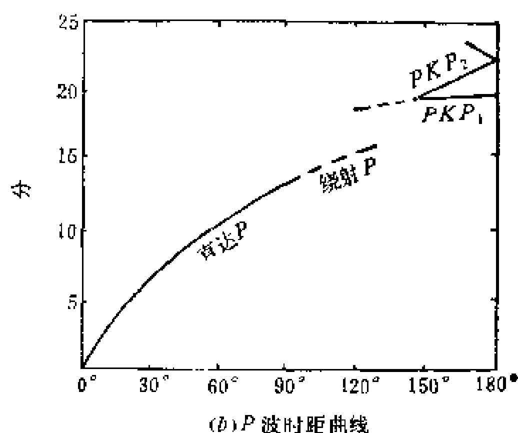


图 6.21 P 波时距曲线

集而振幅特别大，也就是在 143° 处 *PKP* 振幅特大，走时曲线 *DE* 段对应的射线应记为 *PKIKP*，这是通过内核的射线．而 *AB* 段记为 PKP_2，*BC* 段记为 PKP_1，PKP_1 实际上是比较弱的，通常的走时曲线图表上仅给出 *AB* 段和 *DBE* 段而把 *AB* 段记为 PKP_2，*BE* 段记为 PKP_1，*DB* 段记为 P''（图 6.21），这是我们应当注意的．

在 105° 处，地幔中的地震射线与外核表面相切，以后便折入地核在 190° 处出射，105° 到 143° 为 *P* 波的影区，但实际上由于 *F* 层的作用，使 *PKIKP*，能在110°出射（图 6.19 射线 *D*），而由于波沿地核表面的衍散（绕射），在 105° 以外也能记到微弱的 *P* 波（图 6.21 中虚线部分）．

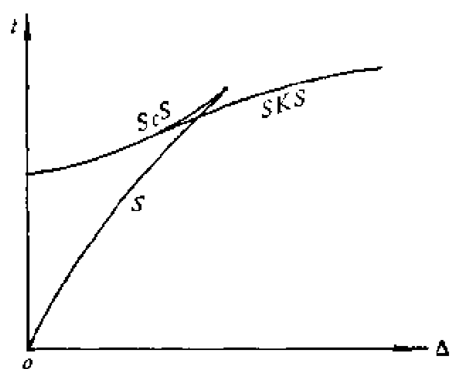


图 6.22

已观察到了作为横波通过内核的震相，记为 *PKJKP*，因此认为内核为固体性质．

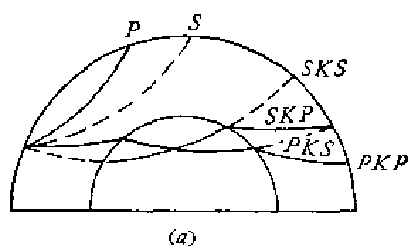
外地核不能通过 *S* 波，但 *S* 波入射到外核表面时其中 *SV* 成分能转变为 *P* 波折射入地核，再作为 *S*(*SV* 成份)或 *P* 折射回地幔内，记为 *SKS* 或 *SKP*，同样也有 *PKS*．*S* 波走时曲线在 70° 到 110° 范围内组成圈环（图 6.22），各分支分别记为 *S*、*ScS*、*SKS* 走时曲线．之所以构成圈环是由于外核表面下的 *P* 波速度大于其上的 *S* 波速度因而形成高速间断面的缘故．

三、各种反射波

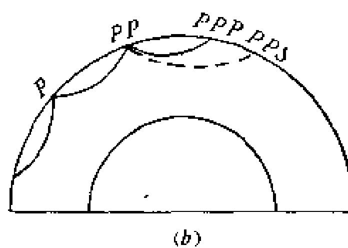
在地表反射一次的波记为 *PP*、*SS*、*PS*、*SP* 等等．*PS* 表示反射前为 *P* 波，反射后为 *S* 波（且为 *SV*）、（图 6.23）．地表上的多次反射波可类推，如 *PPP*、*PPS* 等等．

从地核内，在外核表面上的反射波可记为 *KK*，如 *PKKP*、*PKKS* 等等．也可有多次反射波．

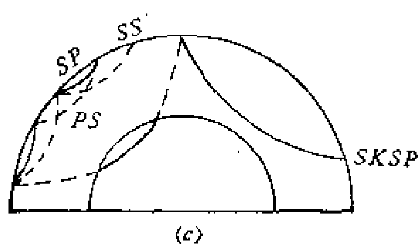
前面说过，从地幔内在外核表面上的反射波记为小 *C* 如 *PcP*、*ScS*、*PcS* 等等．也可有 *PcP PcP*，表示外核表面反射一次，地表反射一次，再在外核表面反射一次的纵波．



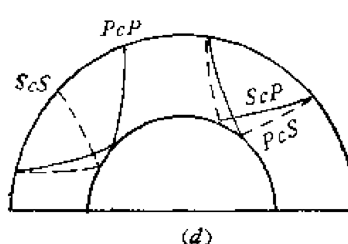
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

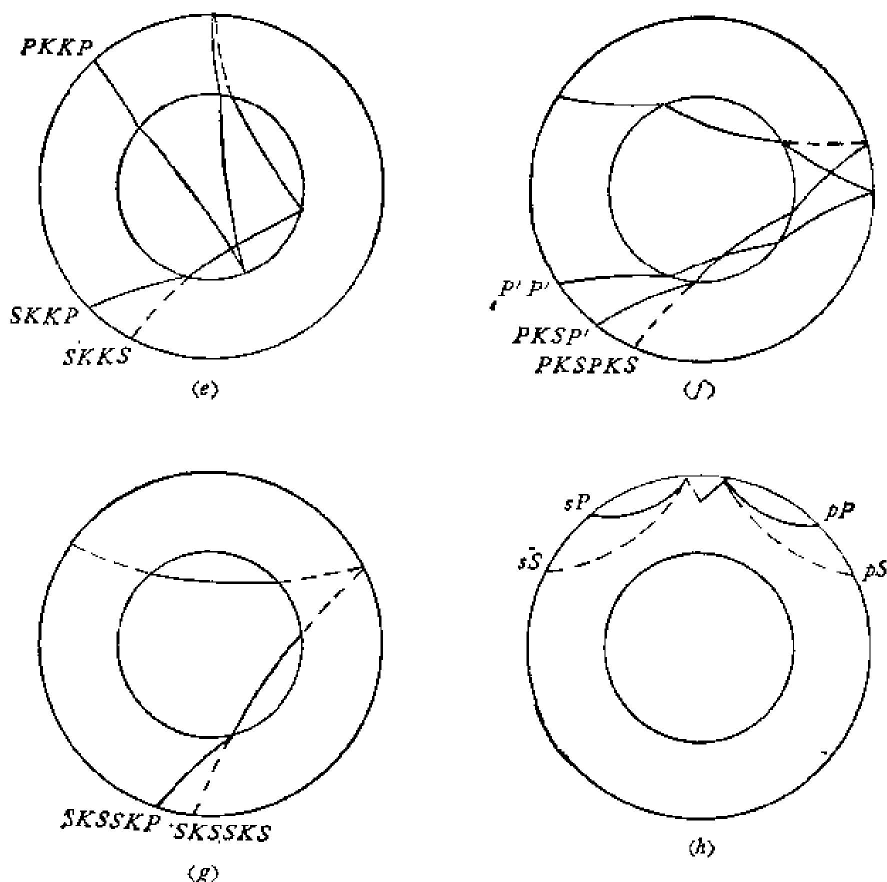


图 6.23　体波的各种远震震相的射线路径示意图

对深震，可记到在震源附近的地表反射一次的波，记为小 P 或小 S，如 $_pP$、$_sP$、$_pS$、$_sS$ 等等。其中 $_sP$ 表示反射前为 S 波，反射后为 P 波，余可类推.

远震震相十分复杂，其对应的走时曲线及其振幅、周期的变化规律各不相同，后面将以震中距为线索对各震相作进一步的介绍.

§ 6.4　由走时曲线求地球内部地震波速度分布

前面讲到，对大量的地震观测资料进行分析归纳后得到各地震波的走时曲线，据此再通过一些计算便能得到地球内部地震波速度分布，下面将介绍速度分布的求法.

一、拐点法(古登堡法)

这个方法是利用走时曲线的拐点处与从震源处水平方向射出的射线相对应，据此可求出震源处的波速.

从 § 6.1(4) 有

$$\frac{r_h \sin i_h}{v_h} = \frac{r \sin i}{v} = p. \tag{1}$$

从 § 6.1(17) 有

$$p = \frac{dt}{d\Delta}. \tag{2}$$

(1) 式中的 h 代表取震源处的参数，震源深度为 h. 而 $r_h = R - h$、$v_h = v(r_h)$ 都是常数，从震源向不同方向射出的射线，i_h 值不同 (图 6.24)，相应由 (1) 知其射线参数 p 值也各不相同，当 $i_h = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{r_h \sin i_h}{v_h}$ 达到极大值，由 (1) 知射线参数 p 也达到极大值，因此有

$$\left.\frac{dp}{d\Delta}\right|_{i_h=\frac{\pi}{2}} = 0. \tag{3}$$

(2) 代入 (3) 得

$$\left.\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|_{i_h=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

而

$$\frac{d^2t}{d\Delta^2} = 0$$

相应于走时曲线的拐点 (图 6.25)，因此走时曲线的拐点与从震源处水平射出 $\left(i_h = \frac{\pi}{2}\right)$ 的射线相对应.

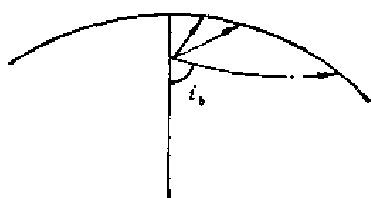


图 6.24

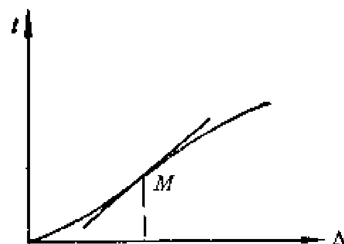


图 6.25

这样，我们只要求得某地震的震源深度 h 及由观察分析归纳得到其走时曲线 (图 6.25)，找出走时曲线的拐点 M，并确定该点的走时曲线的斜率$\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M$，由 (1) 及 (2) 得

$$\frac{r_h \sin i_h}{v_h} = p = \left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M,$$

而对应M点有 $i_h = \frac{\pi}{2}$，因此

$$v_h = \frac{r_h}{\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M} = \frac{R-h}{R}\frac{1}{\left(\frac{dt}{Rd\Delta}\right)_M} = \frac{R-h}{R}\bar{v}_M. \tag{4}$$

其中 h 为震源深度，$\bar{v}_M = \left(\frac{Rd\Delta}{dt}\right)_M$ 为走时曲线拐点处的视速度，R 为地球半径.

此方法原理清楚、方法简单、计算方便. 但只能求出 0—700 公里处的波速，因为再深处不发生地震，由于拐点处不易找准，得到的精度较差，它又要求对应每一个深度的地震就要总结出一条走时曲线，因而资料的分析工作量很大，最后它只能求得震源处的波速，其他地方的波速不能求得.

二、积分法(赫尔格罗兹-维歇尔特法)

由 §6.1 (6) 及 §6.1 (17)

$$p=\frac{r_M}{v(r_M)},\tag{5}$$

$$p=\frac{dt}{d\Theta},\tag{6}$$

其中 r_M 为参数为 p 的射线最低处至地心的距离. 而 (6) 中将 Δ 记为 Θ. 因此由时距曲线在某点的斜率,由 (6) 可求得出射到该处的射线参数 p, 如再知道该射线的 r_M 值,则由 (5) 式可求得 $v(r_M)$, 即 r_M 处的波速可得,因而问题的关键在于求 r_M. 由走时曲线方程 § 6.1 (14) 中的第一式

$$\Theta=2\int_{r_M}^{R}\frac{p\,dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2}-p^2}},\tag{7}$$

(7) 式中不但被积函数中含有 p 因而与 r_M 有关(见 (5) 式),而且积分限中也含有 r_M, 下面想法由 (7) 中解出 r_M 来. 令

$$\eta=\frac{r}{v},\tag{8}$$

由 (5)

$$\Theta=2\int_{\eta_M}^{\eta_0}\frac{p}{\sqrt{\eta^2-p^2}}\frac{d\ln r}{d\eta}d\eta,\tag{9}$$

其中

$$\eta_0=\frac{R}{v_0},\quad \eta_M=\frac{r_M}{v_M}=p,\tag{10}$$

R 为地球半径, v_0 为地表处波速, (9) 式两边乘以 $\dfrac{dp}{\sqrt{p^2-\xi^2}}$, 并对 p 从 ξ 积分到 η_0, 得

$$\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\Theta dp}{\sqrt{p^2-\xi^2}}=2\int_{\xi}^{\eta_0}dp\int_{p}^{\eta_0}\frac{p\dfrac{d\ln r}{d\eta}}{\sqrt{\eta^2-p^2}\sqrt{p^2-\xi^2}}d\eta.\tag{11}$$

交换 (11) 式右边二重积分的积分次序,由图 6.26 易见 (11) 式可化为

$$\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\Theta dp}{\sqrt{p^2-\xi^2}}=2\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{d\ln r}{d\eta}d\eta\int_{\xi}^{\eta}\frac{p\,dp}{\sqrt{(\eta^2-p^2)(p^2-\xi^2)}},$$

当 $\eta>p$ 有积分公式

$$\int_{\xi}^{\eta}\frac{p\,dp}{\sqrt{(\eta^2-p^2)(p^2-\xi^2)}}=\frac{\pi}{2}.$$

因而有

$$\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\Theta dp}{\sqrt{p^2-\xi^2}}=\pi\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{d\ln r}{d\eta}d\eta$$

$$=\pi\int_{r_M}^{R}d\ln r=\pi\ln\frac{R}{r_M}.\tag{12}$$

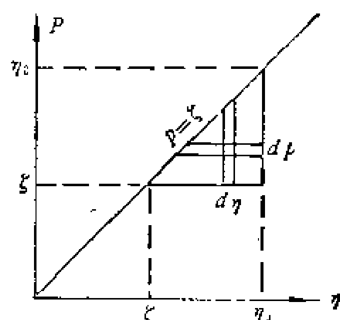


图 6.26

再来求 (12) 式左边的积分

$$\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\Theta dp}{\sqrt{p^2-\xi^2}}=\int_{\xi}^{\eta_0}\frac{\Theta d(p/\xi)}{\sqrt{(p/\xi)^2-1}}=\int_{p=\xi}^{\eta=\eta_0}\Theta d\left(\mathrm{ch}^{-1}\frac{p}{\xi}\right)$$

$$= \Theta \mathrm{ch}^{-1} \frac{p}{\xi} \Big|_{p=\xi}^{p=\eta_0} - \int_{\Theta_M}^{0} \mathrm{ch}^{-1} \frac{p}{\xi} d\Theta.$$

注意到 $p = \eta_0$ 即射线最低点向径为 R，即在地表，因此必 $\Theta = 0$，而对 $p = \xi$，有

$$\mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{\xi}{\xi}\right) = 0,$$

而对应的 $\Theta = \Theta_M$，因此

$$\int_{\xi}^{\eta_0} \frac{\Theta dp}{\sqrt{p^2 - \xi^2}} = \int_{0}^{\Theta_M} \mathrm{ch}^{-1} \frac{p}{\xi} d\Theta. \tag{13}$$

由 (12)、(13)

$$\ln \frac{R}{r_M} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\Theta_M} \mathrm{ch}^{-1} \frac{p}{\xi} d\Theta,$$

令

$$q = \mathrm{ch}^{-1} \frac{p}{\xi}, \tag{14}$$

则

$$\ln \frac{R}{r_M} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\Theta_1} q d\Theta. \tag{15}$$

从 (14) 有

$$\mathrm{ch}\, q = \frac{p}{\xi} = \frac{\dfrac{dt}{d\Theta}}{\left(\dfrac{dt}{d\Theta}\right)_M}. \tag{16}$$

而 $\dfrac{dt}{d\Theta}$ 可由走时曲线求得，因而可从 (16) 求得 q，从而可求出 (15) 式右方的积分，因此从 (15) 式求出 r_M 来．再由 (10) 式

$$\frac{r_M}{v(r_M)} = p = \left(\frac{dt}{d\Theta}\right)_M. \tag{17}$$

因此由 r_M 及 $\left(\dfrac{dt}{d\Theta}\right)_M$ 从 (17) 可求出与 r_M 相对应的 $v(r_M)$。

下面归纳一下求速度分布的具体步骤：

(1) 作出 $0 \sim \Theta$ 范围内的走时曲线，即 $t \sim \Theta$ 曲线，震源要取在地表上，否则前面的公式要略作修改；

(2) 由 $t \sim \Theta$ 曲线求曲线上的各点斜率，从而作出 $\dfrac{dt}{d\Theta}$ 曲线；

(3) 在 $0 \sim \Theta$ 范围内任取 $\Theta = \Theta_M$，求出 Θ_M 点对应的 $\left(\dfrac{dt}{d\Theta}\right)_M$；

(4) 将 $\dfrac{dt}{d\Theta} \sim \Theta$ 曲线中的 $0 \sim \Theta_M$ 段除以常数 $\left(\dfrac{dt}{d\Theta}\right)_M$，可得 $\dfrac{\dfrac{dt}{d\Theta}}{\left(\dfrac{dT}{d\Theta}\right)_M} \sim \Theta$ 曲线，从

而求出 $\mathrm{ch}^{-1}\left[\dfrac{\dfrac{dt}{d\Theta}}{\left(\dfrac{dT}{d\Theta}\right)_M}\right] \sim \Theta$ 曲线也就是 $q \sim \Theta$ 曲线；

(5) 在 $0 \sim \Theta_M$ 范围内求 $q \sim \Theta$ 曲线下的面积，即求 $\int_0^{\Theta_M} q d\Theta$；

(6) 从 (15) 式可求出 r_M，从而由 (17) 式可求出与 r_M 相对应的 $v(r_M)$ 来.

(7) 取不同的 Θ_M 值，重复上述 1—6 的过程，可求出不同的 r_M 值及与之相对应的 $v(r_M)$ 值来.

上述方法在具体应用时并不是用作图法而是用数值计算的方法，可以参见有关数值计算方法的资料，这里不再细述. 下面求平面情况下计算速度随深度分布的公式. 令 $r_M = R - h_M$, h_M 为深度，显然有 $h \ll R$, 从 (15) 得

$$\frac{1}{\pi R}\int_0^{L_M} q dL = \frac{1}{\pi}\int_0^{\Theta_M} q d\Theta = \ln\frac{R}{r_M} = \ln\frac{R}{R - h_M}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1 - \dfrac{h_M}{R}}\right) \simeq \ln\left(1 + \frac{h_M}{R}\right) = \frac{h_M}{R},$$

其中 L 为以长度(公里)为单位的震中距. 因此

$$h_M = \frac{1}{\pi}\int_0^{L_M} q dL, \tag{18}$$

其中

$$q = \mathrm{ch}^{-1}\left[\frac{\left(\dfrac{dt}{dL}\right)}{\left(\dfrac{dt}{dL}\right)_M}\right].$$

这就是平面情况下求最低点深度的公式. 从 (17) 得

$$\frac{R - h_M}{v(h_M)} = R\left(\frac{dt}{dL}\right)_M. \tag{19}$$

由 (19) 可得到与 h_M 相对应的 $v(h_M)$ 来.

应用前面的方法要注意以下几点:

(1) 由地震资料作走时曲线时，震源要取在地表，否则要化为震源在地表的情况，或扣除射线从震源深度到地表一段的 t 和 Δ, 从震源深度处向下计算波速分布；

(2) 公式 (15)、(18) 成立的条件是射线为一条连续的有最低点的曲线，且其时距曲线是单值的. 因此当地球内部存在间断面时可分段计算，射线全部在间断面上方时可按前述方法计算速度分布，当射线穿过间断面时可根据走时曲线的斜率求出射线的 p 值，并利用已知的间断面上方的速度分布由 § 6.1 (14) 式算出间断面以上的一段射线所对应的 t_a 和 Δ_a (注意，这时 § 6.1 (14) 中的积分限取为 $\int_{r_a}^{R}$, 其中 r_a 为间断面处的向径) 再求出 $t - t_a$、$\Delta - \Delta_a$ 来，不同的射线 p 值不同，从而 t_a, Δ_a 值亦不同. 如此可得到射线在间断面下部分的走时曲线，即 $(t - t_a) \sim (\Delta - \Delta_a)$ 曲线，现在我们仍可利用 (15) 式及 (17) 式求出速度分布了. 这就是所谓“剥壳法”，即去掉间断面以上一层外壳的影响.

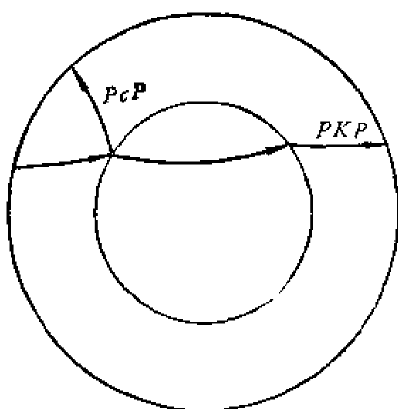


图 6.27

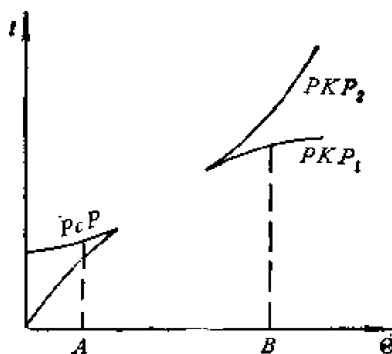


图 6.28

当记到间断面上的反射波时，可将进入间断面以下的折射波和间断面上的反射波的实测走时曲线相减，来得到间断面下射线部分的走时曲线。例如我们观察到地核界面上的反射波 PcP 和地核折射波 PKP，得到两者的实测走时曲线（图 6.27）找两条走时曲线相同斜率的地方，将它们对应起来，如在 PcP 走时曲线上取一点 A，求其斜率 $\left(\frac{dt}{d\Theta}\right)_A$，在 PKP 曲线上再找一点 B 使

$$\left(\frac{dt}{d\Theta}\right)_B = \left(\frac{dt}{d\Theta}\right)_A$$

（图 6.28），这样由 § 6.1 (17) 知两射线的 P 值相同，或到达地面的出射角相同，因而两条射线在地核界面以上的部分必完全相同（见图 6.27），由此

$$t_K = (t_{PKP})_B - (t_{PcP})_A,$$

$$\Theta_K = (\Theta_{PKP})_B - (\Theta_{PcP})_A,$$

从而得到 $t_K \sim \Theta_K$ 关系，这就是地核界面下的射线部分的走时曲线。

§ 6.5 球对称介质中地震波的振幅

下面将讨论球对称介质中地震波所激起的地表运动的振幅。

设有地震射线从震源 F 出发，到达地球表面 S 处（图 6.29）。在震源处，射线与半径的夹角为 i_1。设在单位立体角中震源所发出的某种类型波的能量为 I，则所有夹角在 i_1 到 $i_1 + di_1$ 之间的射线所携带的能量为 $2\pi I \sin i_1 di_1$。这些射线全部到达与 F 的角距（即以大圆弧来表示的震中距）为 Δ 到 $\Delta + d\Delta$ 之间的区域，它们在地球表面上占有的表面积为

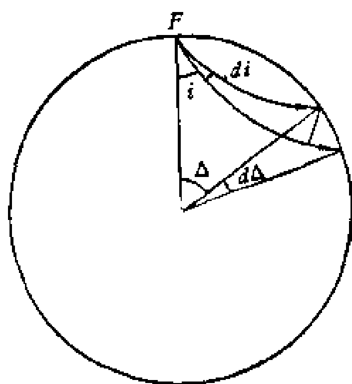


图 6.29

$$2\pi R_0^2 \sin \Delta |d\Delta|.$$

因为 $d\Delta$ 可能与 di_1 的符号相反，所以这里取了绝对值。R_0 为地球半径。因此这些射线所组成的在地表处的波前的单位面积上所通过的该种波的能量为

$$E(\Delta) = \frac{I \sin i_1}{R_0^2 \sin \Delta \cos i_0}\left|\frac{di_1}{d\Delta}\right|. \tag{1}$$

由 § 6.1 知如果令 $\eta = v/r$，其中 v 为波速，r 为相应的半径，则

$$\frac{dt}{d\Delta} = \eta_0 \sin i_0 = \eta_1 \sin i_1. \tag{2}$$

对上式求 $\dfrac{\partial}{\partial \Delta}$ 可得

$$\frac{d^2t}{d\Delta^2} = \eta_1 \cos i_1 \frac{di_1}{d\Delta}.$$

因此 (1) 式中的

$$\frac{\sin i_1}{\cos i_0}\left|\frac{di_1}{d\Delta}\right|$$

可化为

$$\frac{\sin i_1}{\cos i_0}\left|\frac{di_1}{d\Delta}\right| = \frac{\sin i_1}{\eta_1 \cos i_0 \cos i_1}\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right| = \frac{\eta_0}{\eta_1 G}\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|, \tag{3}$$

其中

$$G = (\eta_1^2 \cot^2 i_0 - \eta_0^2 \cos^2 i_0)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

因此有[2]

$$E(\Delta) = \frac{I\eta_0}{R^2\eta_1 \sin \Delta G}\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|. \tag{5}$$

§ 4.5 中讨论了弹性波的平均能流密度 W 与振幅之间的关系。设波速为 C，波形是振幅为 A 频率为 ω 的余弦波，延续时间为 τ。由 § 4.5 (20)、(21) 式知

$$W = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 A^2. \tag{6}$$

因此，单位面积的横截面上所通过的总能量为

$$E' = W_\tau = \frac{1}{2}\rho c\tau\omega^2 A^2. \tag{6'}$$

显然应有 $E(\Delta) = E'$，因此得

$$A^2 = D\frac{I\eta_0}{\eta_1 G \sin \Delta}\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|, \tag{7}$$

在前述假设下

$$D = \frac{2}{\tau\rho c\omega^2 R_0^2}. \tag{8}$$

上面给出了地震波的位移表达式。如要得到地表地动位移的表达式，还要求出地动位移的垂直分量 A_V 和水平分量 A_H 与入射波位移 A 之间的关系。在 § 13.1 中给出了这些关系的形式为

$$\left.\begin{aligned} A_V &= k_V A \\ A_H &= k_H A. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

并给出了 P 波、SV 波、SH 波所相应的 A_V、A_H 的具体表示式。由 (7) 式和 (8) 式立即可得到地表地动位移的表达式为

$$\left.\begin{aligned} A_V^2 &= Dk_V^2\frac{I\eta_0}{\eta_1 G \sin \Delta}\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|, \\ A_H^2 &= Dk_H^2\frac{I\eta_0}{\eta_1 G \sin \Delta}\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中 D、G、k_V、k_H 的表示式可见(8)、(4)及§13.1的有关公式.

从(11)式可看出,地动位移正比于$\left|\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|$. 由于

$$\frac{d^2t}{d\Delta^2}=\frac{dp}{d\Delta}$$

(见§6.1(17)式),因此地动位移的振幅也正比于$\left|\frac{dp}{d\Delta}\right|$. 从(11)式可见,它把地动的振幅与走时曲线的形状特征联系起来. 如果在某种地震波的走时曲线(t-Δ图)上,在某震中距处的$\frac{d^2t}{d\Delta^2}$值较大,则在该震中距处所对应的地震图上此种波的地动振幅也应较大. 因此,有时可以根据地震图上震相的幅度来帮助判断和分析震相. 并且可用来研究地球内部速度分布等地球介质性质.

第七章　面　　波

在震中距大于数百公里的地震记录图上，特别是远震记录图，在 S 波之后常可见到一连串长周期大振幅的规则振动，这在周期范围能达到 20 秒以上的中、长周期地震仪的记录图上十分明显（图 7.1）．这种振动的振幅可在记录图上达到最大，并且地震越大、震中距越大，这些波列的延续时间越长．但随着震源深度的增加而越来越弱，甚至不出现．详细的分析表明这是一种表面波，或称面波．面波是沿着两种介质的分界面（或层）传播的波，因此而得名．它的振幅一般随着离开界面（层）距离的增加而作指数衰减．如果它沿介质的自由表面（例如地表）传播，则振幅随着深度的增加而衰减．因此面波的能量是集中在界面（层）附近而沿着界面（层）传播的．

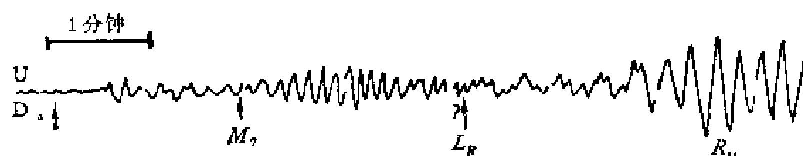


图 7.1　1962 年 5 月 2 日琉球群岛地震，$M = 5.5$，$h = 33$ 公里，成都台 $\Delta = 23°9$

§ 7.1　均匀弹性半空间中的面波——瑞利波

地球介质的实际情况是十分复杂的．首先它是球形的，表面有曲率，因此不能看做半空间；其次正如前面第五、六章所述，它的性质如波速、密度等随着深度的增加而变化（一般是增加），因此不能看做是均匀弹性介质，并且是非完全弹性的，存在波的吸收．但是为了在各类矛盾中首先抓住主要的矛盾，我们可以先把它近似地看做均匀弹性半空间，这样理论分析大大简化，并可以推导出在这样的半空间中沿自由表面可有一种表面波——瑞利波传播，并得到它的许多基本性质．并根据这样的分析方法推广到更为复杂的地球介质模型中去，逐步地近似于真实的情况．

观察表明，面波一般传播速度不快，只有 3—4 公里/秒左右，一般仪器（长周期仪器例外）记到的面波周期都不超过一分钟，因而波长不大于 200 公里，比地球半径小得多，因此可以不考虑地球的曲率．长周期地震仪记到的面波周期可达几百秒以上，甚至有的仪器能记到周期达几十分以上的面波，这时必须考虑地球的曲率．超长周期的面波（周期达数十分钟）与地球的固有振动有关．

回忆第五章中谈到平面 SV 波以大于临界角的入射角入射到自由表面时，反射 P 波为沿着自由表面前进的不均匀波．此不均匀波的振幅随着离开自由表面距离的增加而衰减．现在求什么样的不均匀波能沿着介质自由表面传播，并满足波动方程和自由表面的边条件，也就是说它是被允许独立存在的．

将 x, y 坐标轴取在自由表面上，z 轴垂直向下，均匀弹性介质充满 $z > 0$ 的半空间．设波沿着 x 轴方向传播，在 y 轴方向波的相位完全相同，即我们讨论的是平面二维情况．

令位移函数为

$$\phi = \Phi(z)e^{i(kx-\omega t)}, \tag{1}$$

$$\psi = \Psi(z)e^{i(kx-\omega t)}. \tag{2}$$

ϕ、ψ 应满足波动方程

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \tag{3}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{4}$$

而 x、z 方向的位移分量

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将 (1)、(2) 分别代入 (3)、(4) 后得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\Phi}{dz^2} - (k^2 - k_\alpha^2)\Phi = 0, \\ &\frac{d^2\Psi}{dz^2} - (k^2 - k_\beta^2)\Psi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}, \quad k_\beta = \frac{\omega}{\beta}. \tag{7}$$

显见 (6) 的解为

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= Ae^{-az} + Ce^{az}, \\ \Psi &= Be^{-bz} + De^{bz}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中

$$a = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}, \quad b = \sqrt{k^2 - k_\beta^2}. \tag{9}$$

上面系数为 C、D 的项当 $z \to +\infty$ 时趋于无穷大，不满足无穷远处的收敛条件，因此应弃去。于是有

$$\left.\begin{aligned} \phi &= Ae^{-az}e^{i(kx-\omega t)}, \\ \psi &= Be^{-bz}e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

自由界面的边条件为

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = 0. \tag{11}$$

或由 §5.1 (5) 得

$$\left.\begin{aligned} &\left[\alpha^2\nabla^2\phi + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\right]\Bigg|_{z=0} = 0, \\ &\left[2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]\Bigg|_{z=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

将 (10) 代入 (12) 得

$$\begin{aligned} &(2k^2 - k_\beta^2)A - 2ik\sqrt{k^2 - k_\beta^2}B = 0, \\ &2ik\sqrt{k^2 - k_\alpha^2}A + (2k^2 - k_\beta^2)B = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

如要 A、B 不全为零，则 (13) 的系数行列式应为零，即有

$$(2k^2-k_\beta^2)^2-4k^2\sqrt{k^2-k_\alpha^2}\sqrt{k^2-k_\beta^2}=0, \tag{14}$$

(14) 式称为瑞利方程．或写成

$$(2x-1)^2-4x\sqrt{x-m}\sqrt{x-1}=0, \tag{15}$$

其中

$$x=\frac{k^2}{k_\beta^2},\quad m=\frac{k_\alpha^2}{k_\beta^2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}. \tag{16}$$

解出 (15) 得

$$16(1-m)x^3+8(2m-3)x^2+8x-1=0. \tag{17}$$

令 $x=1$，则 (17) 式左方 $=-1<0$，令 $x\to+\infty$，则 (17) 式左方 $\to+\infty$ (注意 $m=\frac{\beta^2}{\alpha^2}<1$)，因此方程 (17) 在 1 与 $+\infty$ 之间至少有 x 的一个实根，也就是

$$\frac{k^2}{k_\beta^2}=x>1,$$

或

$$k^2>k_\beta^2,\quad \frac{\omega^2}{c^2}>\frac{\omega^2}{\beta^2},$$

则有

$$c<\beta. \tag{18}$$

由此可见，对应的面波速度既小于纵波速度 α，也小于横波速度 β.

下面在泊松固体 ($\lambda=\mu$) 的情况下作进一步的讨论．由于 $\lambda=\mu$，即有

$$\alpha^2=3\beta^2 \text{ 或 } k_\beta^2=3k_\alpha^2, \tag{19}$$

(19) 代入 (16) 得对泊松固体的 $m=\frac{1}{3}$，将此代入 (17) 得

$$32x^3-56x^2+24x-3=0,$$

或

$$(4x-1)(8x^2-12x+3)=0.$$

立可解得有三个根

$$x=\frac{1}{4},\quad \frac{3-\sqrt{3}}{4},\quad \frac{3+\sqrt{3}}{4}. \tag{20}$$

由于要求 ϕ 和 ψ 都随着 z 的增加而衰减，从 (8) 见应有 a、b 都是正实数．由 (9) 可见应有 $k>k_\alpha$，$k>k_\beta$. 由 (16) 可见应有 $x>1$. 而 (20) 中只有

$$x=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

满足此要求．

事实上对比 §5.2，偏振交换一节，其余两根对应偏振交换的情况 (见 §5.2 (45) 式)．由此

$$k^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4} k_\beta^2 = 1.183 k_\beta^2.$$

或

$$k = 1.087 k_\beta, \tag{21}$$

$$c = 0.9194\beta. \tag{22}$$

由此得到在均匀弹性半空间可以存在这样的波，它沿着自由表面（x 轴）传播，它的振幅随着离开自由表面的距离的增加而衰减（其位移函数 ϕ、ψ 按 e^{-az} 及 e^{-bz} 规律衰减）. 它的传播速度略小于横波波速，并与 ω 无关，即无频散现象. 这就是瑞利面波，或简称瑞利波.

下面讨论瑞利波质点的位移. 由 (5)，将 (10) 代入 (5) 并利用 (13) 式消去 B 可得

$$\left.\begin{aligned} u &= ikA\left(e^{-az} - \frac{2ab}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz}\right) e^{i(kx-\omega t)}, \\ w &= A\left(-ae^{-az} + \frac{2k^2 a}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz}\right) e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

取实部

$$\left.\begin{aligned} u &= Ak\left(e^{-az} - \frac{2ab}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz}\right)\sin(\omega t - kx), \\ w &= Ak\left(-\frac{a}{k} e^{-az} + \frac{2ka}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-bz}\right)\cos(\omega t - kx). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

(24) 为瑞利波的位移表达式，可见当 $z\to\infty$，有 $u\to 0$，$w\to 0$，其波数为 k，并且 x 和 z 方向的位移 u 和 w 位相相差 $\frac{\pi}{2}$.

当介质为泊松固体，则有 (19) 式，k 的解为 (21) 式，将 (21) 代入 (9) 可得

$$a = 0.8475k, \quad b = 0.3933k. \tag{25}$$

(25)、(21) 代入 (24) 得

$$\left.\begin{aligned} u &= Ak(e^{-0.8475kz} - 0.5773e^{-0.3933kz})\cdot\sin(\omega t - kx), \\ w &= Ak(-0.8475e^{-0.8475kz} + 1.4679e^{-0.3933kz})\cos(\omega t - kx). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

当 $z=0$，即在自由表面上

$$\left.\begin{aligned} u|_{z=0} &\simeq 0.42D\sin(\omega t - kx), \\ w|_{z=0} &\simeq 0.62D\cos(\omega t - kx), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

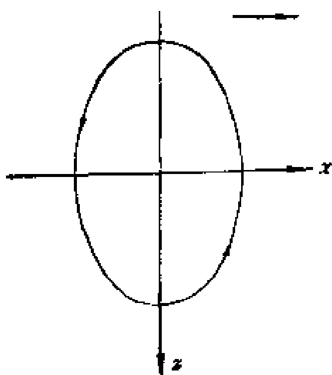


图 7.2

其中 $D = Ak$. 由 (27) 可见瑞利波在自由表面的质点运动是逆进的椭圆（图 7.2）这个特点对于在地震图上鉴别瑞利波十分重要. 它在表面垂直方向的位移大致为水平方向位移的一倍半. 从 (26) 式可知，水平运动（即 u）在 0.193 个波长的深处为零，即当

$$z = 0.193, \quad \lambda = 0.193\left(\frac{2\pi}{k}\right)$$

时有 $u=0$，在这个深度以下，质点运动的轨迹为顺进的椭圆. u, w 的振幅随深度的分布可参见图 7.3.

在实际情况中，瑞利波是沿着地表以震中为心向四周扩散出去的，即呈柱状向四周扩

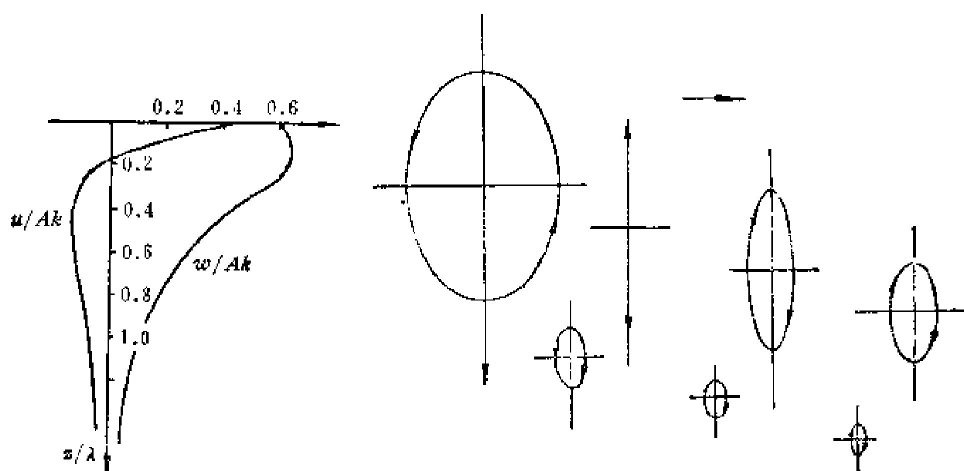


图 7.3

散，而且它在震中附近并不存在，只是当 SV 波以临界角入射到地表使反射 P 波为不均匀波时才开始出现，详细的理论分析要用到柱函数，在解动力学问题中还要用到复变函数的理论，这里不再介绍．但是得到的面波的基本特性与上面用平面波的概念进行的分析得到的结果完全相似．但由于波阵面的扩散，当 $r \gg \lambda$，即震中距比波长大得多时，其振幅按 $r^{-\frac{1}{2}}$ 规律衰减．而无限均匀介质中的体波是按 r^{-1} 规律衰减的．因此面波因扩散而造成的衰减比体波要慢得多．

§7.2 成层介质中的 SH 型面波——乐甫波

上一节讨论了均匀半无限空间中的面波——瑞利波，但实际地球介质要复杂得多，例如地壳与上地幔介质的弹性性质有明显的差别，上地幔中的波速（P 波约 8.0 公里/秒）要比地壳中的平均波速（对 P 波约 6 公里/秒左右）高，密度也大，因此地壳，特别是厚度比较大的大陆地壳在形成面波中的作用应予以考虑．地震观测发现有一种 SH 型的面波，其质点振动方向与地表平行且垂直于波的传播方向．理论分析表明，当横波速较高的半无限空间上覆盖以低速层时，则允许这种 SH 型的面波沿层传播，这种波又称为乐甫（Love）波．

一、乐甫波的形成条件及其频散方程

设有均匀弹性半空间，上面覆盖一弹性层，层厚为 H（图 7.4）．用这样的模型来简单地描述地壳覆盖在地幔上的情况．取 x、y 坐标轴在自由表面上（$z=0$），z 轴垂直向下，令层中横波速为 β_1，密度为 ρ_1，半空间中横波速为 β_2，密度为 ρ_2，且有 $\beta_1<\beta_2$，乐甫波振幅在层中为 V_1，半空间中为 V_2．为简化分析，仍考虑平面波的情况，并令波沿 x 轴方向传播，由于考虑的是 SH 型面波，因此振动应垂直于 x 轴且平行于分界面，即振动应沿 y 轴方向．由 §4.2（7）知 V_1V_2 应满足波动方程

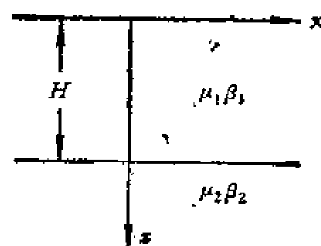


图 7.4

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta_1^2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}=\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

与§7.1完全类似可得

$$\left.\begin{aligned}&V_1=(Ae^{b_1 z}+Be^{-b_1 z})e^{i(kx-\omega t)} \quad 0<z<H,\\ &V_2=Ce^{-b_2 z}e^{i(kx-\omega t)} \quad z>H,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}b_1=\sqrt{k^2-k_{\beta_1}^2},\quad k_{\beta_1}=\frac{\omega}{\beta_1},\\ b_2=\sqrt{k^2-k_{\beta_2}^2},\quad k_{\beta_2}=\frac{\omega}{\beta_2},\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$k=\frac{\omega}{c}.\tag{4}$$

因要满足 $z\to+\infty$ 的收敛条件，在 V_2 中去掉了 $e^{b_2 z}$ 项. 而 k 为波数，c 为面波速度. (2) 式应满足自由表面边条件及层与半空间的界面的连续条件

$$\sigma_{xy}=\mu_1\frac{\partial V_1}{\partial z}=0 \text{ 当 } z=0,\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&V_1=V_2,\\ &\mu_1\frac{\partial V_1}{\partial z}=\mu_2\frac{\partial V_2}{\partial z},\end{aligned}\right\}\text{ 当 } z=H.\tag{6}$$

将 (2) 代入 (5)、(6) 式化简后得

$$\left.\begin{aligned}&A-B=0,\\ &Ae^{b_1 H}+Be^{-b_1 H}=Ce^{-b_2 H},\\ &\mu_1 b_1(Ae^{b_1 H}-Be^{-b_1 H})=-\mu_2 b_2 Ce^{-b_2 H}.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

(7) 中消去 B 得

$$\left.\begin{aligned}&A(e^{b_1 H}+e^{-b_1 H})-Ce^{-b_2 H}=0,\\ &A\mu_1 b_1(e^{b_1 H}-e^{-b_1 H})+C\mu_2 b_2 e^{-b_2 H}=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

(8) 中 A、C 要不全为零必须其系数行列式为零

$$\begin{vmatrix}(e^{b_1 H}+e^{-b_1 H}), & -e^{-b_2 H}\\ \mu_1 b_1(e^{b_1 H}-e^{-b_1 H}), & \mu_2 b_2 e^{-b_2 H}\end{vmatrix}=0\tag{9}$$

解之得

$$\operatorname{th} b_1 H=\frac{e^{b_1 H}-e^{-b_1 H}}{e^{b_1 H}+e^{-b_1 H}}=-\frac{\mu_2 b_2}{\mu_1 b_1}.\tag{10}$$

仔细的研究 (10) 式表明,要使 (10) 式成立应有

$$k_{\beta_2}<k<k_{\beta_1}.\tag{11}$$

由 (11)、(3) 得

$$b_1=i\sqrt{k_{\beta_1}^2-k^2}=i\bar{b}_1\tag{12}$$

由此 (10) 式化为

$$\tan\bar{b}_1 H=\frac{\mu_2 b_2}{\mu_1\bar{b}_1},\tag{13}$$

或

$$\tan kH\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}=\frac{\mu_2\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}. \tag{14}$$

(14) 式就是乐甫波的频散方程，它确定 ω、k、c 三者中任何二个之间的隐含关系，例如 c 与 ω 的隐含关系，亦即 c 是 ω 的函数，也就是说波速 c 与频率有关，对不同频率的简谐乐甫波其波速不同. 由于频散效应，脉冲型的波在传播了一段距离后就散成波列.

二、简 正 振 型

1. 简正振型

解频散方程 (14) 得

$$kH=\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\mu_2\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta_1^2}\cdot\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}\right)+n\pi\right],\quad n=0,1,2\cdots \tag{15}$$

(15) 式给出了 $\frac{c}{\beta_1}$ 与 kH 的对应关系，由 (11) 知，方程 (14) 要有实根，应有

$$1<\frac{c}{\beta_1}<\frac{\beta_2}{\beta_1}. \tag{16}$$

对任一满足条件 (16) 的 $\frac{c}{\beta_1}$ 值，(15) 知均有无穷多个 kH 与之对应，而每一个 kH 值对应一种乐甫波. 当 $n=0$，称为基阶振型乐甫波，$n=n$ 时称为 n 阶振型乐甫波.

2. 截止频率

对 $n=0$ 的基阶乐甫波，当 $\frac{c}{\beta_1}=\frac{\beta_2}{\beta_1}$ 时，由 (15) 易见 $kH\to 0$，而有

$$kH=\frac{2\pi}{\lambda}H=\frac{\omega}{c}H,$$

因此有波长 $\lambda\to\infty$ 或圆频率 $\omega\to 0$.

对 n 阶乐甫波，当 $\frac{c}{\beta_1}=\frac{\beta_2}{\beta_1}$ 时，从 (15) 得

$$kH=\frac{n\pi}{\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1}}. \tag{17}$$

又有

$$kH=\frac{\omega}{c}H=\frac{\omega}{\beta_2}H. \tag{18}$$

由 (17)、(18)

$$\omega=\frac{n\pi}{H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{\beta_2^2}}}. \tag{19}$$

而当 $\frac{c}{\beta_1} \to 1$ 时，由 (15) 易见有

$$kH \to \infty, \tag{20}$$

由此有

$$\omega \to \infty. \tag{21}$$

由 (19)、(21) 知当有

$$1 < \frac{c}{\beta_1} < \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

时，应有

$$\infty > \omega > \frac{n\pi}{H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}},$$

亦即对 n 阶乐甫波，其频率不能低于

$$\frac{n\pi}{H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}},$$

这就是 n 阶乐甫波的截止频率. 由 (17) 可得到其截止波长为

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - 1}}{n} H,$$

或化为无量纲量

$$\frac{\lambda}{H} = \frac{2\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - 1}}{n},$$

不存在大于此波长的 n 阶乐甫波.

图 7.5 给出了当 $\beta_2/\beta_1 = 1.297$,

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2.159$$

时的基阶和一阶振型的乐甫波的

$$\frac{c}{\beta_1} \sim kH$$

关系曲线，称为频散曲线，图中也给出群速度频散曲线 $\left(\frac{U}{\beta_1} \sim kH\right)$，其意义见 § 7.3.

3. 位移分布

讨论简正振型乐甫波的位移分布. 由 (7) 中第一式与 (2) 消去 B 得

$$V_1 = A(e^{b_1 z} + e^{-b_1 z})e^{i(kx-\omega t)} = 2A \operatorname{ch} b_1 z e^{i(kx-\omega t)} = 2A\cos(\bar{b}_1 z)e^{i(kx-\omega t)}. \tag{22}$$

由 (8) 中第一式与 (2) 联合消去 C 得

$$\begin{aligned} V_2 &= Ce^{-b_2 z}e^{i(kx-\omega t)} = 2A\operatorname{ch}(b_1 H)e^{-b_2(z-H)}e^{i(kx-\omega t)} \\ &= 2A\cos(\bar{b}_1 H)e^{-b_2(z-H)}e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned} \tag{23}$$

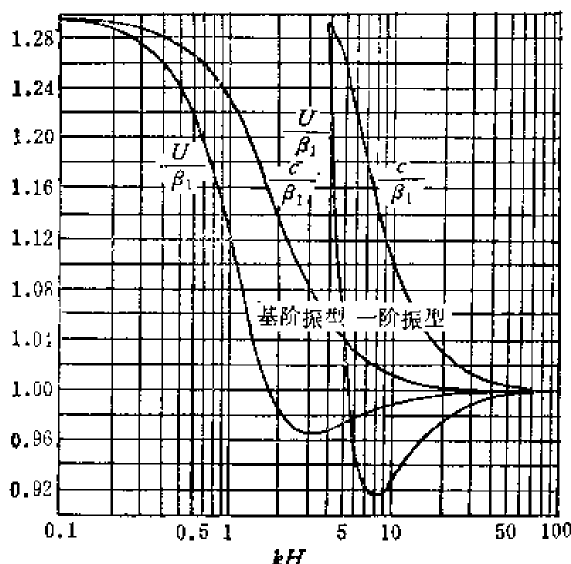


图 7.5　基阶振型与一阶振型乐甫波的相速度与群速度曲线

$\beta_2/\beta_1 = 1.297$,　$\mu_2/\mu_1 = 2.159$[4]

令

$$g = \tan^{-1}\frac{\mu_2 b_2}{\mu_1 \bar{b}_1} = \tan^{-1}\frac{\mu_2\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}} \quad \left(0 < g < \frac{\pi}{2}\right) \tag{24}$$

由 (13) 得

$$\bar{b}_1 H = g + n\pi. \tag{25}$$

将 (25) 代入 (22)、(23) 得

$$\left.\begin{aligned} (V_1)_n &= D_n \cos\left[(g+n\pi)\frac{z}{H}\right] e^{i(kx-\omega t)} \quad (0 < z < H), \\ (V_2)_n &= D_n \cos(g+n\pi) e^{-b_2(z-H)} e^{i(kx-\omega t)} \quad (H < z), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

这里 D_n 即前面 (22)、(23) 中的 $2A$，g 由 (24) 式给出，(26) 式为 n 阶乐甫波的位移公式. 由此可令 $n = 0, 1, 2 \cdots\cdots$ 可得各阶乐甫波的位移分布情况.

对基阶乐甫波，$n = 0$，由 (26)

$$\left.\begin{aligned} (V_1)_0 &= D_0 \cos\left(g\frac{z}{H}\right) e^{i(kx-\omega t)} \quad (0 < z < H), \\ (V_2)_0 &= D_0 \cos g\, e^{-b_2(z-H)} e^{i(kx-\omega t)} \quad (H < z), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

当

$$z = 0, \quad \cos\left(g\frac{z}{H}\right)\Big|_{z=0} = 1,$$

即在自由表面上振幅最大. 当

$$z = H, \quad \cos\left(g\frac{z}{H}\right)\Big|_{z=H} = \cos g,$$

而有 $0 < \cos g < 1$，由 (27) 中第二式可见 $(V_2)_0$ 的振幅随 $z \to \infty$ 而作指数衰减 (图 7.6 (a)).

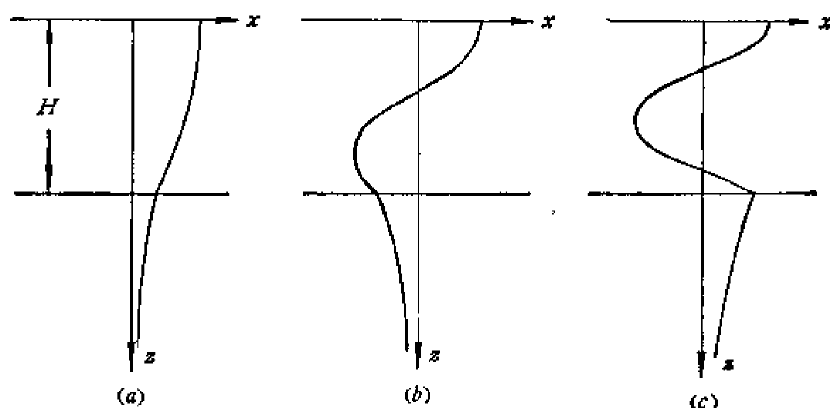


图 7.6

对 n 阶乐甫波，有 (26) 式，

当 $z=0$ 时，

$$(V_1)_n = D_n e^{i(kx-\omega t)},$$

当 $z=H$ 时，

$$(V_1)_n = D_n \cos(g+n\pi) e^{i(kx-\omega t)}.$$

下面求在 $0<z<H$ 中

$$\cos\left[(g+n\pi)\frac{z}{H}\right]$$

有否零点，令

$$\cos\left[(g+n\pi)\frac{z}{H}\right]=0 \quad 0<Z<H. \tag{28}$$

解 (28) 得

$$z=\frac{m\pi+\frac{\pi}{2}}{n\pi+g}H \quad m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots \tag{29}$$

由于，$0<g<\frac{\pi}{2}$. 因此仅有 $m=0, 1, 2, \cdots\cdots, (n-1)$, 才能使

$$0<\frac{m\pi+\frac{\pi}{2}}{n\pi+g}<1, \tag{30}$$

也就是仅对 $m=0, 1, 2, \cdots\cdots, (n-1)$, $\cos\left[(g+n\pi)\frac{z}{H}\right]$ 的零点

$$z=\frac{m\pi+\frac{\pi}{2}}{n\pi+g}H$$

才落在 $0<z<H$ 范围内，由 (26) 中第一式可见，n 阶乐甫波在层中的位移 $(V_1)_n$ 在 n 个深度上波的振幅永为零. 因而又称为 n 阶乐甫波的节面. 因此节面的位置为

$$z=\frac{m\pi+\frac{\pi}{2}}{n\pi+g}H \quad m=0, 1, 2, \cdots\cdots, (n-1). \tag{31}$$

图 7.6 (*a*)、(*b*)、(*c*) 给出了基阶、一阶、二阶乐甫波的振幅分布. 由图可见基阶乐甫波无节面,一阶的有一个节面,二阶的有二个节面.

简正振型在振动问题中普遍存在,例如对两端固定的张紧的弦,可能有如图 7.7 中表示的各种振动形式,这些类型的振动也称为简正振型.

不同震源激发的各阶乐甫波之间的振幅比 $D_0 : D_1 : D_2 : \cdots\cdots$ 是互不相同的,但一般总是 D_0 要大得多,而且它的波长最长,从而因吸收造成的衰减也小,因此基阶乐甫波经常是最强,最易于观测到.

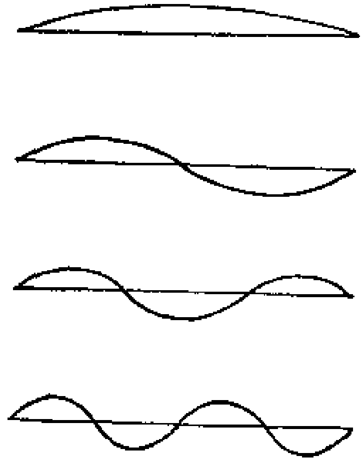


图 7.7

三、小　结

乐甫波的特点可总结如下:

(1) 它产生于弹性半空间上覆盖有弹性层的情况,并要求层中横波速度 β_1 小于半空间中横波波速 β_2;

(2) 它是 *SH* 型横面波,振动方向平行于自由表面而且垂直于波的传播方向;

(3) 其波速 c 满足 $\beta_1 < c < \beta_2$, 乐甫波存在频散,频散方程为 (14) 式;

(4) 乐甫波存在许多简正振型,基阶乐甫波振幅一般比较大,占优势,在层内无节面,一阶乐甫波在层内有一个节面,n 阶有 n 个节面;

(5) 基阶乐甫波波长范围为 $0 < \frac{\lambda}{H} < \infty$, n 阶乐甫波波长范围为

$$0 < \frac{\lambda}{H} < \frac{2\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} - 1}}{n},$$

因此高阶乐甫波存在截止波长,阶数越高,截止波长越短,但层厚越大,截止波长越长.

§ 7.3　频　　散

拿到一张远震地震图,特别是震源比较浅时,一个特别引人注目的特点就是地震记录的后半部分有长长的波列,分析表明这是面波波列,经常见到的是基阶乐甫波和基阶瑞利波. 由于速度随深度而变化,且由于地壳与上地幔波速的明显差别,因而瑞利波也存在频散,并且也存在简正振型. 上述观测到的波列的周期不是一成不变的,而是有规则地变化着,对基阶乐甫波和瑞利波,一般是周期前大后小,即周期大的波先到,这种现象称为频散,且称为正频散,如果周期是前小后大,则称为反频散.

一、相速度和群速度

前面讨论瑞利波和乐甫波时,对波都给了因子 $e^{i(kx-\omega t)} = e^{ik(x-ct)}$, 也就是假定它们是简谐波,而 c 就是简谐波同相面的传播速度,称为相速度. 但是实际上的地震波是由许多简谐波叠加成的,它们的频率各不相同,且频谱一般是连续的,而一些频率的简谐波如果它们的波峰遇在一起就会相互叠加而使振幅增大,反之就相互抵消而使振幅减小,这种叠

加成的大振幅传播的速度称为群速度. 由于在波的传播中能量都集中在大振幅处，因此群速度也就是波的能量的传播速度.

二、相速度与群速度之间的关系

(1) 假设有两个简谐波，振幅相同而频率比较接近，一个为 $\omega-\Delta\omega$、另一个 $\omega+\Delta\omega$. 由于存在频散，两简谐波的相速度不同，前者为 $c-\Delta c$，后者为 $c+\Delta c$. 因此有

$$f_1 = Ae^{i(\omega+\Delta\omega)\left(t-\frac{x}{c+\Delta c}\right)} = Ae^{i\left(\omega t+t\Delta\omega-\frac{x\omega}{c+\Delta c}-\frac{x\Delta\omega}{c+\Delta c}\right)}, \tag{1}$$

$$f_2 = Ae^{i(\omega-\Delta\omega)\left(t-\frac{x}{c-\Delta c}\right)} = Ae^{i\left(t\omega-t\Delta\omega-\frac{x\omega}{c-\Delta c}+\frac{x\Delta\omega}{c-\Delta c}\right)}. \tag{2}$$

一级近似下有

$$\left.\begin{aligned}\frac{x\omega}{c\pm\Delta c} &\simeq \frac{x\omega}{c}\left(1\mp\frac{\Delta c}{c}\right),\\ \frac{x\Delta\omega}{c\pm\Delta c} &\simeq \frac{x\Delta\omega}{c}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

则两简谐波叠加后的合成波为

$$\begin{aligned}f = f_1+f_2 &\simeq Ae^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}2\cos\left(t\Delta\omega+\frac{x\omega}{c^2}\Delta c-\frac{x}{c}\Delta\omega\right)\\ &= 2A\cos\Delta\omega\left[t-x\left(\frac{1}{c}-\frac{\omega}{c^2}\frac{\Delta c}{\Delta\omega}\right)\right]e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\\ &= 2A\cos\Delta\omega\left[t-x\frac{\Delta\left(\frac{\omega}{c}\right)}{\Delta\omega}\right]e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)},\end{aligned} \tag{4}$$

图 7.8 给出了叠加后的合成波 $f(x,t)$ 的图形，由图可见

$$\cos\Delta\omega\left[t-x\cdot\frac{\Delta\left(\frac{\omega}{c}\right)}{\Delta\omega}\right]$$

代表波的振幅的包络线. 而

$$u=\frac{\Delta\omega}{\Delta\left(\frac{\omega}{c}\right)} \tag{5}$$

为包络线的传播速度. 也就是极大振幅的传播速度，因此 U 代表群速度. 极限情况下，令

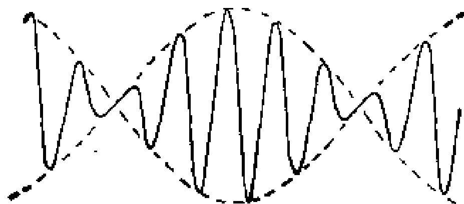


图 7.8

$\Delta\omega \to 0$，有

$$U = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{c}\right)} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k\frac{dc}{dk}. \tag{6}$$

（2）实际上地震波是由许多频率不同的简谐波相互叠加而成，其频谱是连续的，可以写成形式

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ik(x-ct)} dk, \tag{7}$$

其中 $g(k)$ 为波的频谱．令

$$\theta = k(x - ct), \tag{8}$$

θ 即为波的相位．每一个简谐波都以自己的相速度 c 传播，而 c 是 k 或 ω 的函数，即对不同波数的简谐波，其相速度是不同的．这些简谐波在传播中相互干涉，而在使 $\theta =$ 常数的波数 k_0 处，它们相互叠加而使振幅增强，而 $\theta =$ 常数即

$$\left.\frac{d\theta}{dk}\right|_{k_0} = 0, \tag{9}$$

或

$$\frac{d\theta}{dk} = \frac{d}{dk}[k(x - ct)] = x - \frac{d(kc)}{dk}t = 0,$$

或

$$\frac{x}{t} = \frac{d(kc)}{dk} = \left[c + k\frac{dc}{dk}\right]_{k=k_0}. \tag{10}$$

(10) 式表示波数为 k_0 的波的极大振幅经过 t 时间后传到了 x 处，因此 $\frac{x}{t}$ 就是波数为 k_0 的波的群速度 U，即

$$U = c + k\frac{dc}{dk}. \tag{11}$$

比较 (6) 与 (11) 可见两者完全相同．(11) 式就是相速度与群速度的关系式．

现在在 $k = k_0$ 附近展开 (7) 式中的被积函数，当 x、t 充分大时，一般谱函数 $g(k)$ 在 $k = k_0$ 附近比指数部分的变化要慢得多，因此可设 $g(k) \simeq g(k_0)$，而

$$\theta(k) = \theta(k_0) + \left.\frac{d\theta}{dk}\right|_{k=k_0}(k - k_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0}(k - k_0)^2 + \cdots\cdots. \tag{12}$$

由于 (9)，(12) 为

$$\theta(k) \simeq \theta(k_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0}(k - k_0)^2. \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ik(x-ct)} dk \\ &= g(k_0) e^{i\theta(k_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{1}{2!}\frac{d^2\theta}{dk^2}\big|_{k=k_0}(k-k_0)^2} dk \\ &= \sqrt{\frac{2}{\left|\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0}}}\, g(k_0) e^{i\theta(k_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i x^2} dx, \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0} > 0 \quad 对应正号,$$

$$\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0} < 0 \quad 对应负号.$$

利用

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ \int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(14) 化成

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{\left|\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0}\right|}}\, g(k)e^{i\left(\theta(k_0)\pm\frac{\pi}{4}\right)}, \tag{16}$$

其中当

$$\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0} > 0$$

对应正号,

$$\left.\frac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0} < 0$$

对应负号,而

$$\frac{d^2\theta}{dk^2} = \frac{d}{dk}\left(\frac{d\theta}{dk}\right) = \frac{d}{dk}(x - Ut) = -\frac{dU}{dk}t. \tag{17}$$

(16) 化成

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{t\left|\frac{dU}{dk}\right|}} \cdot e^{i\left[k_0(x-c(k_0)t)\mp\frac{\pi}{4}\right]}, \tag{18}$$

其中当 $\frac{dU}{dk} > 0$ 时对应负号. 而

$$t\left|\frac{dU}{dk}\right| = t\left|\frac{dU}{d\omega}\frac{d\omega}{dk}\right| = t\left|U\frac{dU}{d\omega}\right| = x\left|\frac{dU}{d\omega}\right|. \tag{19}$$

由 (19)、(18) 可化成

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{x\left|\frac{dU}{d\omega}\right|}} \cdot e^{i\left[k_0(x-c(k_0)t)\mp\frac{\pi}{4}\right]}, \tag{20}$$

当 $U\frac{dU}{d\omega} > 0$ 时,对应负号. 从 (20) 式可见, 由于频散, 使得随着 x 的增大, 振幅以 $x^{-\frac{1}{2}}$ 衰减. 而面波是沿着表面成柱状向外扩散的,因扩散造成的衰减因子为 $r^{-\frac{1}{2}}$, 因此有频散的面波总的衰减因子为 r^{-1}, 这里没有考虑吸收,而无频散的衰减因子为 $r^{-\frac{1}{2}}$. 另外 $\left|\frac{dU}{d\omega}\right|$ 或 $\left|\frac{dU}{dk}\right|$ 的大小对波群振幅的大小也有影响, $\left|\frac{dU}{dk}\right|$ 越小, 即 $U \sim k$ 曲线上的曲线斜率越

小处，$f(x, t)$ 越大，即波群振幅越大。

但是 (18) 式对 $\frac{dU}{dk}=0$ 处并不适用，因为这时 (12) 中的 $\frac{d^2\theta}{dk^2}=0$，因而对 $\theta(k)$ 要展开到 $(k-k_0)^3$ 项来讨论。进一步的理论计算表明，对 $\frac{d\theta}{dk}=0$ 处 $f(x, t)\propto x^{-\frac{1}{3}}$，如再考虑到面波的扩散衰减，则对 $\frac{d\theta}{dk}=0$ 处的总衰减为 $r^{-5/6}$，因此群速度极值处的振幅随距离的衰减较慢，当 r 比较大时就会形成波列中的最大振幅，这个地方常称为埃利 (*Airy*) 震相。在实际地震图中，由于震源激发面波的激发频谱、不同周期的波的吸收因子不同、仪器的频率特性等种种的因素，使得波列中的最大振幅不一定是埃利震相，还要结合群速度的大小及震相的周期来鉴定。

§7.4 群速度和相速度的测量

上一节讨论了相速度和群速度的概念和它们之间的关系，下面介绍如何从地震图上的面波波列图形来求得它们。

一、峰-谷 法

它是利用面波波列的波峰与波谷的到时作为原始数据，经过适当的处理后便可求得群速度和相速度的频散曲线。

1. 群速度的测量

(1) 单台法：设有某地震台的地震图，其瑞利波波列如图 7.9 (a) 所示。首先光滑地震波列的记录曲线，测量出光滑后波列的每个波峰和波谷的到时 t_1、t_2、t_3……，然后把它们点在到时——波峰序号的坐标图上(图 7.9(b))，作光滑曲线，就可求出任意时刻波列的周期 T。例如求 t 时刻的周期，只要在 t 时刻求图 7.9 (b) 中曲线的斜率，再乘以 2 就是该时刻的周期。再将求出的一系列到时-周期的数据点在到时-周期坐标图上，作光滑曲线后就可以求出任意周期的到时 (图 7.9 (c))。即求得

$$t=t(T).$$

如已知发震时刻 t_0 和震中距 Δ，则群速度

$$U(T)=\frac{\Delta}{t(T)-t_0}, \tag{1}$$

得到了不同周期波的群速度。

(2) 双台法：用此法可以求得波列在两台之间的群速度。可以参照上法分别求出台 1 和台 2 的到时——周期数据组，然后点在到时-周期坐标图上(图 7.9 (d))，分别作出两条光滑曲线，对任给周期 T，作 T 坐标轴的垂线交两曲线于 t_1、t_2，则

$$U(T)=\frac{\Delta_2-\Delta_1}{t_2-t_1}, \tag{2}$$

其中 Δ_2, Δ_1 为两台的震中距。利用此法时，最好震中和两台基本上同在一大圆弧上，如相差太远，则不能应用。

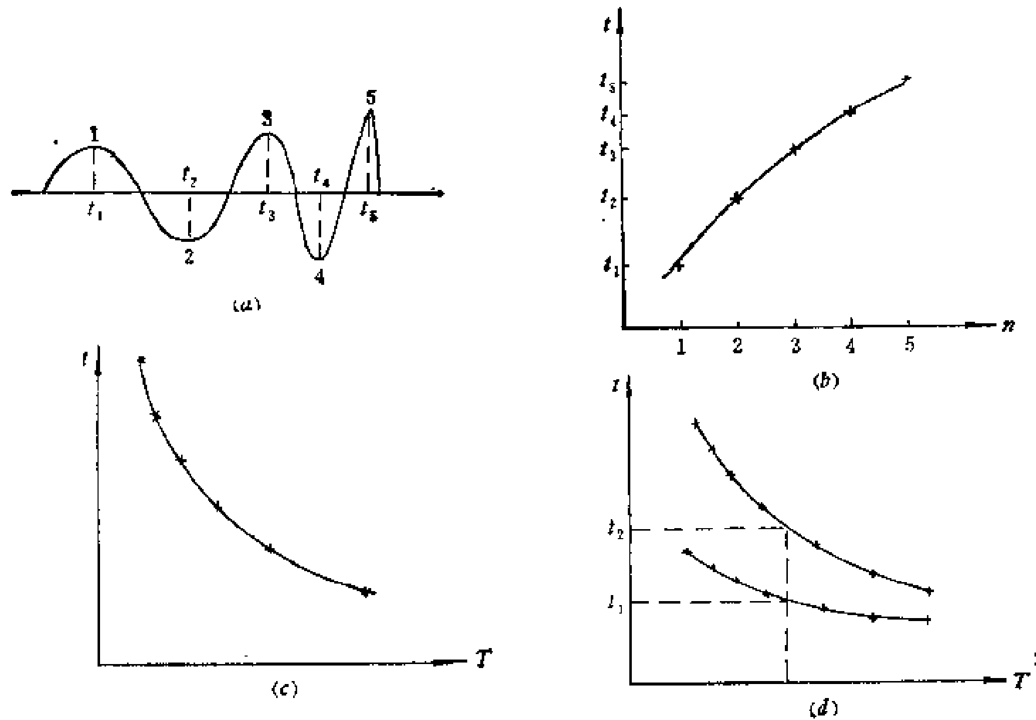


图 7.9

2. 相速度的测量

只能求出波列在相邻不远的两台之间的相速度。同时，最好震中和两台也基本上在同一大圆弧上。前面得到由§7.3 (18) 式知有

$$f(\Delta,\ t)=A(k_0)\cos\left\{k_0[\Delta-c(k_0)t]-\frac{\pi}{4}\right\},\tag{3}$$

为确定起见，这里取了 $-\frac{\pi}{4}$。当震中距为 Δ_1 的台 1 在t_1时刻记录到波列的波峰(图 7.10)，即

$$f_1(\Delta_1,\ t_1)=A(k_1)\cos\left\{k_1[\Delta_1-c(k_1)t_1]-\frac{\pi}{4}\right\},$$

而由于记到的是波峰，因此

$$k_1[\Delta_1-c(k_1)t_1]-\frac{\pi}{4}$$

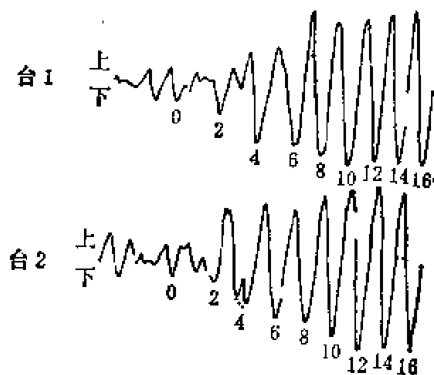


图 7.10

应为 $n\pi$，此处 k_1 为 t_1 时刻的波数，而在相邻不远的台 2 的记录为

$$f_2(\Delta_2,\ t_1')=A(k_1')\cos\left\{k_1'[\Delta_2-c(K_1')\cdot t_1']-\frac{\pi}{4}\right\}.$$

如在 t_1' 时刻，

$$k_1'[\Delta_2-c(k_1')t_1']-\frac{\pi}{4}$$

的值也为 $n\pi$，即对台 2 在 t_1' 时刻仍为波峰，且这个波峰就是台 1 在 t_1 时刻的波峰在 t_1' 时刻传播到了台 2，则相速度

$$c\left(\frac{k_1+k_1'}{2}\right)=\frac{\Delta_2-\Delta_1}{t_1'-t_1},$$

或

$$c\left(\frac{T_1+T_1'}{2}\right)=\frac{\Delta_2-\Delta_1}{t_1'-t_1}, \tag{4}$$

即所求得的是台 1 在 t_1 时刻波列的周期 T_1 与台 2 在 t_2 时刻波列的周期 T_1' 的平均值所对应的相速度. 这个方法的关键是要利用波列的各种特点来追纵同一个相位，不要错认到相邻的波峰上去，否则会带来错误.

此法求得的相速度是近似的，进一步的理论分析表明其误差正比于 $\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2$，其中

$$\delta T=T_2-T_1,\quad T=\frac{T_2+T_1}{2}.$$

因此两台同一相位所对应的周期相差不能太大. 而由波列求各时刻对应的周期的方法与前面求群速度时所用的方法相同.

二、数值计算法

也可用数值计算的方法从地震图求得实测群速度和相速度的频散曲线. 计算量是极大的，必须借助于电子计算机. 与上述峰-谷法相比较，数值计算法可以改进测量的准确度，因为它所利用的原始数据远比峰-谷法来得多(峰-谷法只利用了波峰和波谷的到时数值)，并可扩大所测得的周期范围.

1. 群速度的数值计算法

测量面波的群速度频散曲线的关键在于测量地震记录中某一时刻的优势周期. 为此可以在时间域内用移动窗分析法[52]来处理波形资料. 就是对面波记录 $x(t)$，取任一时间点 t，以 t 点为中心将 $x(t)$ 乘以某一窗函数 $w(t)$，然后将乘得的结果进行傅里叶变换，便可得到相应的振幅谱

$$A(T,t)=\left|\int_{-\frac{H_w}{2}}^{\frac{H_w}{2}}x(t+\tau)w(\tau)e^{-i2\pi\tau/T}d\tau\right|. \tag{5}$$

而振幅谱 $A(T,t)$ 的最大值处所对应的周期，便是窗户的中心所对应的时刻 t 的优势周期. 这个方法的实质在于取波列的某一段，求其振幅谱的最大值所对应的周期，便是此波列段的中心所对应的时刻的优势周期.

窗函数可以取如下函数(图 7.11)：

半余弦平方窗

$$w_1(t)=\begin{cases}\cos^2\dfrac{\pi t}{H_w}, & |t|\leqslant\dfrac{H_w}{2}\\[2ex] 0, & |t|>\dfrac{H_w}{2}\end{cases} \tag{6}$$

余弦尖端窗

$$w_2(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant \frac{4H_w}{10},\\ \cos^2\frac{5\pi t}{H_w}, & \frac{4H_w}{10}\leqslant|t|\leqslant\frac{H_w}{2}\\ 0, & |t|>\frac{H_w}{2}.\end{cases} \tag{7}$$

高斯函数窗

$$w_3(t)=\begin{cases}e^{-a\left(\frac{t}{t-\frac{H_w}{2}}\right)^2}, & |t|\leqslant\frac{H_w}{2},\\ 0 & |t|>\frac{H_w}{2}.\end{cases} \tag{8}$$

以到时为纵坐标，周期为横坐标，在坐标平面各点上写出振幅谱 A 的值，然后画出 A 值的等值线，通过等值线中心的曲线便是所求的频散曲线.

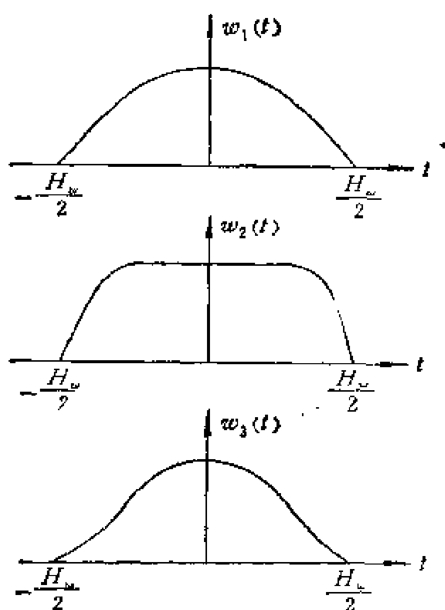


图 7.11 窗函数

当然，对计算得到的振幅谱还要进行仪器频率特性的校正. 窗函数的宽度 H_w 应选取适当，如太窄，则对周期的分辨率较差；如太宽，则对时间的分辨率不好. 为了保持对各个周期有同样的分辨率，窗宽 H_w 应随周期的增大而增大. 实际计算表明[8]，窗宽与周期的比值取 5 左右为宜. 移动窗分析法的方框图如图 7.12 所示.

类似地，也可在波列的频谱函数中，以某频率为中心乘以窗函数，然后求出该频率在不同时刻的瞬时振幅，这种方法称为多重滤波 (multiple filtering)[53].

2. 相速度的数值计算法

设台站记到的面波波形为 $x(t)$，其傅里叶变换为 $X(\omega)$：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt.$$

可记

$$X(\omega)=A(\Delta,\theta,\omega)e^{i\phi(\Delta,\theta,\omega)}.$$

其中 Δ、θ 为台站的震中距和方位角，而相位谱 $\phi(\Delta,\theta,\omega)$ 可记为

$$\phi(\Delta,\theta,\omega)=k(\omega)\Delta+\phi_0(\theta,\omega)+\phi_{in}(\omega)+2n\pi. \tag{9}$$

其中 $k(\omega)$ 为波数，$\phi_0(\theta,\omega)$ 为震源的初相位，$\phi_{in}(\omega)$ 为仪器的相移. 因傅里叶变换只能得到 0 到 2π 间的相位值，它与实际的相位角可能差 $2n\pi(n=0,1,2,\cdots\cdots)$.

设位于同一方位角上有两个台站的记录，这时有

$$\phi_1(\Delta_1,\theta,\omega)=k(\omega)\Delta_1+\phi_0(\theta,\omega)+\phi_{in}(\omega)+2n\pi,$$

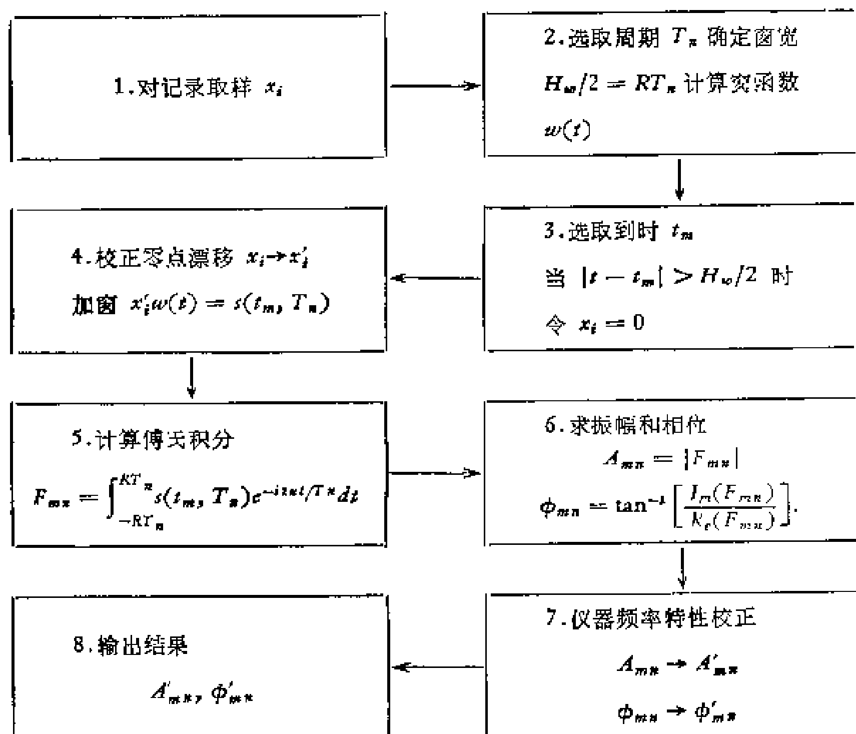


图 7.12 移动窗分析法计算方框图[8]

$$\phi_2(\Delta_2, \theta, \omega) = k(\omega)\Delta_2 + \phi_0(\theta, \omega) + \phi_{in2}(\omega) + 2m\pi.$$

将上两式相减得

$$\phi_2 - \phi_1 = k(\omega)(\Delta_2 - \Delta_1) + \phi_{in2} - \phi_{in1} + 2(m - n)\pi,$$

通过两台站之间的介质的面波相速度为

$$c(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{\omega(\Delta_2 - \Delta_1)}{\phi_2 - \phi_1 - (\phi_{in2} - \phi_{in1}) - 2(m - n)\pi}. \tag{10}$$

如两台仪器频率特性相同，则 $\phi_{in2} = \phi_{in1}$,

$$c(\omega) = \frac{\omega(\Delta_2 - \Delta_1)}{\phi_2 - \phi_1 - 2(m - n)\pi}. \tag{11}$$

如已知相速度的大致数值，则不难确定 $(m - n)$ 的值．对两台站的面波记录分别进行傅里叶变换(用快速傅里叶变换的方法处理[38])，可分别求得两台的相位谱 ϕ_1 和 ϕ_2.

还可用下述互相关函数法求出两台记录的相位差，得到的结果更好．

设两台的面波例如瑞利波的记录的时间函数分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，相应的频谱为 $X_1(\omega)$ 和 $X_2(\omega)$，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 之间的互相关函数为

$$\gamma_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t + \tau)d\tau. \tag{12}$$

易证 $\gamma_{12}(t)$ 的频谱为

$$\Gamma(\omega) = X_1^*(\omega)X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{13}$$

$$\Gamma(\omega) = X_1^*(\omega)X_2(\omega) = |X_1(\omega)||X_2(\omega)|e^{i(\phi_2 - \phi_1)}. \tag{14}$$

其中 $X^*(\omega)$ 为 $X(\omega)$ 的复共轭．所以互相关函数的相位谱就是所求的相位差 $\phi_2 - \phi_1$.

具体计算方法[54,55]这里不再详述.

§7.5 成层介质中的瑞利波、斯通雷（Stoneley）波

一、通过海洋的瑞利波

通过海洋的瑞利波的形态特征、波散性质与通过大陆的瑞利波有明显的不同. 通过海洋的瑞利波在周期为 20 秒到 16 秒之间有极长的规则波列，比通过大陆的瑞利波要长得多. 事实上，海洋中的水层在瑞利波的传播中起着不可忽略的作用. 海洋下的地壳比较薄，为简化理论讨论，把海洋地壳和壳下地幔的性质平均化，假定弹性半空间上覆盖有一厚度为H的水层. 所取各参数见表 7.1 及 7.13，仍在 xz 平面内用平面波的方法讨论. 水中位移

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \\ w_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

表 7.1

层	纵波速	横波速	密度	位移函数
水层	α_1		ρ_1	ϕ_1
半空间	α_2	β_2	ρ_1	ϕ_2 ψ_2

半空间中

$$u_2 = \frac{\partial \phi_2}{dx} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad w_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \tag{2}$$

水中压力

$$p = \lambda_1 \nabla^2 \phi_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \rho_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}. \tag{3}$$

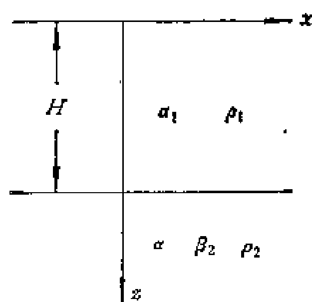


图 7.13

ϕ_1、ϕ_2、ψ_2 分别满足波动方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha_2^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\beta_2^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由此可将 ϕ_1、ϕ_2、ψ_2 的解写为

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= (Ae^{a_1 z} + Be^{-a_1 z}) e^{i(kx-\omega t)}, \\ \phi_2 &= Ce^{-a_2 z} e^{i(kx-\omega t)}, \\ \psi_2 &= De^{-b_2 z} e^{i(k-\omega t)}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{k^2 - k_{\alpha 1}^2}, \quad k_{\alpha 1} = \frac{\omega}{\alpha_1}, \quad k = \frac{\omega}{C}, \\ a_2 &= \sqrt{k^2 - k_{\alpha 2}^2}, \quad k_{\alpha 2} = \frac{\omega}{\alpha_2}, \\ b_2 &= \sqrt{k^2 - k_{\beta 2}^2}, \quad k_{\beta 2} = \frac{\omega}{\beta_2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

边条件为

$$\left.\begin{aligned} &p = 0,\ (\text{当 } z = 0) && \Rightarrow \lambda_1 \nabla^2 \phi_1 = 0 \quad (z = 0), \\ &(\sigma_{xz})_2 = 0, && \Rightarrow 2\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0 \quad (z = H), \\ &(\sigma_{zz})_1 = (\sigma_{zz})_2, \quad (\text{当 } z = H) && \Rightarrow \rho_1 \alpha_1^2 \nabla^2 \phi_1 = \rho_2 \left[\alpha_2^2 \nabla^2 \phi_2 + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\right)\right] \quad (z = H), \\ &w_1 = w_2, && \Rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad (z = H). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将(5)代入(7)式后，与乐甫波中所用方法完全相同，令 A, B, C, D 的系数行列式为零，经化简归并后最后得

$$\tan \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1} = \frac{\rho_2 \beta_2^4 \sqrt{\frac{c^2}{\alpha_1^2} - 1}}{\rho_1 c^4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha_2^2}}} \left[4\sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}} - \left(2 - \frac{c^2}{\beta_2^2}\right)^2\right] \tag{8}$$

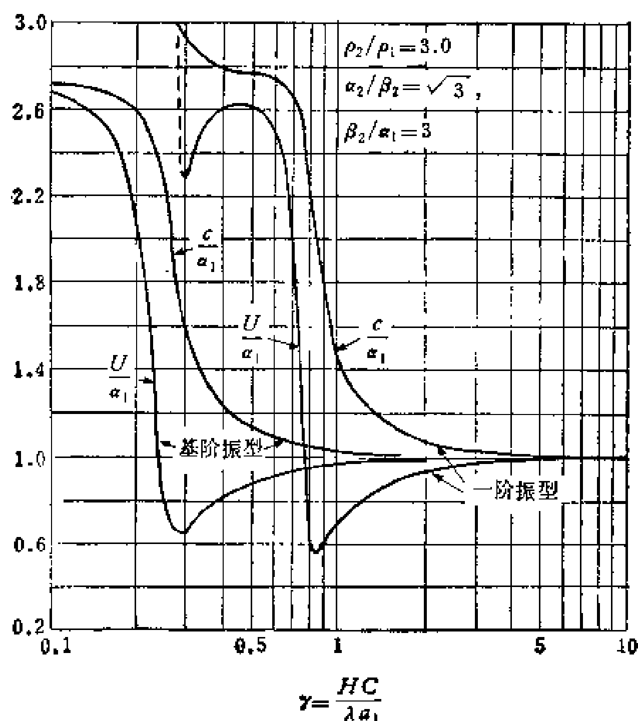


图 7.14 固体底层上的液体层前两阶振型的相速度和群速度曲线

(8) 式便为弹性半空间上复盖有厚为H的水层的瑞利波方程. 它决定了瑞利波的相速度c与波数$k=\frac{\omega}{c}$之间的关系，或$c\sim\omega$关系，即频散关系. 图 7.14 给出了由 (8) 式得到的这种关系，但它是用无量纲的量$c/\alpha_1\sim\gamma$来表示的. 其中

$$\gamma=\frac{kH}{2\pi}\frac{c}{\alpha_1}=\frac{H}{\lambda}\frac{c}{\alpha_1}=\frac{H}{T\alpha_1} \tag{9}$$

因此γ越大意味着频率越高或周期越小. 图 7.14 并给出了$\frac{U}{\alpha_1}\sim\gamma$曲线，其中$U$为群速度，利用

$$U=c+k\frac{dc}{dk}$$

可从相速度$c(k)$求出群速度$U(k)$来.

看图 7.14 中基谐瑞利波的$\frac{c}{\alpha_1}\sim\gamma$曲线. 当$\gamma\to0$时，即$\lambda\gg H$时（波长比水层厚要大得多），$c$趋于半空间的瑞利波相速$c_R$，即当$\gamma\to0$时，

$$\frac{c}{\alpha_1}\to\frac{c_R}{\beta_2}\frac{\beta_2}{\alpha_1}\simeq0.92\times3=2.76.$$

当瑞利波的波长比水层厚大得多时，水层对其的影响显然越来越小，因此就近似于只存在弹性半空间介质的情况，因此$c\to c_R$，总之波长比较大时就有相对来说比较厚的一层介质对波的传播起作用，这个直观的概念十分重要，也是容易理解的. 当$\gamma\to\infty$，即$\lambda\ll H$时，$c\to0.998\alpha_1$，即趋于后面还要介绍的斯通雷波的波速. 而基谐瑞利波的群速度曲线在γ略小于 0.2 处有一个极小值，这里应该对应埃利震相.

对一阶瑞利波存在截止频率ω_1，也就是只存在$\omega>\omega_1$的波，当$\omega\to\omega_1$时（即$\gamma\to\gamma_1$），$c\to\beta_2$，$\left(\text{或}\frac{c}{\alpha_1}\to\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$即趋于半空间的横波速，当$\omega\to\infty$（或$\gamma\to\infty$）时，$c\to\alpha_1$ $\left(\text{或}\frac{c}{\alpha_1}\to1\right)$即趋于水中纵波速. 对高阶瑞利波，当阶数$n$越大时，截止频率也越高.

有人研究了1950年所罗门群岛地震后通过太平洋的瑞利波（图 7.15），从地震图作出了群速度频散曲线，并与由 (8) 及 §7.3 (11) 式推出的理论频散曲线作比较（图 7.16），理论与观测资料符合得比较好，说明上面的理论假设是实际情况的较好近似. 这里得到的水深为 5.57 公里（图 7.16），比太平洋海水的平均深度要大 1 公里左右，估计这是由于海

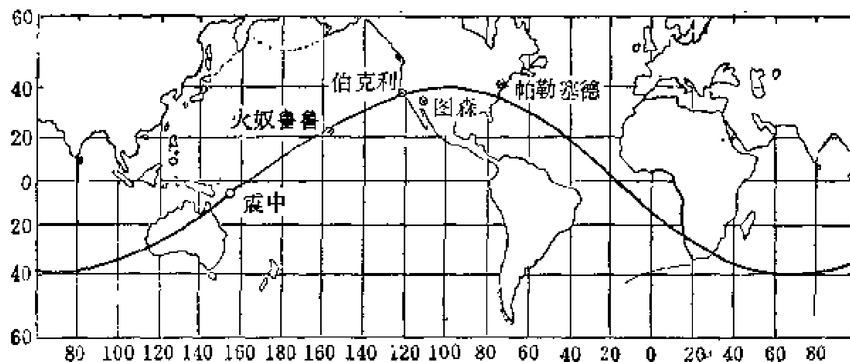


图 7.15 从所罗门群岛震中经火奴鲁鲁、伯克利、图森和帕勒塞德各台站的大圆路程图

底有一层未固结的沉积层的影响，因此认为这层沉积层可能平均为 1 公里左右.

但是在地震图上一般不容易找到通过海洋的基谐瑞利波的周期从 1 秒到 12 秒之间的部分，说明上面的理论考虑还有不完善之处，还不能完全地解释观测结果. 注意到在 1 秒到 12 秒周期范围内具有大振幅的通过大陆的瑞利波到达海岸边时它们不以基谐瑞利波的形式继续通过海洋，由此说明或者 1 秒到 12 秒周期范围的基谐瑞利波在典型的海洋区域中迅受到很大的衰减，或者在大陆和海洋的边界处受到阻挡.

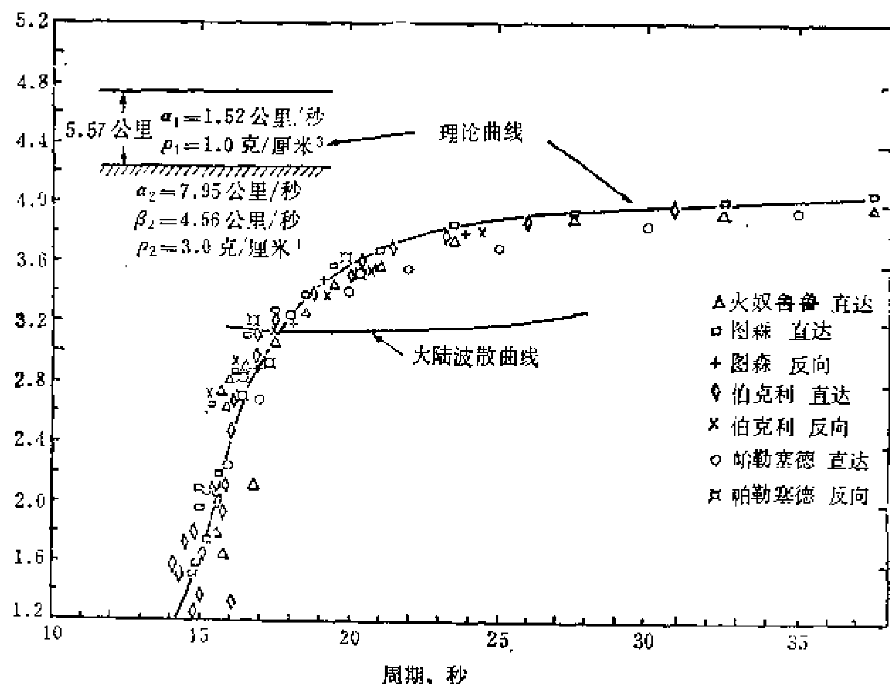


图 7.16 到火努鲁鲁、伯克利、图森、帕勒塞德的海洋路径瑞利波的观测与理论频散曲线

地面永远在不停地运动着，灵敏的地震仪能记录到地面的这种连续运动. 其中有一类，周期在 3 秒—9 秒之间，差不多是规则的正弦形状，称为第一类脉动. 全世界所有的台站都能记到，平均振幅约为几个微米，海岸附近的台站这些脉动大大增强，有时可达 100 微米. 当附近的海面上发生风暴时，脉动会增强到形成所谓"脉动暴"，可持续好几天，然后逐渐衰减. 我国东南沿海的台站，如佘山、广州等地震台，当台风经过附近的海面时会经常遇到这"脉动暴". 研究表明，这类脉动的质点运动轨迹与瑞利波相似，脉动属面波性质，有人认为由于海面上的海浪形成的对海底的压力产生了这种脉动. 大陆架以外的深海区域传播脉动的能力很微弱，只有当风暴进人浅水区即所谓大陆架时，脉动才会显著增强，这说明可能属短周期面波性质的脉动在海陆交界处受到了阻挡，或者脉动只能在浅海处形成. 可能是由于同一种原因形成了对短周期瑞利波和对脉动的阻挡机制.

二、通过大陆的瑞利波

前面 § 7.1 中讲到，均匀弹性半空间中的瑞利波不存在频散，其波速与 k 无关，但实际观测到的瑞利波都存在频散，不仅是通过海洋的瑞利波，而且传播路径全部为大陆的瑞利波也存在频散. 这说明前面理论讨论时所用的模型过于简单，不符合实际情况. 事实上，地壳中的波速、密度与壳上下地幔显著不同，因此，进一步的模型应假设弹性半空间上覆盖

有一层等厚的固体层(图 7.17)，用厚为H的一层来代表地壳. 各层的参数标在图上. 频散方程的推导与前面完全相似，但现在成了六阶行列式，因此要复杂得多，这里不再列出. 仔细地研究频散方程可得到 $\frac{c}{\beta_1} \sim kH$ 的关系，或令

$$T = \frac{2\pi}{kc} = \frac{2\pi H/\beta_1}{kHc/\beta_1},$$

得到 c 与 T 的函数关系. 这个函数出现两大分支，称为 M_1, M_2. M_1 在地表的质点运动为后退椭圆型，M_2 可为前进型也可为后退型，由介质参数决定. 图 7.18 给出了在 $\rho_2/\rho_1 = 1.39$, $\beta_2/\beta_1 = 3.147$, $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \sqrt{3}$ 的情况下，M_1 支和 M_2 支的前两阶振型 (M_{10}, M_{11} 和 M_{20}, M_{21}) 的频散曲线，其中 M 的第二个脚标为阶数. 当 $\lambda \to \infty$ 时 ($kH \to 0$)，仅 M_1 支的基阶振型 M_{10} 的相速度才接近于半空间的瑞利波相速度. 因此 M_{10} 就是地震记录中通常所谓的瑞利波. 其余的振型都存在长波限，且在长波限上的相速度为半空间中的横波速 β_2. 长波限也就是相当于截止频率的最小 kH 值，低于此频率就不能传播无衰减的面波. 当满足斯通雷波存在所必须的严格的条件时，在 M_2 支有一附加振型，在 $kH \to \infty$ 时，其相速度接近于 $0.998\alpha_1$, 称为斯通雷波的速度. 对于其余振型，当 $kH \to \infty$ 其相速度接近于层中的横波速 β_1. 图 7.18 也给出了 M_{10}、M_{11}、M_{20}、M_{21} 对应的群速度，由相速度求群速度的公式仍为 § 7.3 (11).

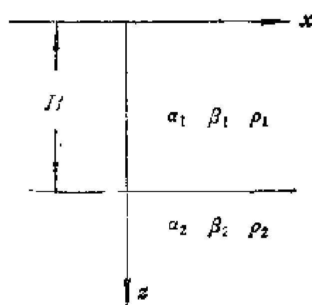


图 7.17

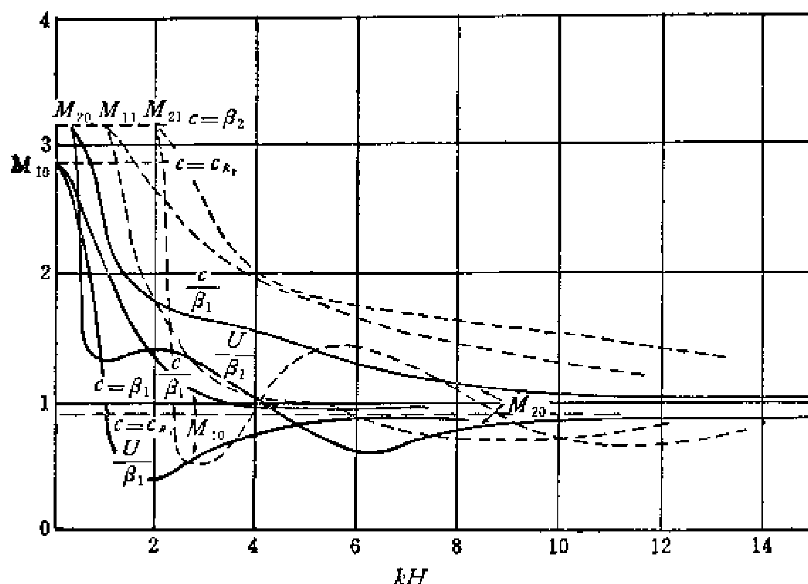


图 7.18 半无限弹性固体上的弹性层的面波波散曲线

$\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \sqrt{3}$; $\beta_2/\beta_1 = 3.147$; $\rho_2/\rho_1 = 1.39$.

利用通过大陆的瑞利波 (即 M_{10}) 可以研究地壳构造，将实测的频散曲线与由理论推出的理论频散曲线相比较，可以了解地壳构造的情况及各层的弹性参数和厚度. 作资料对比时可以利用相速度或群速度的资料.

M_2 波又称为剪切型瑞利波，它并不经常出现，因此不如瑞利波（M_{10}）那样重要，通过大陆地壳的瑞利波才有剪切型的这一分支．有人曾利用它的频散曲线来帮助对比确定地壳的厚度，一般它的周期为 8—15 秒，群速度在 4.2—3.5 公里/秒之间．

大陆地壳的表面有时可有相当厚（达数公里）的沉积层，它的速度一般比较低，可以用这种低速沉积层的影响来解释通过大陆的瑞利波的短周期尾波[9]．

大陆地壳十分复杂，由于地壳的分层结构、速度、密度分布的不同，频散曲线之间有很大的差别，对高阶瑞利波和 M_2 型的波，它们的频散曲线都挤在一起，更增加了对波列性质鉴定的困难．

三、斯通雷（Stoneley）波

前面讨论通过海洋的瑞利波的频散曲线时提到，当 $\gamma\to\infty\left(\text{即}\ \frac{\lambda}{H}\to 0\right)$ 时，瑞利波的相速度 $c\to 0.998\alpha_1$，α_1 为水中纵波速，这时应称为斯通雷波．这种波可以存在于半无穷固体和半无穷液体相接的界面上，它的振幅在固体和液体中都随着离开界面距离的增大而呈指数衰减．当 $\frac{\lambda}{H}\to 0$ 时，厚为 H 的水层就可以看做半无穷空间全部为水，因此 $\frac{\lambda}{H}\to 0$ 就相当于半无穷固体和液体相接的情况．海底为浅源地震经常可激起周期为 1 秒左右的波列，称为 T 震相，有人认为 T 震相可能是上述的通过海洋的斯通雷波和水中的通道波（Sofar 波）联合作用的结果．

当两种性质不同的半无穷固体相接时，在介面上也可能存在斯通雷波，其波速比介面两侧的任何一种固体的横波速都要小些，但这时必须对固体的性质有相当严格的限制，否则这种波不能存在．图 7.19 给出了斯通雷波允许存在的条件，图 7.19 是在

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{\lambda_2}{\mu_2}=1$$

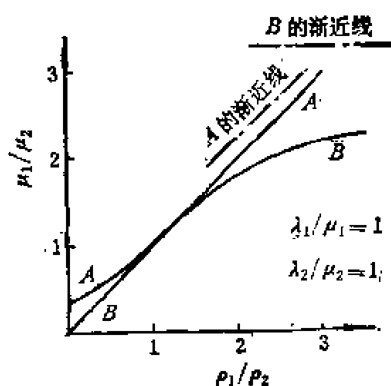


图 7.19

的条件下给出的，也就是假设介面两侧都是泊松固体，对曲线 A 之 B 之间的每一个 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 与 $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ 值，斯通雷波都允许存在．

四、多层弹性半空间中面波的频散方程

我们来讨论一般的 n 层弹性半空间（图 5.11）中面波的频散方程．前面 § 5.4 中我们已讨论了多层弹性半空间对平面入射波的响应．其中 § 5.4（50）式给出

$$\left.\begin{aligned}F_R&=(J_{11}+J_{21})(J_{32}+J_{42})-(J_{12}+J_{22})(J_{31}+J_{41}),\\F_L&=J_{55}+J_{65}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

而 J_{ik} 的定义可参见前面的 § 5.4（46）式．它是各层的弹性常数、层厚度、圆频率 ω 及波数 k 等参数的函数．因此 F_R 和 F_L 也是这些参数的函数．因为 F_R 和 F_L 是 k 和 ω 的函数，因此下面将它们分别记为 $F_R(k,\omega)$ 和 $F_L(k,\omega)$．

由 § 5.4 (10) 式知，当 $k > k_{\beta n} > k_{\alpha n}$ 时，a_n 和 b_n 均为实数. 由 § 5.4 (39) 式知 $\boldsymbol{E}_n^{-1}$ 的各分量全部为实数，而层矩阵 $\boldsymbol{a}_i$ 的各分量全部为实数，因此

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-2} \cdots \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1$$

的各分量全部为实数. 由 (1) 可知在 $k > k_{\beta n} > k_{\alpha n}$ 的条件下，$F_R(k, \omega)$ 及 $F_L(k, \omega)$ 取实数值.

因为当 $k > k_{\beta n} > k_{\alpha n}$ 时，a_n 和 b_n 均为实数，所以当 $z \to \infty$ 时，$e^{a_n z}$ 和 $e^{b_n z}$ 均趋于无穷大. 这显然是不合无穷远处波的有限性要求的. 因此在 § 5.4 (18) 式中，应有

$$a_n^+ = b_n^+ = c_n^+ = 0.$$

但 § 5.4 (49) 式给出自由表面的位移分量谱可表达为

$$\left.\begin{aligned} U_B(0) &= \frac{2}{F_R(k, \omega)}\left[(J_{32} + J_{42})a_n^+ - (J_{12} + J_{22})b_n^+\right], \\ U_P(0) &= \frac{2}{F_R(k, \omega)}\left[(J_{11} + J_{21})b_n^+ - (J_{31} + J_{41})a_n^+\right], \\ U_C(0) &= \frac{2}{F_L(k, \omega)}\, c_n^+. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

由 (11) 可见，在 $k > k_{\beta n}$ 的条件下（永远有 $k_{\beta n} > k_{\alpha n}$），如要求自由表面的位移分量谱不等于零，即如要求 $U_B(0) \neq 0$, $U_P(0) \neq 0$, 则应有

$$F_R(k, \omega) = 0. \tag{12}$$

如果要求 $U_C(0) \neq 0$, 则应有

$$F_L(k, \omega) = 0. \tag{13}$$

在 $k > k_{\beta n}$ 条件下得到了由 $F_R(k, \omega) = 0$ 所给出的波数 k 与频率 ω 之间的关系，称 $F_R(k, \omega) = 0$ 为多层弹性半空间的瑞利波的频散方程. 由 (11) 式可见与 $F_R(k, \omega) = 0$ 相应的位移分量谱是 $U_B(0)$、$U_P(0)$. 也就是说，位移的方向保持在入射平面内，这正是瑞利波的特征. 又由于 $a_n^+ = b_n^+ = c_n^+ = 0$, 因此由 § 5.4 (18) 式得到

$$f_1 = a_n^- e^{-a_n z}, \quad f_2 = b_n^- e^{-b_n z}, \quad f_3 = c_n^- e^{-b_n z}. \tag{14}$$

将它们代入位移谱的表达式 § 5.4 (17) 式，可见至少在第 n 层，即至少在弹性半空间的那一层中，波的位移振幅是随深度 z 的增加而作指数衰减的. 这正是面波的一个主要特征. 因此，与 (11) 或 (12) 式相对应的波是面波.

同样在 $k > k_{\beta n}$ 的条件下，由(13)式 $F_L(k, \omega) = 0$ 给出了波数 k 与 ω 之间的关系，由(11)式可见，所对应的波的位移方向是沿着 $\boldsymbol{C}$ 即沿着 $\boldsymbol{e}_y$ 方向的. 从前面的讨论可见，这种波至少在第 n 层的半空间中位移是随深度 z 增加按指数衰减的(且按 $e^{-b_n z}$ 规律衰减). 这些正是乐甫面波的特征. 因此称 $F_L(k, \omega) = 0$ 为多层弹性半空间中乐甫波的频散方程，而称所对应的面波为乐甫波.

由 (10) 式，瑞利波的频散方程 $F_R(k, \omega) = 0$ 又可写为

$$\frac{J_{31} + J_{41}}{J_{32} + J_{42}} = \frac{J_{11} + J_{21}}{J_{12} + J_{22}}. \tag{15}$$

乐甫波的频散方程 $F_L(k, \omega) = 0$ 又可写为

$$J_{55} = -J_{65}. \tag{16}$$

由于波的相速度 $c = \dfrac{\omega}{k}$, 因此 (12)、(13) 式也给出了瑞利波和乐甫波的相速度 c

与频率 ω 之间的关系.

为了求得瑞利波在自由表面上的垂直位移谱和水平位移谱之比，可讨论 §5.4(48)式，因为现在 $a_n^+ = 0$. 把其中头两式相加便可消去 a_n^-，得

$$\frac{U_P(0)}{U_B(0)} = -\frac{J_{11} + J_{21}}{J_{12} + J_{22}}. \tag{17}$$

记

$$K = \frac{J_{11} + J_{21}}{J_{12} + J_{22}}. \tag{18}$$

再由 §5.4(14)式知，$\boldsymbol{B} = -ie^{-ikx}\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{P} = e^{-ikx}\boldsymbol{e}_z$. 由此得到自由表面上 z 方向和 x 方向的位移分量谱之比

$$\frac{U_z(0)}{U_x(0)} = -iK. \tag{19}$$

前面已提到，在 $k > k_{\beta n}$ 的情况下，J_{ij} 的全部分量均为实数值. 由(18)式可见，此时 k 亦为实数值. 由(19)式可见，当 $K < 0$ 时，z 方向的位移比 x 方向的位移超前 $\frac{\pi}{2}$，这时自由表面上的质点运动的轨迹为后退的椭圆. 当 $K > 0$ 时，则为前进的椭圆. 因此在多层弹性半空间的情况，对于瑞利波自由表面的质点的运动轨迹有可能成为前进的椭圆. 但是只要是瑞利波，其自由表面质点运动的水平方向的位移与垂直方向的位移相位一定差 $\pm\frac{\pi}{2}$.

前面 §7.4 中说明了通过地震记录求得面波的相速度和群速度频散曲线的方法，本节又阐述了多层弹性半空间中瑞利波和乐甫波的理论频散曲线(由(12)、(13)式可得到这种频散曲线，即 k-ω 曲线). 可以给出各种成层地壳及上地幔模型，求得面波的理论频散曲线. 将理论曲线与实测曲线比较，不断地调整地壳和上地幔模型，使理论与实测尽可能吻合，就可以求得地壳和上地幔的结构. 曾用这种方法对我国的地壳结构作过研究[9,10,11].

§7.6 短周期面波、导波

短周期面波是通过大陆型(包括沿海大陆架)地壳的地震波所特有的震相，通过海洋的面波中一般没有它们. 自1952年它们开始在地震图上受到人们的注意和研究以来，不少人提出了许多种短周期面波的震相，这里只择要介绍.

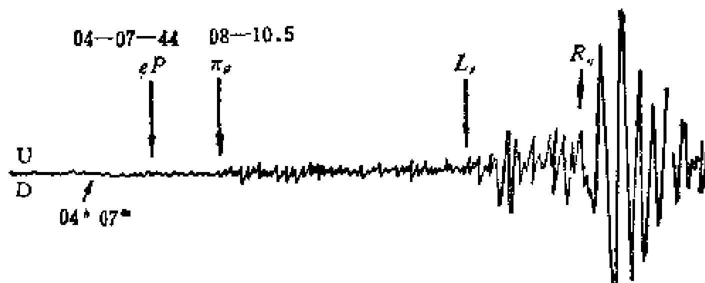


图7.20 1967年12月3日河北束鹿南地震 0:04-05-48(北京时)
兰州台基式仪记录，$\Delta = 9.3°$, $\Delta t = 23.1'$

一、L_g 震相

它的特点是初始尖锐，周期为 1—5 秒，在水平分量上经常作为连续的短周期波列叠加在长周期的乐甫波波列上．但它在垂直分量上也有清晰的初动和波列，这点是与乐甫波不同的．L_g 波又可分为 L_{g1} 和 L_{g2} 两个震相，L_{g1} 速度约为 3.5—3.6 公里/秒，L_{g2} 约为 3.3—3.4 公里/秒，这都是根据初动算出的速度，L_{g1} 一般比 L_{g2} 的振幅要小些．它们随震中距的增大衰减较慢．

二、R_g 震相

表现为尖锐的初始，记录开始部分往往表现为强脉冲、大振幅、表面质点的运动轨迹为后退的椭圆，与瑞利波相同．和 L_g 一样，随震中距的增大衰减较慢，由初动算出的平均波速为 3.05 公里/秒左右，周期为 8—12 秒，并且经常表现为反波散，即小周期的波先到．

三、L_i 震相

这是瑞典的巴特（Båth）在 1957 年提出的，它是 SH 型的波，速度为 3.79 公里/秒，相当于地壳底层的 S 波波速，周期在 5 秒以下，振幅随震中距也衰减较慢，但这种波不易分辨，不如 L_g、R_g 清晰．

四、π_g 震相

它是在 P 波之后 S 波之前的波列，振幅比较小，周期为 1—6 秒，平缓的起始，速度为 6.1 公里/秒，振幅随震中距的增加也衰减较慢，我国东部的地震在东部的台站有时记它记得较好，但 π_g 并不经常出现．

主要的短周期面波就是上述几种，其中最主要的是 L_g 和 R_g．短周期面波是大陆型地壳结构所特有的地震波，当地震波通过的路径上有 150 公里以上的海洋型地壳时，短周期面波便受阻而不能通过，当它们通过山脉地区时也受到强烈的衰减，因此 L_g、R_g 能否顺利的通过成为区别地壳结构及其性质的重要标志．我国台湾地区的地震在我国各地震台站都能记到清晰的 L_g 和 R_g 波列，说明台湾海峡是大陆型地壳．

由于在 5°—25° 范围内为 P、S 波的影区，特别对 S 波的鉴定更为困难，而在这一震中距范围内，通过大陆地壳的 L_g、R_g 的初动经常十分清晰，因此可以利用它们例如用 L_g 与 P 波的到时差来确定震中距．

关于 L_g、R_g 等波列的性质，目前还有争论，一种看法是认为它们是高阶面波，而其起始是对应高阶面波频散曲线的群速度极值处（图 7.21）．高阶面波十分复杂，有高阶乐甫波，高阶瑞利波、M_2 波及高阶 M_2 波，它们的频散曲线经常交错在一起，相互重叠，而随着地壳结构参数的不同，它们的频散曲线的位置也不同，因此比较难以确定 L_g、R_g 与这些高阶面波的具体对应关系．也有人认为，由于地面低速沉积层的影响，使基阶乐甫波和瑞利波的群速度频散曲线在 U-T 图上出现比较宽的平坦的一段，有时甚至出现反波散段（图 7.22 中 AB 段），因此比较宽的一段频带的波就会几乎同时到达，形成 L_g、R_g 的尖锐初至．总之，这一类看法认为它们是面波的一种．

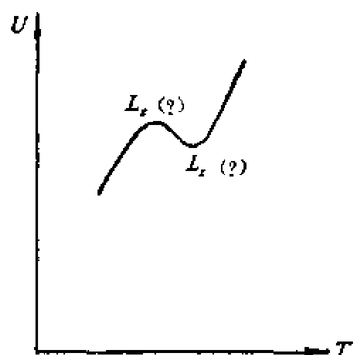


图 7.21 高阶面波频散曲线

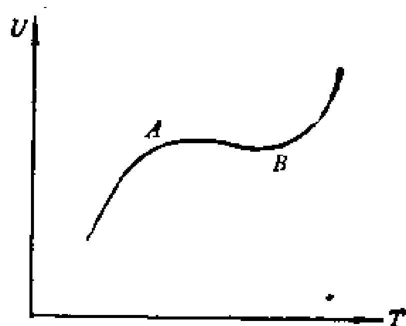


图 7.22 基阶面波频散曲线

而另一种看法认为它们是地壳低速层中的导波. 设地壳中纵(横)波速度随深度 z 的分布如图 7.23 中 (a)、(b) 所示,则就有相应的如图 7.23 中 (a)、(b) 所示的地震射线,一部分波的能量就会被限制在低速通道内而水平传播, 因而振幅衰减较慢, 从而称之为导波. 有人还具体提出了地壳内速度分布的模型和对 L_{g1}、L_{g2} 传播通道的设想. 大量事实证明, 在海洋中 700 米—1300 米处有一个声波速度的低速区, 声波能在此区间内传播很远,形成所谓声道波 (Sofar 波), 地震学上称为 T 震相. 由此声波通道联想到 L_g、R_g 是否也是地壳中低速层的通道波或称为导波.

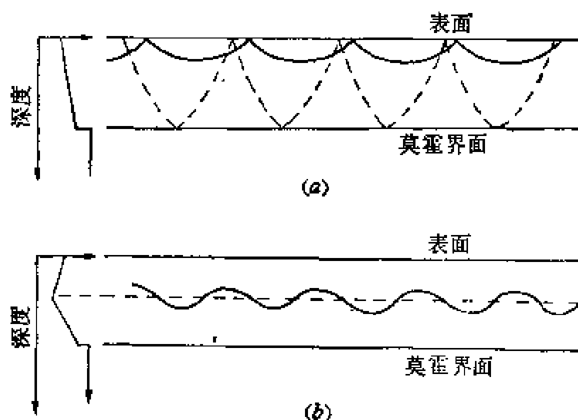


图 7.23

(a) 由速度梯度所形成的波导 (b) L_g 波可能的形成机制

非均匀介质中波的传播理论十分复杂,如果在一个波长范围内介质的 ρ、μ、λ 的变化不可忽略,则 P 波和 S 波将互相耦合, 因而不可能将它们之间作出明显的区分, 目前导波的解释还只是定性的简单图象。

第八章 震源与地震波

震源在发震前后的物理过程特别是应力的积累与释放过程是地震研究的一个重要方面，对于研究地震预报问题更为重要．地震波的产生与发震时的物理过程有密切的关系，对各类地震波（体波、面波）的各种特性进行系统的研究有助于我们了解震源的情况．目前这方面的研究工作发展较快，不可能一一介绍，这里仅提出一些基础的问题，使大家对震源与地震波的关系有初步的了解．

这方面的问题即使用最简单的理论简化模型，其数学推导也是十分繁复的，用到的数学工具也比较多．阅读时希望能着重了解在什么样的理论简化条件下，得出什么样的结果，以及求解过程中的思路．

§8.1 球腔爆炸的地震波

这个问题与炸药爆破，地下核爆炸产生地震波的问题有直接的联系．有人提出，某些深震是由于地下矿物的突然相变而造成地下压力的突增，如果这个模型正确的话，则与球腔爆炸问题有相似之处．

在均匀介质中挖一球形空腔，装入炸药引爆，则爆炸时产生的高压均匀地加于空腔球壁上，由此产生了弹性波传播到周围介质中去．实际上一般爆炸总能引起腔壁的永久性破坏，这就牵涉到非弹性问题，激发的波将不是弹性而是冲激波，但我们总可找到一个半径为 r_0 的球面，在这个球面上不发生非弹性形变，设这个球面上压力随时间的变化为 $p(t)$，下面将研究所激发的弹性波与以 r_0 为半径的球面上的压力 $p(t)$ 的关系，如果球腔足够大而装药量又十分小，则腔壁上也仅发生弹性形变，这时以 r_0 为半径的球面就是球腔壁．

显然在球对称的压力 $p(t)$ 的作用下，介质将产生球对称的无旋波，而不能产生无散波，也就是只有 P 波，不产生 S 波，这一点后面还要讨论．因此其位移函数为 ϕ，而位移为

$$\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{i}_{(r)}, \tag{1}$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{i}_{(r)}$ 为向径方向的单位矢量，这里坐标原点取在球腔的中心．ϕ 应满足波动方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \tag{3}$$

拉氏算符 $\nabla^2 \phi$ 在球坐标下的表达式为

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \tag{4}$$

由于 ϕ 是球对称的，因此

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0,$$

(4) 化为

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi). \tag{5}$$

(5) 代入 (3) 可得

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi), \tag{6}$$

方程 (6) 的通解可写为

$$\phi(r, t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r - r_0}{\alpha}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{r - r_0}{\alpha}\right)}{r}, \tag{7}$$

f_1, f_2 可为任意连续函数，f_1 代表辐射波，f_2 代表集聚波，因此应取 f_1 而弃去 f_2, (3) 的球对称通解为

$$\phi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r - r_0}{\alpha}\right)}{r}. \tag{8}$$

下面讨论边条件，边条件有两个，一个是 $r = r_0$ 处的压力为 $p(t)$. 另一个实际上与初始条件有关. 因为当爆炸开始前即 $t \leqslant 0$ 时，$u(r, t) = 0$, 由此，$\phi(r, t) = 0$, 而 $t = t$ 时刻，波前位置满足方程

$$t = \frac{r - r_0}{\alpha}, \tag{9}$$

而当 $r \geqslant r_0 + \alpha t$ 处仍有

$$u(r, t) = 0, \quad \phi(r, t) = 0 \ (r \geqslant r_0 + \alpha t). \tag{10}$$

由于位移及位移函数连续性的要求，所以 (10) 式中对 r 的条件中加上了等号. 因此在波前 (满足 (9) 式) 上位移和位移函数都为零. 因此有

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{rr}\big|_{r=r_0} = -p(t), \\ &\phi(r, t)\Big|_{t=\frac{r-r_0}{\alpha}} = 0, \\ &u(r, t)\Big|_{t=\frac{r-r_0}{\alpha}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(10) 中 $p(t)$ 取负号是设 $p(t) > 0$, 而按照应力的符号规定，压力总是取负值. 由弹性力学知，应力张量在球坐标系中的分量

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu e_{rr} = \lambda\nabla^2\phi + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \tag{12}$$

(2) 代入 (12), 并利用波动方程 (3) 得

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}, \tag{13}$$

将 (8) 代入 (13) 再一起代入 (10) 得

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\alpha^2 r_0}f''(t) + \frac{4\mu}{\alpha r_0^2}f'(t) + \frac{4\mu}{r_0^3}f(t) = -p(t). \tag{14}$$

(14) 式可化为单自由度的强迫振动方程，即二阶非齐次常微分方程

$$f''(t) + 2h\omega_0 f'(t) + \omega_0^2 f(t) = cp(t), \tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\omega_0=\frac{2\beta}{r_0},\ h=\frac{\beta}{\alpha},\ c=-\frac{r_0}{\rho},\\&\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\ \beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

而 α、β 就是纵、横波速. (15) 式的齐次通解为

$$f_0(t)=e^{-h\omega_0 t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t),$$

其中

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-h^2}.\tag{17}$$

(15) 的非齐次特解为

$$\begin{aligned}f_1(t)&=\frac{1}{\omega}\int_0^t cp(\tau)e^{-h\omega_0(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau\\&=\frac{c}{\omega}e^{-h\omega_0 t}\int_0^t p(\tau)e^{h\omega_0\tau}\sin\omega(t-\tau)d\tau,\end{aligned}$$

因此 (15) 的解应为

$$\begin{aligned}f=f_0(t)+f_1(t)&=e^{-h\omega_0 t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\\&+\frac{c}{\omega}e^{-h\omega_0 t}\int_0^t p(\tau)e^{h\omega_0\tau}\sin\omega(t-\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{18}$$

当

$$p(t)=p_0H(t),$$

其中

$$H(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0,\end{cases}\tag{19}$$

来求位移场. 将 (19) 代入 (18), 经过分部积分运算可得

$$f_H=e^{-h\omega_0 t}(A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t)-\frac{p_0r_0}{\rho\omega_0^2}.\tag{20}$$

(20) 中的常数 A_1、B_1 可由波前的条件 (11) 决定. 利用 (18)、(2) 可使 (11) 化为

$$\left.\begin{aligned}&\phi(r,t)\Big|_{t=\frac{r-r_0}{\alpha}}=\frac{f(0)}{r}=0,\\&u_r(r,t)\Big|_{t=\frac{r-r_0}{\alpha}}=\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{t=\frac{r-r_0}{\alpha}}=-\frac{1}{\alpha r}f'(0)-\frac{1}{r^2}f(0)=0.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

将 (20) 代入 (21) 得

$$A_1-\frac{p_0r_0}{\rho\omega_0^2}=0,\ \omega B_1-h\omega_0A_1=0.\tag{22}$$

由此

$$A_1=\frac{p_0r_0^3}{4\mu},\quad B_1=\frac{p_0r_0^3}{4\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}.\tag{23}$$

如引入

$$\tau=t-\frac{r-r_0}{\alpha},$$

则位移

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}\ \phi(\tau) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(\tau)}{r}\right) = \left[-\frac{1}{\alpha r}\ f'(\tau) - \frac{1}{r^2}f(\tau)\right]H(\tau), \tag{24}$$

将 (22) 代入 (20)，再一起代入 (24) 可得

$$u_r = \frac{p_0 r_0}{4\mu}\left\{2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\frac{r_0}{r}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}\sin\omega\tau\right.$$
$$\left.+\frac{r_0^2}{r^2}\left[1-\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}}e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}\sin(\omega\tau+\delta)\right]\right\}H(\tau), \tag{25}$$

其中

$$\delta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\mu}},$$

τ 见 (23) 式，对泊松固体，有 $\lambda = \mu$，则

$$u_r = \frac{p_0 r_0}{4\mu}\left\{\frac{r_0}{r}\sqrt{2}\,e^{-\frac{2\alpha}{3r_0}\tau}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}\,\alpha}{3r_0}\tau\right)\right.$$
$$\left.+\frac{r_0^2}{r^2}\left[1-\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{2\alpha}{3r_0}\tau}\sin\left(\frac{2\sqrt{2}\,\alpha}{3r_0}\tau+\tan^{-1}\sqrt{2}\right)\right]\right\}H(\tau). \tag{26}$$

(25) 或 (26) 代入 (1) 便得位移向量场. 从(25)、(26)看到位移场包括两项，一项正比于 $\frac{r_0}{r}$，一项正比于 $\frac{r_0^2}{r^2}$，当 $r \gg r_0$ 时，即在足够远处，可忽略 $\frac{r_0^2}{r^2}$ 项，得

$$u_r = \frac{p_0 r_0^2}{2\mu}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\,\frac{1}{r}\,e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}\sin\omega\tau, \tag{27}$$

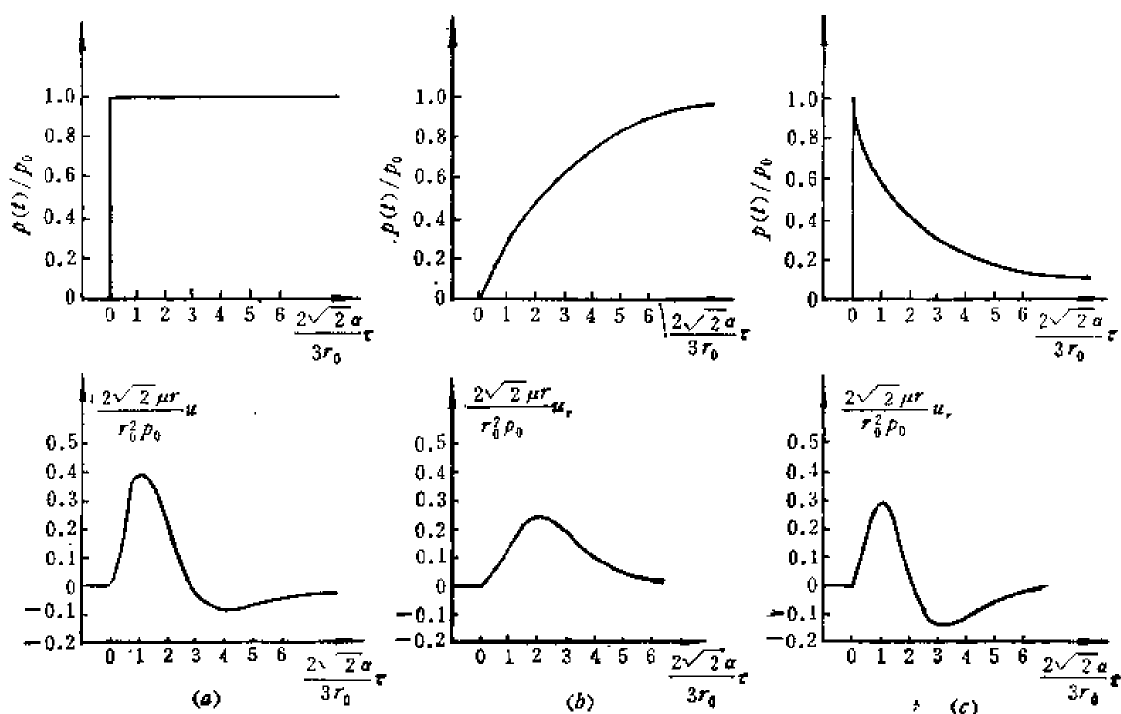


图 8.1

其中ω及τ见(17)、(16)及(23)式.

当$p(t)$为其他形式的函数时，可用同法求出(18)，再用波前条件(11)式定出任意常数A和B来.

图8.1给出了几种压力函数下远离震源处的振动. 图中上面的三个图代表作用于洞壁的压力，下面的三个图为相应的位移. 其中压力函数分别为

$$(a)\quad p(t)=\begin{cases}p_0 & t>0\\ 0 & t<0,\end{cases}$$

$$(b)\quad p(t)=\begin{cases}p_0(1-e^{-st}) & t>0\\ 0 & t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$(c)\quad p(t)=\begin{cases}p_0e^{-st} & t>0\\ 0 & t<0.\end{cases}$$

再看(25)式，由于其中有指数项$e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}\omega\tau}\simeq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega\tau}$，可见振动衰减很快，经过一次往复运动振动就为原来的$e^{-\sqrt{2}\pi}\simeq 0.012$因此实际上只有一次往复运动. 由(17)及(16)式，振动圆频率

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-h^2}=\frac{2\beta}{r_0}\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}}\simeq\frac{2\sqrt{2}\alpha}{3r_0},\tag{28}$$

也就是$\omega\propto\frac{1}{r_0}$，但知$r_0\propto$装药量，因此爆炸越大，记录到的纵波频率越低. 对于天然地震也有类似现象，一般地震越大，记录到的体波频率越低.

前面指出，在球对称的压力作用下，不能产生无散波，也就是不能产生S波. 现在引入位移势$\boldsymbol{\phi}$，而无散波的位移场

$$\boldsymbol{u}_S=\nabla\times\boldsymbol{\phi}.\tag{29}$$

在球坐标下(29)式可写为

$$\boldsymbol{u}_S=\nabla\times\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\phi_\varphi\sin\theta-\frac{\partial\phi_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\boldsymbol{i}_{(r)}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\phi_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_\varphi)\right]\boldsymbol{i}_{(\theta)}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_\theta)-\frac{\partial\phi_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{i}_{(\varphi)},\tag{30}$$

由于问题的对称性，显然应有$\phi_\theta=\phi_\varphi=0$. 并有

$$\frac{\partial\phi_r}{\partial\theta}=\frac{\partial\phi_r}{\partial\varphi}=0,$$

因此

$$\boldsymbol{u}_S=\nabla\times\boldsymbol{\phi}=0.$$

可见球对称的爆炸不能产生无散位移场$\boldsymbol{u}_S$，也就是不能激发S波. 然而对普通炸药爆破或是地下核爆炸试验进行的地震观测中都发现有清晰的S波，其原因可能在于

1. 爆炸后引起原来岩石中积累的应力的释放，例如在地下核爆炸的现场附近观测到了爆炸后断层的错动；

2. 震源附近介质非均匀性的影响，因而P、S波相互耦合互相激发；

3. 爆炸洞腔原来的非对称性，及地表的影响.

§ 8.2 集中力产生的地震波

上述爆炸问题虽然是地震学中的一个方面，但大量的天然地震的震源情况与此并不一样，对构造地震来说，地震发生过程的最简单的模型就是岩石在一对力偶的作用下积累的应力的突然释放引起了地震．要讨论力偶的作用首先要弄清楚在单个集中力的作用下所激发的地震波，然后只要用简单的求微商的方法就能求得力偶作用下产生的地震波．

一、力　势

考虑有体力存在的情况，设单位质量的介质上受到的体力作用的场为 $\boldsymbol{f}(x_1、x_2、x_3、t)$，由向量分析知任何向量场必可分为无旋场和无散场之和，即有

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3, t) = \nabla V + \nabla \times \boldsymbol{w} \tag{1}$$

其中 V 和 $\boldsymbol{w}$ 分别为无旋场和无散场的力势．

弹性介质的位移场应满足方程

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{f}. \tag{2}$$

令

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\phi}. \tag{3}$$

对 (1)、(3)、(2) 求散度得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \nabla^2 V, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla^2\phi, \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = (\lambda + 2\mu)\nabla^2(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{f}. \tag{6}$$

将 (4)、(5) 代入 (6) 得

$$\nabla^2 \left[\rho \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - \rho V\right] = 0.$$

由此有

$$\rho \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi + \rho V,$$

或

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \alpha^2\nabla^2\phi + V. \tag{7}$$

同样对 (1)、(3) 求旋度得

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{f} &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{w}) - \nabla^2\boldsymbol{w}, \\ \nabla \times \boldsymbol{u} &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) - \nabla^2\boldsymbol{\phi}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

可令 $\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0$．因为如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{w} \neq 0$，可令 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \nabla Q$，由此

$$\nabla \times \boldsymbol{w} = \nabla \times \boldsymbol{w}_1, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{w} = \nabla \cdot \boldsymbol{w}_1 + \nabla^2 Q.$$

只要选择 $\nabla \cdot \boldsymbol{w} = \nabla^2 Q$，则必有 $\nabla \cdot \boldsymbol{w}_1 = 0$．现在有了 $\nabla \times \boldsymbol{w}_1 = \nabla \times \boldsymbol{w}$，$\nabla \cdot \boldsymbol{w}_1 = 0$．而由泊松方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{w} = \nabla^2 Q$ 很容易求出 Q 来（见 (12) 式）．因此，如 $\nabla \cdot \boldsymbol{w} \neq 0$，可找到

$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w} - \nabla Q$，使 $\nabla \times \boldsymbol{w}_1 = \nabla \times \boldsymbol{w}$，且有 $\nabla \cdot \boldsymbol{w}_1 = 0$；而现在令 $\boldsymbol{f} = \nabla V + \nabla \times \boldsymbol{w}_1$ 即可. 同样可令 $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$. 由此 (8) 化为

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{f} &= -\nabla^2 \boldsymbol{w}, \\ \nabla \times \boldsymbol{u} &= -\nabla^2 \boldsymbol{\phi}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

对 (2) 式求旋度，与前面同法可得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{w},$$

其中

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

因此有

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \phi + V, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{w}. \tag{11}$$

如果已知 V、$\boldsymbol{w}$，就可从 (10)、(11) 式求出 ϕ、$\boldsymbol{\phi}$ 来，再从 (3) 式求得位移场 $\boldsymbol{u}$. 因此现在问题是已知体力场 $\boldsymbol{f}$ 求力势 V、$\boldsymbol{w}$. 再进一步由 (10)、(11) 式求出位移函数 ϕ、$\boldsymbol{\phi}$. 由 (4) 式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \nabla^2 V.$$

这是关于 V 的泊松 (Poisson) 方程，由数理方法知它的解为

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{f}(\xi_1', \xi_2', \xi_3', t)}{r'} dv', \tag{12}$$

其中

$$r' = \sqrt{(\xi_1 - \xi_1')^2 + (\xi_2 - \xi_2')^2 + (\xi_3 - \xi_3')^2}, \tag{13}$$
$$dv' = d\xi_1' d\xi_2' d\xi_3',$$

$\nabla' \cdot$ 表示对 (ξ_1', ξ_2', ξ_3') 求散度.

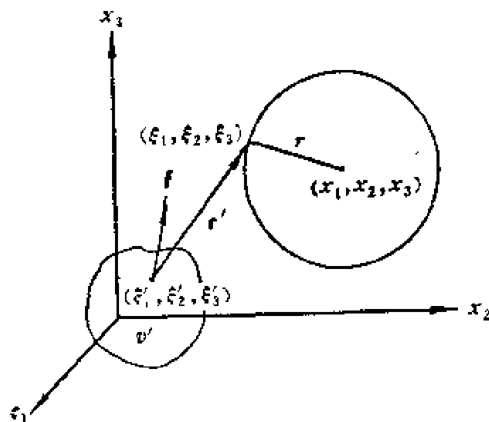


图 8.2

因此 (ξ_1', ξ_2', ξ_3') 为力的源点，(ξ_1, ξ_2, ξ_3) 为力势的场点 (图 8.2). 设 f 只在区域 v' 内存在 (图 8.2)，所以 (12) 式的积分实际上只在区域 v' 内进行. (12) 式中 $\boldsymbol{f}$ 的分量为 $(f_{\xi_1'}, f_{\xi_2'}, f_{\xi_3'})$ 而

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_{\xi_1'}}{\partial \xi_1'} + \frac{\partial f_{\xi_2'}}{\partial \xi_2'} + \frac{\partial f_{\xi_3'}}{\partial \xi_3'} \tag{14}$$

(14) 代入 (12) 后进行分部积分，例如对 $\partial f_{\xi_1'} / \partial \xi_1'$ 项有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r'} \frac{\partial f_{\xi_1'}}{\partial \xi_1'} d\xi_1' = \frac{f_{\xi_1'}}{r'} \Big|_{\xi_1' = -\infty}^{\xi_1' = +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1'} \frac{\partial (r'^{-1})}{\partial \xi_1'} d\xi_1'$$

上式等号右边第一项的积分限都在区域 v' 之外，显然应为零. 而由 (13) 知

$$\frac{\partial(r'^{-1})}{\partial \xi_1'} = -\frac{1}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial \xi_1'} = \frac{\xi_1 - \xi_1'}{r'^3} \tag{15}$$

由此知，(12) 可化为

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}'}{r'^3}\,dv',$$

其中 $\boldsymbol{r}'$ 为 (ξ_1', ξ_2', ξ_3') 到 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 的向量．(15) 式就是由 $\boldsymbol{f}$ 求 V 的公式．同样由 (9) 式

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = -\nabla^2 \boldsymbol{w},$$

它是力的矢量势 $\boldsymbol{w}$ 的泊松方程，与 (12) 相似应有

$$\boldsymbol{w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla' \times \boldsymbol{f}(\xi_1', \xi_2', \xi_3', t)}{r'}\,dv'.$$

用求得 (15) 的同样方法可得

$$\boldsymbol{w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{r}'}{r'^3}\,dv'. \tag{16}$$

因此如已知力场 $\boldsymbol{f}(\xi_1', \xi_2', \xi_3', t)$，则必有力势 V、$\boldsymbol{w}$ 使

$$\boldsymbol{f} = \nabla V + \nabla \times \boldsymbol{w},$$

而

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{f}\cdot\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\,d\xi_1' d\xi_2' d\xi_3',$$

$$\boldsymbol{w}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{f} \times \frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}\,d\xi_1' d\xi_2' d\xi_3',$$

而

$$r' = \sqrt{(\xi_1 - \xi_1')^2 + (\xi_2 - \xi_2') + (\xi_3 - \xi_3')^2},$$

$\boldsymbol{r}'$ 为 (ξ_1', ξ_2', ξ_3') 到 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 的向量．

二、有体力场存在时的波动方程及其解

前面讲到如有力场 $\boldsymbol{f}(\xi_1', \xi_2', \xi_3', t)$，则必可找到力势 V、$\boldsymbol{w}$ 使满足 (1) 式，并有波动方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \phi + V,$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{w}.$$

而位移场 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$．现在来讨论方程 (10)，即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \phi + V, \\ &\phi|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

由数理方法的知识知方程 (17) 的解为

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2}\int_\infty \frac{V\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \dfrac{r}{\alpha}\right)}{r}\,dv, \tag{18}$$

同样

$$\boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi\beta^2}\int_{\infty} \frac{\boldsymbol{w}\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\frac{r}{\beta}\right)}{r} dv, \tag{19}$$

而

$$r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}, \tag{20}$$
$$dv = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

势 $V\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\frac{r}{\alpha}\right)$ 及 $\boldsymbol{w}\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\frac{r}{\beta}\right)$ 称为推迟势，它表示离开观测点 (x_1, x_2, x_3) 距离为 r 的地方的外力势的影响要推迟 $\frac{r}{\alpha}\left(或\frac{r}{\beta}\right)$ 时刻后才能到达观测点. 或者说在 t 时刻观测点 (x_1, x_2, x_3) 处的位移函数 ϕ、$\boldsymbol{\psi}$ 是受了 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 处在 $t-\frac{r}{\alpha}\left(或 t-\frac{r}{\beta}\right)$ 时刻的外力势的影响，而 r 为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 到 (x_1, x_2, x_3) 点的距离. 也就是说只有以观测点 (x_1, x_2, x_3) 为球心，r 为半径的球面上在 $t-\frac{\alpha}{r}\left(或 t-\frac{r}{\beta}\right)$ 时刻的外力势在 t 时刻才能对观测点产生影响. 由 (18)、(19) 就可以从 V, $\boldsymbol{w}$ 求出 ϕ, $\boldsymbol{\psi}$, 从而再由 (3) 求出位移场 $\boldsymbol{u}$.

归纳一下在任意外力场 $\boldsymbol{f}$ 时，由 $\boldsymbol{f}$ 求位移场 $\boldsymbol{u}$ 的步骤:

1. 由外力场 $\boldsymbol{f}$ 通过 (15)、(16) 式求外力势 V、$\boldsymbol{w}$;
2. 由外力势 V、$\boldsymbol{w}$ 通过 (18)、(19) 求出位移函数 ϕ、$\boldsymbol{\psi}$;
3. 由位移函数 ϕ、$\boldsymbol{\psi}$ 通过 (3) 求出位移场 $\boldsymbol{u}$.

三、集中力激发的弹性波

前面讨论的是任意外力场，下面考虑一种特殊的外力场——集中力的作用下产生的位移场，即求集中力激发的弹性波.

假定有力场

$$\boldsymbol{F}(t)\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30}),$$

其中

$$\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})$$

为 δ 函数，它满足

$$\int_{v'} g(\xi_1', \xi_2', \xi_3')\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})dv'$$
$$=\begin{cases} g(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) & 当\ v'\ 包含\ (\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})\ 点, \\ 0 & 当\ v'\ 不包含\ (\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})\ 点. \end{cases} \tag{21}$$

$\boldsymbol{F}(t)\delta$ 这种表达形式相当于体力 $\boldsymbol{f}$ 的作用区域（包含 $(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})$ 点）无限缩小而收缩至 $(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})$ 点时 $\rho\boldsymbol{f}$ 的体积分趋于一个非零的有限极值 $\boldsymbol{F}(t)$ 的情况. 因此

$$\boldsymbol{F}(t)\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})$$

就代表集中力. 即有

$$\int \rho\boldsymbol{f}dv' = \int \boldsymbol{F}(t)\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})dv' = \boldsymbol{F}(t). \tag{22}$$

仿照前面求 $\boldsymbol{u}$ 的三个步骤

1. 求集中力 $\boldsymbol{F}(t)\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})$ 的力势 V、$\boldsymbol{w}$ 令

$$\boldsymbol{F}(t)\delta(\boldsymbol{\xi}'-\boldsymbol{\xi}_0)=\nabla V+\nabla\times\boldsymbol{w}. \tag{23}$$

由 (15)、(16) 知

$$V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{F}(t)\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})}{\rho}\cdot\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}dv'=\frac{\boldsymbol{F}(t)}{4\pi\rho}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}. \tag{24}$$

$$\boldsymbol{w}(\xi_1, \xi_2, \zeta_3, t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{F}(t)\delta(\xi_1'-\xi_{10}, \xi_2'-\xi_{20}, \xi_3'-\xi_{30})}{\rho}\times\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}dv'$$

$$=\frac{\boldsymbol{F}(t)}{4\pi\rho}\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}, \tag{25}$$

其中

$$\boldsymbol{r}_0=\sqrt{(\xi_1-\xi_{10})^2+(\xi_2-\xi_{20})^2+(\xi_3-\xi_{30})^2},$$

$$\boldsymbol{r}'=\sqrt{(\xi_1-\xi_1')^2+(\xi_2-\xi_2')^2+(\xi_3-\xi_3')^2}. \tag{26}$$

2. 通过 (18)、(19) 求位移函数 ϕ, $\boldsymbol{\phi}$.

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{4\pi\alpha^2}\int_\infty\frac{\boldsymbol{F}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)}{4\pi\rho r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\phi}(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{4\pi\beta^2}\int_\infty\frac{\boldsymbol{F}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)}{4\pi\rho r}\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{28}$$

其中

$$r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}. \tag{29}$$

注意力的作用点为 $(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})$, 力势的点为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3), 位移函数的点为 (x_1, x_2, x_3).

下面进一步求出 ϕ 和 $\boldsymbol{\phi}$, 把体积分化为以 (x_1, x_2, x_3) 为心、r 为半径的球面 S 上的面积分,再对 r 从零积到∞,由此 (27) 式化为

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{4\pi\alpha^2}\int_0^\infty\frac{\boldsymbol{F}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)}{4\pi\rho r}dr\cdot\int_S\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}ds. \tag{30}$$

设以 $\boldsymbol{R}$ 表示观测点 (x_1, x_2, x_3) 对力的作用点 $(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})$ 的矢径,并有

$$\boldsymbol{R}=\sqrt{(x_1-\xi_{10})^2+(x_2-\xi_{20})^2+(x_3-\xi_{30})^2}, \tag{31}$$

利用球函数的展开定理可证有下式(见附录一)

$$\int_S\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}ds=\begin{cases}0, & r>R,\\ 4\pi r^2\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}, & r<R.\end{cases} \tag{32}$$

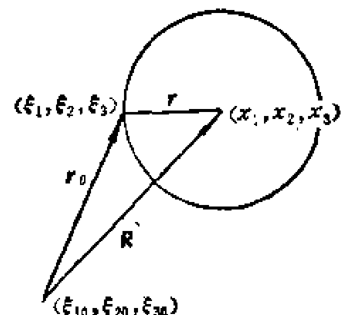


图 8.3

因此 (30) 中对 r 的积分以 R 为上限

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\int_0^R r\boldsymbol{F}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)dr$$

令 $\frac{r}{\alpha}=\tau$

$$=\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\int_0^{R/\alpha}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau. \tag{33}$$

完全类似的方法,可从(28)式得

$$\boldsymbol{\phi}(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\times\int_0^{R/\beta}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau. \tag{34}$$

将(33)、(34)代入(3)式,经计算后可得(见附录三)

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{u}_P + \boldsymbol{u}_S + \boldsymbol{u}_L, \tag{35}$$

其中

$$\boldsymbol{u}_P = \frac{\left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right]}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 R}\boldsymbol{P}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right), \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_S &= \frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\left\{\frac{1}{R}\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\beta}\right) - \left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\right]\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right\}\\ &= \frac{1}{4\pi\rho\beta^2\boldsymbol{R}}\boldsymbol{S}\left(t-\frac{R}{\beta}\right),\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_L &= \frac{1}{4\pi\rho}\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau\left\{3\left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}(t-\tau)\right]\frac{\boldsymbol{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{F}(t-\tau)}{R^3}\right\}d\tau\\ &= \frac{1}{4\pi\rho R^3}\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau\{2\boldsymbol{P}(t-\tau) - \boldsymbol{S}(t-\tau)\}d\tau.\end{aligned} \tag{38}$$

而 $\boldsymbol{P}(t)$ 代表集中力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 方向上的分力, $\boldsymbol{S}(t)$ 代表集中力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在垂直于 $\boldsymbol{R}$ 方向的平面上的分力,(35)、(36)、(37)、(38)的结果十分重要,有必要讨论一下.(35)式表示总的位移场由三部分组成,第一部分为 $\boldsymbol{u}_P$, 从(36)式知 $\boldsymbol{u}_P$ 的波速为 α, 而且位移方向与力的作用点(震源)到观测点(台站)的矢径 $\boldsymbol{R}$ 的方向一致,因此是纵波或 P 波,振幅大小与集中力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的分量有关,因此当 $\boldsymbol{R}$ 的大小不变,方向变化时, $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的分量也变化,因此球面纵波的振幅大小依方向变化.同理第二部分 $\boldsymbol{u}_S$ 是以 β 为波速的球面横波或 S 波,位移方向与波的传播方向 $\boldsymbol{R}$ 相垂直,且与 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{R}$ 同面(见(37)式), $\boldsymbol{u}_L$ 称为 Laplace 波,它在 P 波与 S 波之间,可以看做修正项.

取球坐标系,并设 $\boldsymbol{F}(t)$ 沿 x_3 轴方向作用且作用点为(0, 0, 0)点(图 8.4)即有

$$\boldsymbol{F}(t) = F(t)\boldsymbol{i}_{(3)}. \tag{39}$$

由(36)、(37)则有

$$\boldsymbol{P}(t) = F(t)\cos\theta\boldsymbol{i}_{(r)}, \quad \boldsymbol{S}(t) = -F(t)\sin\theta\boldsymbol{i}_{(\theta)}. \tag{40}$$

这时(36)、(37)、(38)可化为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_P &= \frac{F\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho R}\cdot\frac{\cos\theta}{\alpha^2}\boldsymbol{i}_{(r)},\\ \boldsymbol{u}_S &= -\frac{F\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho R}\cdot\frac{\sin\theta}{\beta^2}\boldsymbol{i}_{(\theta)},\\ \boldsymbol{u}_L &= \frac{1}{4\pi\rho R^3}\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau F(t-\tau)(2\cos\theta\boldsymbol{i}_{(r)}\\ &\quad + \sin\theta\boldsymbol{i}_{(\theta)})d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

图 8.4

当 $\boldsymbol{F}(t)$ 是集中瞬间脉冲式的作用力,即设

$$\boldsymbol{F}(t) = F_0\delta(t)\boldsymbol{i}_{(3)}, \tag{42}$$

则 (41) 式为

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_P &= \frac{F_0\delta\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho R}\cdot\frac{\cos\theta}{\alpha^2}\boldsymbol{i}_{(r)},\\
\boldsymbol{u}_S &= -\frac{F_0\delta\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho R}\cdot\frac{\sin\theta}{\beta^2}\boldsymbol{i}_{(\theta)},\\
\boldsymbol{u}_L &= \begin{cases}\dfrac{t}{4\pi\rho R^3}F_0(2\cos\theta\boldsymbol{i}_{(r)}+\sin\theta\boldsymbol{i}_{(\theta)}) & \text{当 } \dfrac{R}{\alpha}<t<\dfrac{R}{\beta},\\ 0 & \text{当 } t<\dfrac{R}{\alpha},\ t>\dfrac{R}{\beta}.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{43}
$$

集中力产生的位移场的理论推导比较复杂，但我们的目的主要不在于公式推导的过程，而在于希望了解用什么样的方法来分析和解决这一类的问题．这种方法无论在地震学、声学、电磁学中都是有着普遍意义的．同时得到的结果对于我们也是十分重要的．也就是说，无限均匀弹性介质中，集中力产生的位移场主要为纵波和横波，纵波在力的方向上最强，而在过作用点垂直于力的方向的平面内为零，横波在过作用点而垂直于力的方向的平面内最强，而在力的方向(包括其反方向)上为零．而且横波是偏振的，偏振面为包含波的传播方向和力的作用方向的平面．

四、集中力产生的静态位移场

设在均匀各向同性的无限弹性介质中的 P 点作用有集中力，其时间函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $t\to\infty$ 时趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$，那末这样的集中力所产生的位移场在 $t\to\infty$ 时的极限称为静态位移场．静态问题在地震学中十分重要，求地震后由于断层两侧岩石的相对错动所产生的位移场，就是静态问题．得到集中力的静态位移场后，通过一定的求微商和求积分的运算，就能解决上述问题．

首先求集中力的静态位移场的位移函数 ϕ 和 $\boldsymbol{\phi}$．在 (33) 和 (34) 式的关于 ϕ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 的表达式中都含有积分

$$
\int_0^{R/c}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau,
$$

其中 c 为纵波速 α 或横波速 β．由于积分区间是有限的，因此只要 t 充分大，$\boldsymbol{F}(t-\tau)$ 就趋于 $\boldsymbol{F}$，这样 (33) 和 (34) 中的积分就能积出来．即有

$$
\int_0^{R/c}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau \xrightarrow{\text{当 } t\to\infty} \frac{1}{2}\frac{R^2}{c^2}\boldsymbol{F}.
$$

由此，当 $t\to\infty$ 时，(33) 和 (34) 式化为

$$
\left.\begin{aligned}
\phi(x_i) &= \frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}\nabla R\cdot\boldsymbol{F},\\
\boldsymbol{\phi}(x_i) &= -\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\boldsymbol{F} = -\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}\nabla R\times\boldsymbol{F}.
\end{aligned}\right\} \tag{44}
$$

或有

$$
\left.\begin{aligned}
\phi(x_i) &= \frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}\nabla R\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{F} = \phi_k F_k,\\
\boldsymbol{\phi}(x_i) &= -\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}\nabla R\times\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{F} = \phi_k^n F_k\boldsymbol{e}_n,
\end{aligned}\right\} \tag{45}
$$

其中

$$\boldsymbol{I}\text{为二阶单位张量},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi},$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_k&=\frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}R'^l\delta_{lk},\\ \phi_k^n&=-\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}\delta_{nml}R'^m\delta_{lk}.\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

这里右下角的角标表示对源点 $p(\boldsymbol{\xi})$ 的分量，右上角的角标表示对场点 $Q(\boldsymbol{x})$ 的分量，δ 的角标不在此例. 并引入角标撇号代表求微商的运算，其规定可见下面的例子：

$$\left.\begin{aligned}&f'^l=\frac{\partial f}{\partial x_l},\qquad f_{,m}=\frac{\partial f}{\partial \xi_m},\qquad f'^l_{,m}=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_m\partial x_l},\\ &f_{,mn}=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_m\partial\xi_n},\quad F^{k'l}=\frac{\partial F^k}{\partial x_l},\quad F'^l_k=\frac{\partial F_k}{\partial x_l},\\ &F_{k,l}=\frac{\partial F_k}{\partial\xi_l},\qquad F_{k,lm}=\frac{\partial F_k}{\partial\xi_l\partial\xi_m},\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

等等，余类推. 引入此记号后可以简化公式的书写，为了介绍这种符号，这里使用了它，但后面的表达式中不一定都用此记号. 由

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\phi},\tag{48}$$

可得

$$u_k^i=\phi_k'^i+\delta_{ijn}\phi_k^{n'j},\tag{49}$$

上式中 u_k^i 的物理意义是，它等于 $P(\boldsymbol{\xi})$ 点 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的单位集中力在 $Q(\boldsymbol{x})$ 点引起的静态位移场的 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量.

将 (46) 式代入 (49) 式便可算出 u_k^i 来. 为便于熟悉运算，下面作较详细的推导.

$$\begin{aligned}u_k^i&=\phi_k'^i+\delta_{ijn}\phi_k^{n'j}=\frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}R'^{li}\delta_{lk}-\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}\delta_{ijn}\delta_{nml}R'^{mj}\delta_{lk}\\ &=\frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}R'^{ki}-\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}(\delta_{im}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jm})R'^{mj}\delta_{lk}\\ &=\frac{1}{8\pi\rho\alpha^2}R'^{ki}-\frac{1}{8\pi\rho\beta^2}(R'^{ik}-\delta_{ik}R'^{mm}),\end{aligned}$$

最后可以化得

$$u_k^i=\frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{ik}R'^{mm}-\gamma R'^{ik}),\tag{50}$$

其中

$$\gamma=1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}.\tag{51}$$

(50) 式给出了 $P(\boldsymbol{\xi})$ 点作用的 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的单位集中力在 $Q(\boldsymbol{x})$ 点产生的位移在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量. 如集中力为 $F_kH(t-\tau)$，则其静态位移场为

$$u^i=u_k^iF_k\tag{52}$$

§ 8.3 集中力的位移场格林函数

一、均匀各向同性的无限弹性介质中集中力产生的位移场的表达式

设均匀各向同性无限的弹性介质中有集中力 $\boldsymbol{F}(t)\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$，即力集中作用于点 $(\boldsymbol{\xi})$，

则由 § 8.2 中的讨论可知，它在 $(\boldsymbol{x})$ 点产生的位移函数为

$$\left.\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot\int_0^{R/\alpha}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau,\\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t)&=-\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\times\int_0^{R/\beta}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

而位移为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)+\nabla\times\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t).\tag{2}$$

§ 8.2 (36, 37, 38) 给出了 $\boldsymbol{u}$ 的具体表达式. 令

$$\boldsymbol{e}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}$, 因此 $\boldsymbol{e}_R$ 为 $\boldsymbol{R}$ 方向的单位向量，则 § 8.2 (35, 36, 37, 38) 可记为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_P+\boldsymbol{u}_S+\boldsymbol{u}_L,$$

其中

$$\left.\begin{aligned}4\pi\rho\boldsymbol{u}_P(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{\alpha^2R}\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right),\\ 4\pi\rho\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{\beta^2R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R)\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right),\\ 4\pi\rho\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x},t)&=\frac{1}{R^3}(3\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{I})\cdot\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

而 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量， $\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R$ 为张量的并矢形式. (4) 式便为作用在 $(\boldsymbol{\xi})$ 点上的集中力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 $(\boldsymbol{x})$ 点产生的位移. (4) 式又可总记为

$$\begin{aligned}4\pi\rho\boldsymbol{u}=&\frac{1}{\alpha^2R}\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\frac{1}{\beta^2R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R)\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\\ &+\frac{1}{R^3}(3\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{I})\cdot\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{5}$$

令

$$\boldsymbol{e}_R=\nu_i\boldsymbol{e}_i,\tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 为直角坐标系的基向量. 则可将 (5) 式写成分量的形式得

$$\begin{aligned}4\pi\rho u_i=&\frac{1}{\alpha^2R}\nu_i\nu_jF_j\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\frac{1}{\beta^2R}(\delta_{ij}-\nu_i\nu_j)F_j\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\\ &+\frac{1}{R^3}(3\nu_i\nu_j-\delta_{ij})\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau F_j(t-\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{7}$$

引入函数 $\boldsymbol{h}(t)$, 令

$$\boldsymbol{h}''(t)=\boldsymbol{F}(t)\tag{8}$$

则可将 (1) 式中的积分求出来，从而得到 $\boldsymbol{u}$ 的另一种更为简洁的表达式. (1) 式中的积分

$$\begin{aligned}\int_0^{R/\alpha}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau&=\int_0^{R/\alpha}\tau\boldsymbol{h}''(t-\tau)d\tau\\ &=-\frac{R}{\alpha}\boldsymbol{h}'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)-\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\boldsymbol{h}(t).\end{aligned}$$

又有

$$\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}\right]=\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\frac{1}{R}\boldsymbol{h}'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\nabla R\right)$$
$$=-\frac{1}{R^2}\boldsymbol{e}_R\cdot\left[\frac{R}{\alpha}\boldsymbol{h}'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right],$$

同理

$$\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}\right]=-\frac{1}{R^2}\boldsymbol{e}_R\times\left[\frac{R}{\alpha}\boldsymbol{h}'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)+\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right].$$

由上三式可知，(1) 式可化为

$$\left.\begin{aligned}4\pi\rho\phi(\boldsymbol{x},t)&=\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\cdot\boldsymbol{h}(t),\\4\pi\rho\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t)&=-\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}\right]-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\times\boldsymbol{h}(t).\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

将 (9) 式代入 (2) 式可得

$$4\pi\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\nabla\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}-\nabla\times\nabla\times\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{R}$$
$$+\nabla\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\cdot\boldsymbol{h}-\nabla\times\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\times\boldsymbol{h}$$

易证

$$\nabla\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\cdot\boldsymbol{h}=\nabla\times\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\times\boldsymbol{h}\ \text{(见附录四)},$$

因此有

$$4\pi\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\nabla\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}-\nabla\times\nabla\times\frac{\boldsymbol{h}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{R}\tag{10}$$

上面 (5)、(7)、(10) 式便是作用在 ($\boldsymbol{\xi}$) 点的集中力 $\boldsymbol{F}(t)\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 在 ($\boldsymbol{x}$) 点所激起的位移场，这是在时间域中得到的结果.

如在频率域中讨论，则利用傅里叶变换可得到集中力的频谱为 $\hat{\boldsymbol{F}}(\omega)\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$，其中

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(t)e^{-i\omega t}dt,\tag{11}$$

并有（见 § 4.1）

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\omega)e^{-i\omega\tau}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(t-\tau)e^{-i\omega t}dt.$$

对 (10) 式进行傅里叶变换，变到频率域中可得

$$4\pi\rho\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)=\nabla\nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{h}}(\omega)e^{-i\omega R/\alpha}}{R}-\nabla\times\nabla\times\frac{\hat{\boldsymbol{h}}(\omega)e^{-i\omega R/\beta}}{R},\tag{12}$$

这里

$$\hat{\boldsymbol{h}}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{h}(t)e^{-i\omega t}dt,$$

因为

$$\boldsymbol{h}''(t)=\boldsymbol{F}(t),$$

因此有

$$-\omega^2\hat{\boldsymbol{h}}(\omega)=\hat{\boldsymbol{F}}(\omega).$$

由此，(12) 式又可化为

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{4\pi\mu k_\beta^2}\left[\nabla\times\nabla\times\frac{\hat{\boldsymbol{F}}(\omega)e^{-ik_\beta R}}{R}-\nabla\nabla\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{F}}(\omega)e^{-ik_\alpha R}}{R}\right], \tag{13}$$

其中

$$k_\beta=\frac{\omega}{\beta},\quad k_\alpha=\frac{\omega}{\alpha},$$

μ 为剪切模量。

(13) 式便是均匀、各向同性、无限的弹性介质中的集中力所激起的位移的位移谱。

二、与集中脉冲力所对应的位移格林函数

如果在均匀、各向同性、无限的弹性介质中作用的力不但在空间上是集中的，而且在时间上也是集中的，即是集中脉冲力。它可表达为

$$\boldsymbol{F}(t)\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)=\boldsymbol{F}\delta(\boldsymbol{x},\xi)\delta(t,\tau), \tag{14}$$

则它所激起的位移场可表达为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\mathbf{G}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)\cdot\boldsymbol{F}, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 称为索米亚那 (Somigliana) 张量，实际上 $\boldsymbol{G}$ 就是通常的格林函数。它代表$(\boldsymbol{\xi})$处 τ 时刻作用的单位集中脉冲力在 $(\boldsymbol{x})$ 处 t 时刻所激起的位移场。$\boldsymbol{G}$ 为二阶张量，其分量表达式为 $G_j^i(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$，它代表在 $\boldsymbol{\xi}$ 点、τ 时刻作用的 $\boldsymbol{e}_j$ 方向作用的集中脉冲力在 $\boldsymbol{x}$ 点、t 时刻所激起的位移场在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量。因此 $G_j^i(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 中分号前表示场点，分号后表示源点。(15) 的分量表达式为

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=G_j^i(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)F_j, \tag{16}$$

由 (5)、(7)、(10)、(12) 式及 (15) 式可立即得

$$4\pi\rho\boldsymbol{G}=\frac{1}{\alpha^2R}\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R\delta\left(t-\frac{R}{\alpha}-\tau\right)+\frac{1}{\beta^2R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R)\delta\left(t-\frac{R}{\beta}-\tau\right)$$
$$+\frac{1}{R^3}(3\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{I})\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau'\delta(t-\tau'-\tau)d\tau', \tag{17}$$

或

$$4\pi\rho G_j^i=\frac{1}{\alpha^2R}\nu_i\nu_j\delta\left(t-\frac{R}{\alpha}-\tau\right)+\frac{1}{\beta^2R}(\delta_{ij}-\nu_i\nu_j)\delta\left(t-\frac{R}{\beta}-\tau\right)$$
$$+\frac{1}{R^3}(3\nu_i\nu_j-\delta_{ij})\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau'\delta(t-\tau'-\tau)d\tau', \tag{18}$$

或

$$4\pi\rho \boldsymbol{G} = \nabla\nabla \cdot \frac{Q\left(t-\frac{R}{\alpha}-\tau\right)}{R}\boldsymbol{I} - \nabla\times\nabla\times\frac{Q\left(t-\frac{R}{\beta}-\tau\right)}{R}\boldsymbol{I}, \tag{19}$$

其中 $Q''(t) = \delta(t)$.

对 $Q''(t) = \delta(t)$ 进行傅里叶变换后可得 $-\omega^2\hat{Q}(\omega) = 1$，由此对(19)式进行傅里叶变换后可得

$$4\pi\mu k_\beta^2 \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \nabla\times\nabla\times\frac{e^{-ik_\beta R - i\omega\tau}}{R}\boldsymbol{I} - \nabla\nabla\cdot\frac{e^{-ik_\alpha R - i\omega\tau}}{R}\boldsymbol{I}. \tag{20}$$

设集中脉冲力作用的时刻为 $t=0$，即在(20)式中令 $\tau=0$，并记

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}, \tau),$$

则可得

$$4\pi\mu k_\beta^2 \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \nabla\times\nabla\times\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\boldsymbol{I} - \nabla\nabla\cdot\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\boldsymbol{I}. \tag{21}$$

对比(13)、(21)式得 $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ 应满足如下关系式

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)\cdot\hat{\boldsymbol{F}}(\omega), \tag{22}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{F}}(\omega)$ 为 $\boldsymbol{F}(t)$ 的频谱，$\hat{\boldsymbol{u}}(x, \omega)$ 为 $\boldsymbol{u}(x, t)$ 的频谱，即为位移谱。

三、集中力的静态位移场格林函数

在 $\boldsymbol{\xi}$ 点作用的集中力 $\boldsymbol{F}H(t)\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 所激起的在 $\boldsymbol{x}$ 点的位移场称为集中力的静态位移场格林函数。实际上在§8.2(50)式中已给出了它，即集中力的静态位移场的格林函数可表达为

$$G_k^i = \frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{ik}R'^{mm} - \gamma R'^{ik}), \tag{23}$$

或

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu}(\boldsymbol{I}\nabla^2 R - \gamma\nabla\nabla R), \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 为二阶张量。

集中力的静态位移场格林函数也可以从另一角度得到。事实上利用集中力的位移谱格林函数 $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ 的表达式(20)式，令 $\omega\to 0$ 则有 $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ 趋于 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$。也就是静态解是动态解的谱的零频值。从(20)可得

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{\beta^2}{4\pi\mu}\cdot\frac{\nabla\times\nabla\times\frac{1}{R}e^{-i\left(\frac{R}{\beta}+\tau\right)\omega}\boldsymbol{I} - \nabla\nabla\cdot\frac{1}{R}e^{-i\left(\frac{R}{\alpha}+\tau\right)\omega}\boldsymbol{I}}{\omega^2}. \tag{25}$$

由于

$$\nabla^2\frac{1}{R} = 0,$$

因此当 $\omega\to 0$ 时，(25)式等号右方式子的分子与分母都趋于零，利用洛必达法则对分子分母求一次微商后发现，当 $\omega\to 0$ 时两者仍趋于零，因此再一次运用洛必达法则可得

$$\boldsymbol{L} = \lim_{\omega\to 0}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{\beta^2}{8\pi\mu}\left[-\nabla\times\nabla\times\frac{1}{R}\left(\frac{R}{\beta}+\tau\right)^2\boldsymbol{I}\right.$$

$$+\nabla\nabla\cdot\frac{1}{R}\left(\frac{R}{\alpha}+\tau\right)^2\boldsymbol{I}\Big].$$

由于

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{I}=0,\quad \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{I}=0,\quad \nabla^2\frac{1}{R}=0,$$

因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\frac{\beta^2}{8\pi\mu}\left[-\frac{1}{\beta^2}\nabla\times\nabla\times(R\boldsymbol{I})+\frac{1}{\alpha^2}\nabla\nabla\cdot(R\boldsymbol{I})\right]\\&=\frac{1}{8\pi\mu}\left[\nabla^2(R\boldsymbol{I})-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\nabla\nabla\cdot(R\boldsymbol{I})\right]\\&=\frac{1}{8\pi\mu}[I\nabla^2R-\gamma\nabla\nabla R]=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

这就证明了静态解 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 是动态解 $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\omega;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 的零频值 $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},0;\boldsymbol{\xi},\tau)$.

§8.4 集中力偶激发的弹性波

实际上,大多数构造地震都可看做断层在应力场的作用下,断层两侧的岩石相互间发生突然的位错从而释放应力激发了地震波。因此是否可以简单地用一对力偶的作用来模拟呢?有了集中力激发的位移场的公式,力偶问题就比较容易解决了.

设有一对力作用组成方偶,其中力 $\boldsymbol{F}_+$ 平行于正 z 轴方向,作用点在 (ξ_1,ξ_2,ξ_3),而力 $\boldsymbol{F}_-$ 作用 (ξ_1-a,ξ_2,ξ_3) 点,作用力的方向与 $\boldsymbol{F}_+$ 相反(图 8.5). 此两集中力可表达为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}_+&=F(t)\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,x_3-\xi_3)\boldsymbol{i}_{(3)}\\\boldsymbol{F}_-&=-F(t)\delta[x_1-(\xi_1-a),x_2-\xi_2,x_3-\xi_3]\boldsymbol{i}_{(3)}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

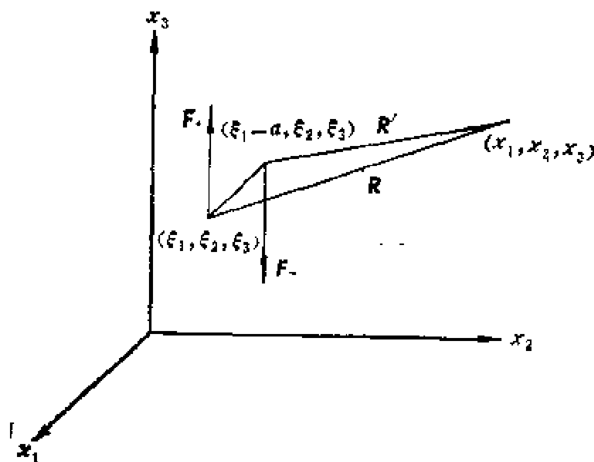


图 8.5

且有当 $a\to0$ 时 $aF(t)=q(t)$ 趋于一有限极限. 从集中力的位移场公式知 (1) 式中的 $\boldsymbol{F}_+$ 和 $\boldsymbol{F}_-$ 产生的 P 波位移场为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{P+}&=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}F\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right],\\\boldsymbol{u}_{P-}&=\frac{-1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\boldsymbol{R}'}{R'^3}\left[\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}F\left(t-\frac{R'}{\alpha}\right)\right],\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}R &= \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2},\\ R' &= \sqrt{[x_1-(\xi_1-a)]^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

则力偶产生的 P 波位移场为

$$\boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{u}_{P+} + \boldsymbol{u}_{P-} = \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}F\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right] - \frac{\boldsymbol{R}'}{R'^3}\left[\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}F\left(t-\frac{R'}{\alpha}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}F\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right]\right\}d\xi_1$$

令 $d\xi_1 = a \to 0$

$$= -\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\left[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}q\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right]\right\}$$

$$\simeq \frac{q'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{i}_{(3)}]\frac{x_1-\xi_1}{R}, \tag{4}$$

其中

$$q'(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

上面求得的最后一式中略去 $\frac{1}{R^2}$ 项。同理力偶产生的 S 波位移场为

$$\boldsymbol{u}_S = \boldsymbol{u}_{S+} + \boldsymbol{u}_{S-} = \frac{q'\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho\beta^3}\frac{1}{R}\left[\boldsymbol{i}_{(3)} - (x_3-\xi_3)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right]\frac{x_1-\xi_1}{R}. \tag{5}$$

将坐标原点取在 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 点上，即令

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_P &= \frac{q'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{x_1x_3}{R^4}\boldsymbol{R},\\ \boldsymbol{u}_S &= \frac{q'\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho\beta^3}\frac{x_1}{R^2}\left[\boldsymbol{i}_{(3)} - x_3\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

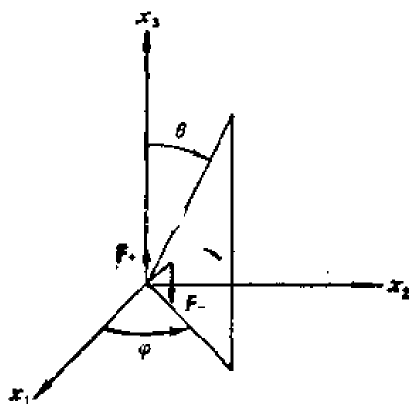


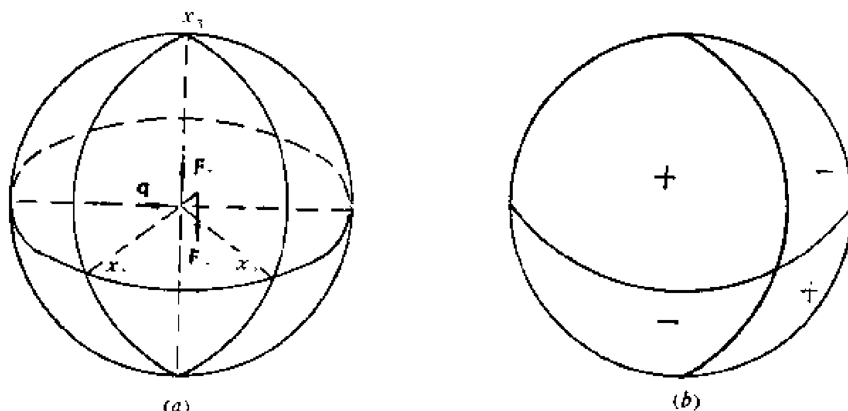
图 8.6

取球坐标，则有（图 8.6）

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_P &= \frac{q'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{1}{R}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}_{(r)},\\ \boldsymbol{u}_S &= -\frac{q'\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho\beta^3}\frac{1}{R}\sin^2\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i}_{(\theta)}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

讨论 (6) 式：

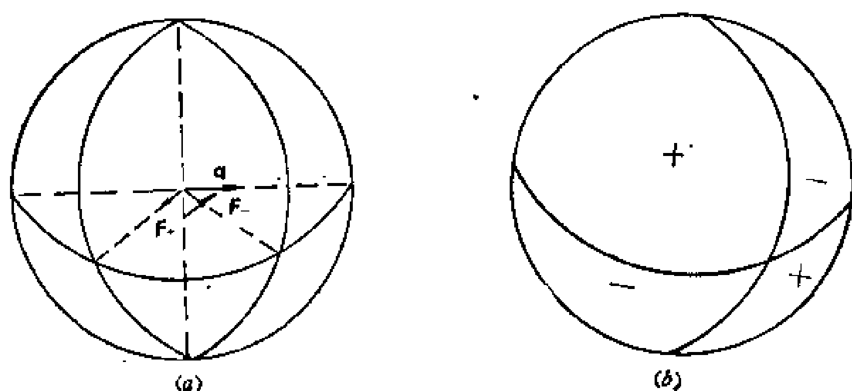
1. 由 (6) 可见力偶产生的 P 波的位移分布由 $x_1 = 0$ 及 $x_3 = 0$ 两个平面（即力和力偶矢量所



(a) (b)

图 8.7

包含的平面与垂直于力作用方向的平面)将空间分成四个象限(图 8.7) 其中对应 x_1、x_3 平面内一、三象限的空间的振动符号与二、四象限的空间的振动符号相反，特别是对于 P 波的初动符号一、三象限与二、四象限是相反的. 如规定 $q(+0)>0$, $q(-0)=0$, 则 $q'(+0)>0$，由此可画出四个限象限内的初动符号，其中正号代表初动位移是向离开震源的方向运动的，负号则反之. 从图 8.7 中还可看出力的作用方向与初动符号的对应关系，这就是所谓 P 波初动符号的四象限分布. 但是由初动符号四象限分布不能唯一确定力偶，因为如图 8.8 中的力偶也能产生与图 8.7(b) 中所示的 P 波初动符号分布，因此还得由 S 波来帮助确定力偶. 而在 $x_1=0$ 及 $x_3=0$ 面上 P 波位移恒为零、称为 P 波的节面. 其中 $x_1=0$ 的面就是力与力偶矢量所包含的面，它应对应地震的断层面；而 $x_3=0$ 的面垂直于力的方向，称为辅助面. 因此由 P 波初动分布不能区别断层面和辅助面.



(a) (b)

图 8.8

2. 力偶产生的位移场由 (6) 易见其 P 波振幅极大方向为

$$\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\\[2mm]\dfrac{3}{4}\pi\end{cases},\quad \varphi=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}.$$

而 S 波振幅的极大方向为

$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad \varphi=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}.$$

结合图 8.9 可见 P、S 波振幅极大都在垂直于力偶矢量 $\boldsymbol{q}$ 的平面内，亦即在 $x_2=0$ 的平面内，P 波极大方向与正负 x_1 轴方向成 45° 角，而 S 波极大在正负 x_1 轴方向.

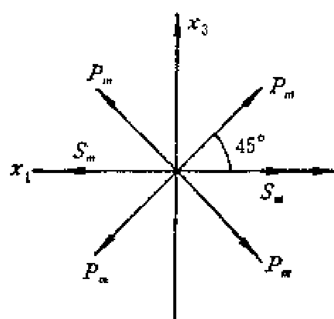


图 8.9

3. 从 (6) 可见 P 波振动方向在波的传播方向上；而横波（S 波）振动方向垂直于波的传播方向，且是偏振的，偏振面为包含力的方向和波的传播方向的平面.

4. 振幅大小与力偶的变化速度 $q'(t)$ 成正比，力偶随时间变化越快，激发的 P、S 波振幅越大，反之则越小. 极其缓慢变化的力偶事实上不能激发地震波，由此解释断层缓慢的蠕变不能激发地震波这一事实.

5. 对测量到的 P, S 波初动的空间分布图象的研究表明，对绝大多数地震都存在 P 波初动的四象限分布，但对多数地震的 S 波不但沿 x_1 轴方向是振幅极大，而且沿 x_3 轴方向也是振幅极大，因此前面的理论结果与观测事实并不完全相符. 有人用两对互相垂直的力偶，且力偶矢量的方向相反的无矩双力偶模型（图 8.10(a)）来描述震源的应力释放过程，发现理论的结果与观测得到的 P, S 初动振幅空间分布吻合得比较好. 双力偶的位移分布很容易从单力偶的位移分布得到. 理论计算证明无矩双力偶模型（图 8·10(a)）与双无矩偶极模型（图 8·10

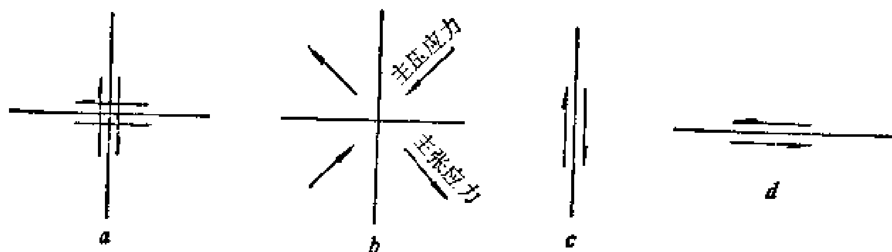


图 8.10

(b)）的位移分布是相同的. 因此由观测不能区分两者. 而双无矩偶极模型中力的方向（图 8.10(b)）分别称为最大主压应力和最大主张应力的方向. 用与 (3) 到 (6) 同样的方法可证对如图 8.11 中的无矩偶极模型的 P, S 波位移场为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_P &= \frac{q'\left(t-\dfrac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{x_3^2}{R^4}\boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{u}_S &= \frac{q'\left(t-\dfrac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho\beta^3}\frac{x_3}{R^2}\left[\boldsymbol{i}_{(3)}-x_3\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

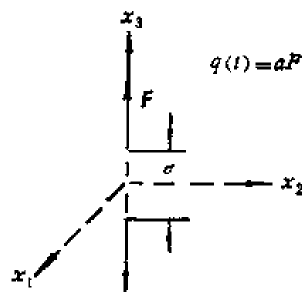


图 8.11　无矩偶极模型

经过坐标变换和叠加就可以证明图 8.10(a) 与 (b) 模型所产生的位移场相同.

下面求无矩双力偶模型所产生的位移场，设震源为图 8.12(a) 所示力偶，则产生的 P, S 波位移场由(6)或(7)式给出. 可记为

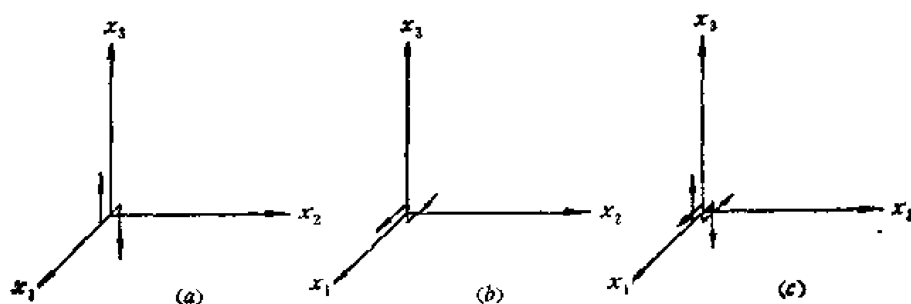


图 8.12

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{Pa} &= C_1 \frac{x_1 x_3}{R^4}\boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{u}_{Sa} &= C_2 \frac{x_1}{R^2}\left[\boldsymbol{i}_{(3)} - Z\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$C_1 = \frac{q'\left(t - \frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^3}, \quad C_2 = \frac{q'\left(t - \frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho\beta^3}, \tag{10}$$

$q(t)$ 为力偶的力矩.

如震源为图 8.12(b) 所示力偶,则类似可得它所产生的 P、S 波位移场为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{Pb} &= C_1 \frac{x_1 x_3}{R^4}\boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{u}_{Sb} &= C_2 \frac{x_3}{R^2}\left[\boldsymbol{i}_{(1)} - x\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

如两力偶同时存在,即震源为图 8.12(c) 的情况,则可得总的 P 波和 S 波的位移场为 (9)式和 (11) 式的叠加,得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_P &= \boldsymbol{u}_{Pa} + \boldsymbol{u}_{Pb} = 2C_1 \frac{x_1 x_3}{R^4}\boldsymbol{R} = \frac{C_1}{R}\sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}_{(r)}, \\ \boldsymbol{u}_S &= \boldsymbol{u}_{Sa} + \boldsymbol{u}_{Sb} = \frac{C_2}{R}\left[x_1\boldsymbol{i}_{(3)} + x_3\boldsymbol{i}_{(1)} - 2x_1x_3\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

易知有如下关系式

$$\left.\begin{aligned} & x_1\boldsymbol{i}_{(3)} = R\sin\theta\cos\varphi[\cos(x_3, r)\boldsymbol{i}_{(r)} + \cos(x_3, \theta)\boldsymbol{i}_{(\theta)} + \cos(x_3, \varphi)\boldsymbol{i}_{(\varphi)}], \\ & x_3\boldsymbol{i}_{(1)} = R\cos\theta[\cos(x_1, r)\boldsymbol{i}_{(r)} + \cos(x_1, \theta)\boldsymbol{i}_{(\theta)} + \cos(x_1, \varphi)\boldsymbol{i}_{(\varphi)}], \\ & -2x_1x_3\frac{\boldsymbol{R}}{R^2} = -R\sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}_{(r)}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} & \cos(x_3, r) = \boldsymbol{i}_{(3)}\cdot\boldsymbol{i}_{(r)} = \cos\theta, && \cos(x_1, r) = \boldsymbol{i}_{(1)}\cdot\boldsymbol{i}_{(r)} = \sin\theta\cos\varphi, \\ & \cos(x_3, \theta) = -\sin\theta, && \cos(x_1, \theta) = \cos\theta\cos\varphi, \\ & \cos(x_3, \varphi) = 0, && \cos(x_1, \varphi) = -\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将 (13) 式代入 (12) 式,并一起代入 (11) 式,最后 (11) 式可化为

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_P &= \frac{C_1}{R}\sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}_{(r)},\\
\boldsymbol{u}_S &= \frac{C_2}{R}\cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}_{(\theta)} - \frac{C_2}{R}\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{i}_{(\varphi)}.
\end{aligned}\right\}\tag{15}
$$

(11) 到 (15) 式中的 C_1、C_2 见 (10) 式. 由 (7) 式及 (15) 式给出了在 x_1x_3 平面内的单力偶和无矩双力偶所产生的 P、S 波初动的辐射图形，图 8.13 表达了 x_1x_3 平面内的辐射图形. 图 8.13 中的画法类似于无线电天线的辐射图的画法,即以 θ 方向的辐射幅度为矢径 r，作出 $r=r(\theta)$ 图. 由图 8.13 可见，对于无矩双力偶模型，由 P、S 波的初动分布不能区分断层面和辅助面.

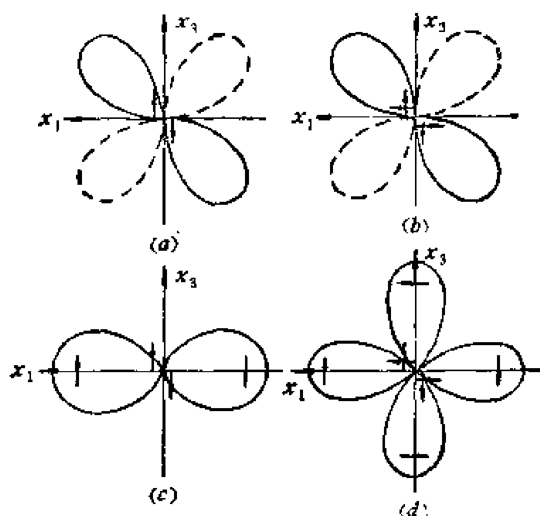


图 8.13　P 波初动的辐射图型; S 波初动的辐射图型
(a) 单力偶　(b) 双力偶　(c) 单力偶　(d) 双力偶

第九章　地震震源的位错理论

目前人们认为，地震的发生在大多数情况下都是直接起因于断层（原有的或新产生的）两侧岩石的突然相对错动. 这相当于介质中有一个面，这个面两侧的介质突然发生了不连续的位移——位错，从而激发出了弹性波. 现在来求所激发的弹性波应当与位错有什么样的关系.

§9.1　用格林函数法求弹性运动方程的解

一、弹性介质中的一般运动方程

§2.3 中（4）式给出了弹性介质中的运动方程，

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{1}$$

其中 σ_{ji} 为应力张量，ρ 为密度，f_i 为单位质量上所受到的外力，u_i 为位移向量. 或将（1）写成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)) + \mathbf{f}(\boldsymbol{x}, t) = \rho(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 为单位体积的介质上所受到的外力，因此有

$$\mathbf{f} = \rho \boldsymbol{f} \tag{3}$$

为了简化后面的表达式，这里用 $\mathbf{f}$ 而不用 $\rho \boldsymbol{f}$，这并没有什么实质的不同. 注意，在得到关系式（1）从而得到（2）时，我们仅用了小应变的假定，因此介质可以是非均匀的和各向异性的弹性介质.

对上述性质下的介质，应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的关系式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}:\boldsymbol{E}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为四阶弹性系数张量

$$\boldsymbol{C} = C_{jipq} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q, \tag{5}$$

而 $\boldsymbol{E}$ 为二阶张量

$$\boldsymbol{E} = e_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j, \tag{6}$$

或记为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \nabla). \tag{7}$$

因此（4）式又可写作

$$\sigma_{ji} = C_{jipq} e_{pq}. \tag{8}$$

由于应力张量为对称张量，因此有

$$C_{jipq} = C_{ijpq}. \tag{9}$$

由于应变张量为对称张量，因此有

$$C_{jipq} = C_{jiqp}. \tag{10}$$

由应变位能与应力应变关系式可以证明

$$C_{jipq} = C_{pqji}. \tag{11}$$

(11)式的证明如下：由应变位能 W 与应力应变的关系式 §4.3(15)及应力与应变之间的关系式(8)可得

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ji}e_{ji} = \frac{1}{2}C_{jipq}e_{pq}e_{ji}. \tag{12}$$

对 W 求 $\frac{\partial}{\partial e_{ji}}$ 得

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ji}} = \frac{1}{2}\sigma_{ji}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial e_{pq}\partial e_{ji}} = \frac{1}{2}C_{jipq}. \tag{13}$$

又有

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{pq}e_{pq} = \frac{1}{2}C_{pqji}e_{ji}e_{pq}. \tag{14}$$

同样可得

$$\frac{\partial W}{\partial e_{pq}} = \frac{1}{2}\sigma_{pq}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ji}\partial e_{pq}} = \frac{1}{2}C_{pqji}, \tag{15}$$

由于

$$\frac{\partial^2 W}{\partial e_{pq}\partial e_{ji}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ji}\partial e_{pq}},$$

因此立即证明了(11)式成立.

二、贝蒂（Betti）第一公式

记

$$\Delta_1(\boldsymbol{u}) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}'), \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，将它看作位移 $\boldsymbol{u}$ 的函数，$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{u}'$ 为两个不同的位移场. 由对乘积求微商的法则，显见有

$$\frac{\partial(u_j\sigma'_{ji})}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\sigma'_{ji} + u_j\frac{\partial\sigma'_{ji}}{\partial x_i} \tag{17}$$

$$\frac{\partial(u'_j\sigma_{ji})}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\sigma_{ji} + u'_j\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_i} \tag{18}$$

而其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\sigma'_{ji} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i}C_{jipq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u'_q}{\partial x_p}\right)\\ &= \frac{1}{2}C_{jipq}\frac{\partial u'_p}{\partial x_q}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2}C_{jipq}\frac{\partial u'_q}{\partial x_p}\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\sigma_{ji} &= \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}C_{jipq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p}\right)\\ &= \frac{1}{2}C_{jipq}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2}C_{jipq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} C_{pqij} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_p}{\partial x_q} + \frac{1}{2} C_{qpij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_q}{\partial x_p} \quad \text{(换写指标)}$$

$$= \frac{1}{2} C_{ijpq} \frac{\partial u'_p}{\partial x_q} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} C_{jipq} \frac{\partial u'_q}{\partial x_p} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad \text{(利用(9)、(10)、(11)式)}$$

由上两式得

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \sigma'_{ji} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \sigma_{ji} \tag{19}$$

(17)减(18)式并利用(19)式得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_j\sigma'_{ji} - u'_j\sigma_{ji}) = u_j \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_i} - u'_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i}, \tag{20}$$

或记为向量形式，并利用 σ_{ji} 的对称性，有

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}') - \boldsymbol{u}'(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}). \tag{21}$$

取界面为 S 体积为 V 的一块介质，将(17)式对 V 积分并利用高斯公式可得

$$\int_V \{\boldsymbol{u} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}') - \boldsymbol{u}'[\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})]\} dV = \oint_S \boldsymbol{e}_n \cdot [\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}') - \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})] dS, \tag{22}$$

这就是贝蒂第一公式.

三、弹性运动方程的积分解[48,56]

设有非均匀、各向异性弹性介质，体积为 V，周界面为 S. 设在单位体积上受到外力 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t)$ 作用时，并对应 S 面上一定的边界条件，在介质中产生位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$. 又另当介质受到外力 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, t)$ 作用时，在介质中产生位移场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t)$，它们应分别满足方程

$$\Delta_1[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t)] - \rho(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t^2} = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t), \tag{23}$$

$$\Delta_1[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t)] - \rho(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t^2} = -\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, t). \tag{24}$$

设 $t < -T$ 时，介质没有受到外力作用，即有 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0$，及 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0$，则根据因果关系必有

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0 \tag{25}$$

也就是说，外力产生的运动不会发生在外力作用之前.

另设有外力场 $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi}, t)$，及位移场 $\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{\xi}, t)$，令它们分别满足关系式

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi}, t) &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}, -t), \\ \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{\xi}, t) &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由(20)式及(22)式可见，$\mathbf{g}^*$ 及 $\boldsymbol{v}^*$ 应在数学上满足方程

$$\Delta_1[\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{\xi}, t)] - \rho(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t^2} = -\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi}, t). \tag{27}$$

且当 $t > T$ 时应有

$$\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, \quad \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{\xi}, t) = 0. \tag{28}$$

将 $\boldsymbol{v}^*$ 点乘(23)式减去 $\boldsymbol{u}$ 点乘(27)式，再对体积 V 和时间 t 积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V[\boldsymbol{v}^*\cdot\Delta_1(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot\Delta_1(\boldsymbol{v}^*)]dV-\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V\left(\boldsymbol{v}^*\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{v}^*}{\partial t^2}\right)dV$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{g}^*-\boldsymbol{v}^*\cdot\mathbf{f})dV. \qquad (29)$$

对上式等号左边第二项的时间 t 进行分部积分，并利用(25)式和(28)式可证此积分为零. 再利用贝蒂第一公式(22)，可化(29)式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V(\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{g}^*-\boldsymbol{v}^*\cdot\mathbf{f})dV=\int_{-\infty}^{\infty}dt\oint_S\boldsymbol{e}_n\cdot[\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}^*)]dS. \quad (30)$$

设外力场 $\mathbf{f}$ 为集中脉冲力，作用点为 $(\boldsymbol{x}')$，作用时刻为 τ'，作用方向为 $\boldsymbol{e}_j$，则 $\mathbf{f}$ 产生的位移场为 $\boldsymbol{u}$，即

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{e}_j\delta(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x}',\tau')=\boldsymbol{e}_j\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}')\delta(t-\tau'). \qquad (31)$$

类似§8.3(15)式，引入张量 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x}',\tau')$，使满足关系式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x}',\tau')\cdot\boldsymbol{e}_j. \qquad (32)$$

仍和以前一样，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x}',\tau')$ 中分号后为源点，分号前为场点. $\boldsymbol{G}$ 便为 S 面所包围的体积 V 内的位移场格林函数. 注意，对不同性质的介质，如均匀性、各向同异性、不同的 V 和 S 的形状及 S 面上不同的边条件，$\boldsymbol{G}$ 的具体表达式是不同的. §8.3 中针对均匀各向同性的无限弹性介质，求出了 $\boldsymbol{G}$ 的表达式(§8.3(16, 17, 18)式)，而这里讨论的是一般情况. $\boldsymbol{G}$ 又可记为

$$\boldsymbol{G}=G_j^i\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \qquad (33)$$

其中 $\boldsymbol{e}_j$ 为外力作用的方向，$\boldsymbol{e}_i$ 为力所引起的位移方向.

令 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi},t)$ 亦为集中脉冲力，作用点为 $\boldsymbol{x}$，作用时刻为 $-\tau$，作用方向为 $\boldsymbol{e}_i$，即有

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{e}_i\delta(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x},-\tau)=\boldsymbol{e}_i\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\delta(t+\tau). \qquad (34)$$

引入外力场 $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi},t)$，由(26)式知

$$\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi},-t)=\boldsymbol{e}_i\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\delta(-t+\tau). \qquad (35)$$

令 $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\xi},t)$ 所产生的位移场为 $\boldsymbol{v}^*$，则由(26)式和(32)式知

$$\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi},-t;\boldsymbol{x},-\tau)\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{G}^*\cdot\boldsymbol{e}_i, \qquad (36)$$

这里简记

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{G}^*&=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi},-t;\boldsymbol{x},-\tau),\\ \boldsymbol{G}&=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi},t;\boldsymbol{x}',\tau').\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

将(35)式代入(30)式中，并注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{g}^*dV=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\delta(-t+\tau)dV$$
$$=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{e}_i. \qquad (38)$$

由此，(30)式可化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{e}_i=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V\boldsymbol{G}^*\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\mathbf{f}dV$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}dt\oint_S\boldsymbol{e}_n\cdot[\boldsymbol{G}^*\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^*\cdot\boldsymbol{e}_i)]dS. \qquad (39)$$

将(31)、(32)代入(39)式，并作与(38)式相似的运算可得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}',-\tau';\boldsymbol{x},-\tau):\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i+\int_{-\infty}^{\infty}dt\oint_S\boldsymbol{e}_n\cdot[\boldsymbol{G}^*\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_j)$$
$$-\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^*\cdot\boldsymbol{e}_i)]dS. \qquad (40)$$

由于作用力 $\boldsymbol{g}^*$ 及 $\mathbf{f}$ 所产生的位移、应力场应该满足相同的边界条件，即或者

$$\boldsymbol{v}^*|_S = 0、\quad \boldsymbol{u}|_S = 0,$$

或者

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}^*)|_S = 0、\quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})|_S = 0,$$

因此 (40) 式等号右边第二项应为零. (40) 可化简为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}', -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau):\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l. \tag{41}$$

将 (32) 式等号两边点乘 $\boldsymbol{e}_l$，并令 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}$，$t = \tau$，可得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{x}', \tau'):\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_l. \tag{42}$$

比较 (41) 式和 (42) 式可得

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{x}', \tau'):\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}', -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau):\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l. \tag{43}$$

或

$$G_l^j(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{x}', \tau) = G_j^l(\boldsymbol{x}', -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau). \tag{44}$$

(44) 式表示 $\boldsymbol{x}'$ 处 τ' 时刻在 $\boldsymbol{e}_j$ 方向作用的单位集中脉冲力所激起的在 $\boldsymbol{x}$ 处，τ 时刻的位移在 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的分量(图 9.1 (*a*)) 等于 $\boldsymbol{x}$ 处、$-\tau$ 时刻在 $\boldsymbol{e}_l$ 方向作用的单位集中脉冲力所激起的 $\boldsymbol{x}'$ 处、$-\tau'$ 时刻的位移在 $\boldsymbol{e}_j$ 方向的分量(图 9.1 (*b*)).

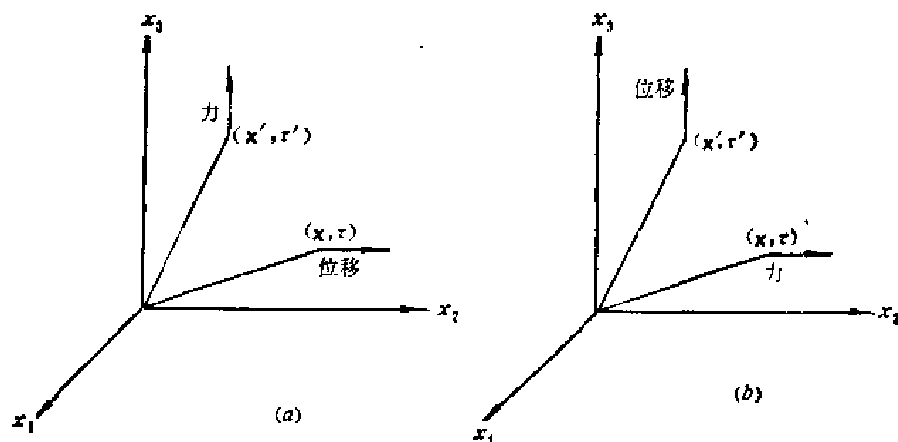


图 9.1 力和位移场的互易性

(44) 式说明了集中力和它所产生的位移场之间的互易性.

记 $\boldsymbol{G}^T$ 为 $\boldsymbol{G}$ 的转置，即 $(\boldsymbol{G}^T)_{lj} = (\boldsymbol{G})_{jl}$，则 (44) 式可化为

$$\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{x}', \tau') = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}', -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau). \tag{45}$$

简记

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{\xi}, \tau'), \\ G_2 &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}, -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

则由 (39) 式可知，任意外力场 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau')$ 在 $(\boldsymbol{x}, \tau)$ 处的位移场 $\boldsymbol{u}$ 应满足下式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{e}_i = &\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}, -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau):\boldsymbol{e}_i\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau')dV_{\xi} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \oint_S \boldsymbol{e}_n \cdot \Big\{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}, -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau):\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau')] \\ &- \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau') \cdot \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}, -\tau'; \boldsymbol{x}, -\tau) \cdot \boldsymbol{e}_i]\Big\} dS_{\xi}, \end{aligned}$$

或

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \tau)\cdot\boldsymbol{e}_i=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V \mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\mathbf{f}\,dV_\xi$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S \boldsymbol{e}_n\cdot[\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i)]dS_\xi.$$

注意到 $\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\mathbf{f}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i$，因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 为对称二阶张量，因此有

$$\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i.$$

且有

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_2)\cdot\boldsymbol{e}_i,$$

由以上诸式，则有

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \tau)\cdot\boldsymbol{e}_i=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{G}_2\cdot\boldsymbol{e}_i dV_\xi$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S\boldsymbol{e}_n\cdot[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\mathbf{G}_2-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(G_2)]\cdot\boldsymbol{e}_i dS_\xi.$$

因为 $\boldsymbol{e}_i$ 为任意常向量，因此由上式可得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int\mathbf{f}\cdot\mathbf{G}_1^T dV_\xi+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S\boldsymbol{e}_n\cdot[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\mathbf{G}_1^T-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)]dS_\xi,\quad(47)$$

因为 $\mathbf{G}_1$ 为二阶张量，$\mathbf{f}$ 为向量，所以有 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{G}_1^T=\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{f}$，又因为 $\boldsymbol{\sigma}$ 为对称张量，所以有

$$\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1^T=\mathbf{G}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_n\ \text{及}\ \boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)$$
$$=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)\cdot\boldsymbol{e}_n,$$

这里我们约定 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 点乘时只有 $\boldsymbol{\sigma}$ 本身的角标（即分量）起作用，并且 $\boldsymbol{\sigma}$ 为对称张量，因此有 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)=\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}_1^T)\cdot\boldsymbol{e}_n$，并记 τ 为 t，记 $\mathbf{G}_1$ 为 $\mathbf{G}$，则 (47) 式可化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V\mathbf{G}\cdot\mathbf{f}dV_\xi+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}^T)\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi,\quad(48)$$

其中

$$\mathbf{G}=\mathbf{G}(\boldsymbol{x}, t;\boldsymbol{\xi}, t'),\quad \mathbf{f}=\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau').\quad(49)$$

当 $(\boldsymbol{\xi}, \tau')$ 处及在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向有单位集中脉冲力作用时，于 $(\boldsymbol{x}, t)$ 处产生的位移场为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=\mathbf{G}(\boldsymbol{x}, t;\boldsymbol{\xi}, \tau')\cdot\boldsymbol{e}_i\quad(50)$$

给定了介质中的力场 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau')$，以及边界 S 上作用的应力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n$ 和位移 $\boldsymbol{u}$，则在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 处所激发的位移由 (48) 式给出．这时只要知道了在一定的介质和一定的边界条件下的格林函数 $\mathbf{G}$，则在一般情况下的位移场就可以通过 (48) 式算出来．(48) 式表明，介质中任意一点及在任一时刻 t 的位移场可由 (48) 式等号右面的三项给出．第一项表示外力场 $\mathbf{f}$ 在 V 中所激发的位移场；第二项表示边界上应力所引起的位移场，第三项表示边界面上的位移所引起的位移场．

但在一般情况下，不能同时给出边界 S 上的位移 $\boldsymbol{u}$ 和边界 S 上的应力 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_n$，而只是给出其中之一．设给出的是边界 S 上的位移 $\boldsymbol{u}$，则求 $\mathbf{G}$ 时可令边界条件为 $\mathbf{G}|_S=0$，即在边界上的位移为零的边条件下求出 V 中的格林函数 $\mathbf{G}$ 来，由此 (48) 式可化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V\mathbf{G}\cdot\mathbf{f}dV_\xi-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{G}^T)\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi.\quad(51)$$

如边界条件为在边界面 S 上 $\boldsymbol{u}=0$，则 (51) 式化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V \mathbf{G}\cdot\mathbf{f}dV_\xi. \tag{52}$$

如边界条件为给定边界面 S 上作用的应力向量 $\boldsymbol{T}=\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n$，则求格林函数 $\mathbf{G}$ 时，可令边界条件为 $\sigma(\mathbf{G}_1^T)\cdot\boldsymbol{e}_n|_S=0$. 由此 (48) 式可化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V \mathbf{G}\cdot\mathbf{f}dV_\xi+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S \mathbf{G}\cdot\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi. \tag{53}$$

因此，我们这里把一般的边界条件下求位移场 $\boldsymbol{u}$ 的问题化成了在特殊的边界下（如 $\boldsymbol{u}|_S=0$ 或 $\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n|_S=0$）的求 $\mathbf{G}$ 问题. 然后利用 (50) 式或 (51) 式，在一般的边界条件下求得位移场.

§9.2 弹性介质中的位错产生的位移场

一、弹性介质中位错的位移场

设在弹性介质 V 内有一面 Σ，此面两侧的介质发生相对位移. 可用一面 S_2 包围 Σ 面，且无限靠近 Σ 面，则面 S_2 可用 Σ^+ 和 Σ^- 两个面来表示 (图 9.2). Σ^+ 紧靠着 Σ 面的正法线方向 $\boldsymbol{e}_\nu$ 的一侧，Σ^- 则紧靠着另一侧. 令 Σ^+ 面上点的位移为 $\boldsymbol{u}^+$，Σ^- 面上点的位移为 $\boldsymbol{u}^-$，如有 $\boldsymbol{u}^+\neq\boldsymbol{u}^-$，则称 Σ 面上发生了位错. 并定义位错 $[\boldsymbol{u}]$ 为

$$[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{u}^+-\boldsymbol{u}^-. \tag{1}$$

如在位错面上应力始终保持连续，则这种位错称为索米亚那 (Somigliana) 位错.

如在位错面上发生的位错 $[\boldsymbol{u}]$ 可表示成

$$[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}_0$、$\boldsymbol{\Omega}$ 为常向量，$\boldsymbol{r}$ 为位错面上的点的坐标向量，则这种位错称为伏尔泰拉(Volterra) 位错. 伏尔泰拉位错由位错面两侧的介质发生相对平移和相对旋转构成.

对弹性介质 V，其外边界为 S_1，另有包围位错面的边界 $S_2(S_2=\Sigma^++\Sigma^-)$，应用§9.1 (48) 式，便可求得 V 内的位移场. 但注意 § 9.1 (48) 式中的体积分已挖去了位错面邻近的区域，因而 (48) 式中面积分的积分面 S 除了原有的界面 S_1 外，还包括包围位错面的面 S_2.

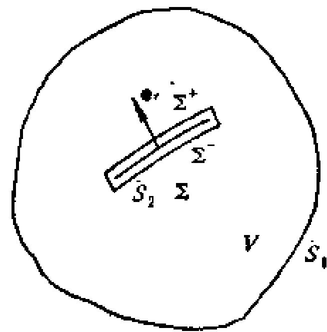


图 9.2 位错面 Σ

当给定外力场 $\mathbf{f}$ 和 S_1 面上的应力 $\boldsymbol{T}=\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n|_{S_1}$ 时，则可在 $\sigma(\mathbf{G})\cdot\boldsymbol{e}_n|_{S_1}=0$ 的条件下求格林函数 $\mathbf{G}$. 这时由 § 9.1 (48) 式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=&\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_V \mathbf{G}\cdot\mathbf{f}dV_\xi+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S \mathbf{G}\cdot\boldsymbol{T}dS_\xi\\&+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_{S_2}\mathbf{G}\cdot\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\oint_S \boldsymbol{u}\cdot\sigma(\mathbf{G}^T)\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi.\end{aligned} \tag{3}$$

令 $\boldsymbol{e}_\nu$ 表示 Σ^- 面上的外法线方向，亦即表示从 Σ^- 面指向 Σ^+ 面的 Σ^- 面上的单位法线方向. 则

$$\oint_{S_2}\mathbf{G}\cdot\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_n dS_\xi=\int_{\Sigma^+}\mathbf{G}\cdot\sigma(\boldsymbol{u})\cdot(-\boldsymbol{e}_\nu)d\Sigma_\xi+\int_{\Sigma^-}\mathbf{G}\cdot\sigma(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi$$

$$= -\int_{\Sigma^-} \boldsymbol{G} \cdot [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})] dS, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{e}_\nu$$

而

$$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]|_{\Sigma^-} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})|_{\Sigma^+} - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})|_{\Sigma^-} \tag{5}$$

称为应力错.

同样有

$$\oint_{S_2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_n dS_\xi = -\int_{\Sigma^-} [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi, \tag{6}$$

其中

$$[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}|_{\Sigma^+} - \boldsymbol{u}|_{\Sigma^-} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^- \tag{7}$$

称为位移错.

将(4)式与(6)式代入(3)式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = &\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_V \boldsymbol{G} \cdot \mathbf{f} dV_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \oint_{S_1} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T} dS_\xi - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma^-} \boldsymbol{G} \cdot [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})] d\Sigma_\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma^-} [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi,\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{G}$、$\mathbf{f}$ 可见 § 9.1 (49) 式,注意积分是对 $\boldsymbol{\xi}$、τ' 等进行. (8) 式等号右方第一项表示外力场 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t)$ 对位移场的影响,第二项表示非位错的边界面 S_1 上作用的外力的影响,第三项为位错面上的应力错对位移场的贡献,第四项为位错面上的位移错对位移场的贡献.在 S_1 面为自由界面的情况下,其上的应力 $\boldsymbol{T}|_{S_1} = 0$, 此时第二项为零.

当给定外力场及 S_1 面上的位错 $\boldsymbol{u}$, 并且位错面 Σ 上发生了应力错 $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]$ 和位移错 $[\boldsymbol{u}]$ 时,则可在 $\boldsymbol{G}|_{S_1} = 0$ 的条件下求出 $\boldsymbol{G}$, 用与上面同样的方法可得位移场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = &\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_V \boldsymbol{G} \cdot \mathbf{f} dV_\xi - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{S_1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_n dS_\xi \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma^-} \boldsymbol{G} \cdot [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})] d\Sigma_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma^-} [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi.\end{aligned} \tag{9}$$

当边界 S_1 为刚性边界,即边界 S_1 上 $\boldsymbol{u}|_{S_1} = 0$ 时, (9) 式中的第二项即边界 S_1 上的位移对位移场的贡献为零.

根据 (8)、(9) 式可立即写出当给定一部分边界上的外力,另一部分边界上的位移时的位移场,这里不再赘述. 再提醒注意,在上面几种情况下,格林函数 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau')$ 的具体形式是不同的,因为它们是在不同的边界条件下求得的 $\boldsymbol{G}$.

前面已说过,当 S_1 为自由界面时, (8) 式可化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = &\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_V \boldsymbol{G} \cdot \mathbf{f} dV_\xi - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma \boldsymbol{G} \cdot [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})] d\Sigma_\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi,\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{G}$ 的分量表达式为 G_k^i, k 代表单位集中脉冲力的作用方向为 $\boldsymbol{e}_k$, i 代表所产生的位移方向在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量. $\boldsymbol{G}^T$ 的分量表达式为 G_i^k, 此时 $\boldsymbol{e}_i$ 为单位集中脉冲力的作用方向,而 G_i^k 代表所产生的位移在 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的分量. (10) 中已将 Σ^- 简记为 Σ.

(10) 式的分量表达式为

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int G_k^i f_k dV_\xi - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma G_k^i [T_k] d\Sigma_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma [u_k] \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i \nu_l d\Sigma_\xi, \tag{11}$$

其中

$[T_k]$ 为应力错 $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})]$ 的分量表达式，

$\overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i$ 为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^i)$ 的分量表达式，

ν_l 为 $\boldsymbol{e}_\nu$ 的分量表达式，

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{kl} &= \frac{1}{2} C_{klpq} \left(\frac{\partial u_q}{\partial \xi_p} + \frac{\partial u_p}{\partial \xi_q} \right) \quad \text{为二阶张量,} \\ \sigma_{kl}^i &= \frac{1}{2} C_{klpq} \left(\frac{\partial G_i^q}{\partial \xi_p} + \frac{\partial G_i^p}{\partial \xi_q} \right) \quad \text{为三阶张量,} \\ \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i &= \frac{1}{2} C_{klpq} \left(\frac{\partial G_q^i}{\partial \xi_p} + \frac{\partial G_p^i}{\partial \xi_q} \right) \quad \text{为三阶张量.} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(11) 式表示当外边界面 S_1 为自由界面及 V 内的 Σ 面上发生应力错 $[\boldsymbol{T}]$ 和位移错 $[\boldsymbol{u}]$ 时，在 V 内所产生的位移场. 当 Σ 面上发生索米亚那位错即应力错为零时，(11) 式可表达为

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_k^i f_k dV_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma [u_k] \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i \nu_l d\Sigma_\xi. \tag{13}$$

二、均匀各向同性无限弹性介质中位错的位移场

均匀、各向同性、无限弹性介质中的位移场的格林函数——索米亚那张量 $\boldsymbol{G}$ 的具体表达式已由 § 8.3 (17)、(18)、(19) 式给出，而 (12) 式在此种情况下为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{kl} &= \lambda \delta_{kl} \frac{\partial u_n}{\partial \xi_n} + \mu \left(\frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} \right), \\ \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i &= \lambda \delta_{kl} \frac{\partial G_n^i}{\partial \xi_n} + \mu \left(\frac{\partial G_l^i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} \right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

而 (11) 式等号右边最后一项的被积函数

$$\begin{aligned} [u_k] \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i \nu_l &= \lambda [u_k] \delta_{kl} \nu_l \frac{\partial G_n^i}{\partial \xi_n} + \mu [u_k] \frac{\partial G_l^i}{\partial \xi_k} \nu_l + \mu [u_k] \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} \nu_l \\ &= \lambda [u_n] \nu_n \delta_{kl} \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} + \mu [u_l] \nu_k \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} + \mu [u_k] \nu_l \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} \\ &= \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} [P_{kl}], \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$[P_{kl}] = \lambda [u_n] \nu_n \delta_{kl} + \mu \{ [u_l] \nu_k + [u_k] \nu_l \}. \tag{16}$$

将 (15) 式代入 (11) 式最后一项，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma \frac{\partial G_k^i}{\partial \xi_l} [P_{kl}] d\Sigma_\xi,$$

此式中 $\frac{\partial}{\partial \xi_l}$ 表示对源点坐标求偏微商，如改成对场点坐标 x_l 求偏微商，则应加负号，即有

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} = -\frac{\partial}{\partial x_l},$$

并注意到

$$\frac{\partial [P_{kl}]}{\partial x_l} = 0$$

（因为 $[P_{kl}]$ 与 x_l 无关），因此 (11) 式右边最后一项可化为

$$-\frac{\partial}{\partial x_l}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma} G_k^i [P_{kl}] d\Sigma_\xi,$$

由此，(11) 式可化为

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_V G_k^i f_k dV_\xi - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma} G_k^i [T_k] d\Sigma_\xi$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_l}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{\Sigma} G_k^i [P_{kl}] d\Sigma_\xi, \tag{17}$$

由 § 8.3 (18) 式知，上式中

$$G_k^i(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau') = \frac{1}{4\pi\rho}\left\{\frac{1}{\alpha^2 R}\nu_i\nu_k\delta\left(t - \frac{R}{\alpha} - \tau'\right)\right.$$
$$+ \frac{1}{\beta^2 R}(\delta_{ik} - \nu_i\nu_k)\delta\left(t - \frac{R}{\beta} - \tau'\right)$$
$$\left. + \frac{1}{R^3}(3\nu_i\nu_k - \delta_{ik})\int_{R/\alpha}^{R/\alpha} \tau\delta(t - \tau - \tau')d\tau\right\}. \tag{18}$$

而 (18) 式中 $R = |\boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$，$\nu_i$ 为 $\boldsymbol{e}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量，即有 $\boldsymbol{e}_R = \nu_i \boldsymbol{e}_i$，而 $(\boldsymbol{\xi}, \tau')$ 为源点，$(\boldsymbol{x}, t)$ 为场点.

§ 9.3 位错的位移场在频率域中的表达式

上面指出了位错的位移场在时间域中的表达式。对 § 9.1 和 § 9.2 中所有的结果进行傅里叶变换后，便可立即转换到频率域。

一、贝蒂第一公式

设有位移场 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$，它们的傅里叶变换为 $\hat{\boldsymbol{u}}(\omega)$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}(\omega)$，则对时间域内的贝蒂第一公式 § 9.1 (22) 式进行傅氏变换后可得

$$\int_V \{\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})\} dV$$
$$= \oint_S \boldsymbol{e}_n \cdot [\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})] dS, \tag{1}$$

或有

$$\int_V \{[\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{v}})] \cdot \hat{\boldsymbol{u}} - [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})] \cdot \hat{\boldsymbol{v}}\} dV$$
$$= \oint_S \boldsymbol{e}_n [\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{v}}) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}}) \cdot \hat{\boldsymbol{v}}] dS. \tag{2}$$

二、索米亚那张量的互易性

对运动方程 § 9.1(23) 和 (24) 式进行傅里叶变换后可得

$$\triangle_1[\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\omega)]+\rho(\boldsymbol{\xi})\omega^2\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\omega)=-\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi},\omega), \tag{3}$$

$$\triangle_1[\hat{\boldsymbol{v}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega)]+\rho(\boldsymbol{\xi})\omega^2\hat{\boldsymbol{v}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega)=-\hat{\mathbf{g}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega), \tag{4}$$

其中 $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi},\omega)$ 和 $\hat{\mathbf{g}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega)$ 为作用力的频谱，$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\omega)$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\xi},\omega)$ 为相应的位移谱.

将 $\hat{\boldsymbol{v}}^*$ 点乘 (3) 式减去 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 点乘 (4) 式，再对体积 V 进行积分，并利用贝蒂第一公式 (1) 可得

$$\oint \boldsymbol{e}_n\cdot[\hat{\boldsymbol{v}}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})-\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{v}}^*)]dS=-\int_V\hat{\boldsymbol{v}}^*\cdot\hat{\mathbf{f}}dV+\int_V\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\mathbf{g}}^*dV. \tag{5}$$

令 $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi},\omega)$ 和 $\hat{\mathbf{g}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega)$ 分别为作用在 $\boldsymbol{x}'$ 点和 $\boldsymbol{x}$ 点的集中脉冲力，作用方向为 $\boldsymbol{e}_j$ 和 $\boldsymbol{e}_i$，因此将 $\hat{\mathbf{f}}$ 和 $\hat{\mathbf{g}}$ 记为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi},\omega)&=\boldsymbol{e}_j\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}'),\\ \hat{\mathbf{g}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega)&=\boldsymbol{e}_i\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

则位移场 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}^*$ 可记为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\omega)&=\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}',\omega)\cdot\boldsymbol{e}_j,\\ \hat{\boldsymbol{v}}^*(\boldsymbol{\xi},\omega)&=\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x},\omega)\cdot\boldsymbol{e}_i.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{G}}$ 为索米亚那张量 $\boldsymbol{G}$ 在频率域内的表达式．与时间域情况一样，位移、应力谱应满足相同的边界条件，即或者 $\hat{\boldsymbol{u}}|_S=0$，$\hat{\boldsymbol{v}}^*|_S=0$；或者 $\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}})|_S=0$，$\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{v}}^*)|_S=0$．因此 (5) 式中等号左边的对 S 的积分为零．由此得

$$\int_V\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\mathbf{g}}^*dV=\int_V\hat{\boldsymbol{v}}^*\cdot\hat{\mathbf{f}}dV,$$

将 (6) 和 (7) 式代入立即可得

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\omega):\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i=\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x},\omega):\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j. \tag{8}$$

由 (8) 可见有

$$\hat{G}_j^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\omega)=\hat{G}_i^j(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x},\omega). \tag{9}$$

或者记为

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\omega)=\hat{\boldsymbol{G}}^T(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x},\omega). \tag{10}$$

(10) 式说明，$\boldsymbol{x}'$ 点作用的 $\boldsymbol{e}_j$ 方向的集中简谐力在 $\boldsymbol{x}$ 点产生的位移谱的 $\boldsymbol{e}_i$ 方向分量等于 $\boldsymbol{x}$ 点作用的 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的集中简谐力在 $\boldsymbol{x}'$ 点产生的位移谱在 $\boldsymbol{e}_j$ 方向的分量．这就证明了索米亚那张量 $\boldsymbol{G}$ 在频率域内亦具有互易性.

三、贝蒂第二公式

对时间域内的贝蒂第二公式 § 9.1 中的 (48) 式进行傅氏变换，注意索米亚那张量 $\boldsymbol{G}$ 对源的时刻 τ' 和场的时刻 t 的函数关系应是 $\mathbf{G}(t-\tau')$，即 $\mathbf{G}$ 只决定于场和源的时间差，也就是时间的平移并不影响效果，这是显然的．而 (48) 式中 $\mathbf{G}\cdot\mathbf{f}$ 对 τ' 的积分关系为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(t-\tau')\cdot\mathbf{f}(\tau')d\tau',$$

所以它的傅氏变换为 $\hat{\boldsymbol{G}}(\omega)\cdot\hat{\mathbf{f}}(\omega)$，对 $\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$ 等也可作类似的变换，因此对 § 9.1 (48) 式进行傅里叶变换后可得

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \int_V \hat{\boldsymbol{G}} \cdot \hat{\mathbf{f}} dV_\xi + \oint_S \hat{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{e}_n dS_\xi - \oint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{G}}^T) \cdot \boldsymbol{e}_n dS_\xi, \tag{11}$$

这就是贝蒂第二公式在频率域的表达式。

四、位错的位移谱

当外边界面 S_1 为自由界面时，V 内 Σ 面上位错的位移场在时间域内的表达式为 § 9.2 (10)式，将它进行傅里叶变换后可得到频率域内的表达式

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \int_V \hat{\boldsymbol{G}} \cdot \hat{\mathbf{f}} dV_\xi - \int_\Sigma \hat{\boldsymbol{G}} \cdot [T(\hat{\boldsymbol{u}})] d\Sigma_\xi + \int_\Sigma [\hat{\boldsymbol{u}}] \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{G}}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi, \tag{12}$$

这里有

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) \longleftrightarrow \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, \omega), \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \longleftrightarrow \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, \omega),$$

以及

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, 0) \longleftrightarrow \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega).$$

对 § 9.2 中 (8)、(9) 式可进行同样的变换，这里不再赘述.

五、均匀各向同性无限弹性介质中位错的位移谱

当介质为无限时，外边界 S_1 已在无穷远处，因此其影响场可忽略不计. 这时位移场的公式仍可用 (12) 式来表达. 而 (12) 式写成分量的形式为

$$\hat{u}_i(\boldsymbol{x}, \omega) = \int_V \hat{G}_k^i \hat{\mathbf{f}}_k d\Sigma_\xi - \int_\Sigma \hat{G}_k^i [\hat{T}_k] d\Sigma_\xi + \int_\Sigma [\hat{u}_k] \hat{\sigma}_{kl}^i \nu_l \, d\Sigma_\xi, \tag{13}$$

其中 $[\hat{T}_k] = [\hat{\sigma}_{kl}\nu_l]$ 为应力错谱，$[\hat{u}_k]$ 为位移错谱. 在我们所讨论的问题中，体力项可不考虑，并认为应力错为零，因此有

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \int_\Sigma [\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, \omega)] \hat{\boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)] \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi \tag{14}$$

或

$$\hat{u}_i(\boldsymbol{x}, \omega) = \int_\Sigma [\hat{u}_k(\boldsymbol{\xi}, \omega)] \hat{\sigma}_{kl}^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \nu_l d\Sigma_\xi. \tag{15}$$

对均匀各向同性的弹性介质，由位移与应力张量的关系知有

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{G}^T) = \lambda \boldsymbol{I} \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{G}}^T + \mu(\nabla \hat{\boldsymbol{G}}^T + \hat{\boldsymbol{G}}^T \nabla), \tag{16}$$

其分量表达式为

$$\hat{\sigma}_{kl}^i = \lambda \delta_{kl} \frac{\partial \hat{G}_m^i}{\partial \xi_m} + \mu \left(\frac{\partial \hat{G}_l^i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \hat{G}_k^i}{\partial \xi_l} \right). \tag{17}$$

上面的索米亚那张量谱 $\hat{\boldsymbol{G}}$ 在均匀各向同性无限介质中的表达式已由 § 8.3 (20) 式给出，即有

$$\hat{\boldsymbol{G}}^T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu k_\beta^2} \left[\nabla \times \nabla \times \left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} \boldsymbol{I} \right) - \nabla\nabla \cdot \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} \boldsymbol{I} \right) \right]. \tag{18}$$

其分量表达式为 $\hat{G}_k^i$，由 (18) 式知它可由下式给出

$$4\pi\mu k_\beta^2 \hat{G}_k^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \delta_{imn} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \delta_{njl} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{e^{-ik_\beta R}}{R} \delta_{kl} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} \delta_{lk}$$

$$= (\delta_{ij}\delta_{mk} - \delta_{ik}\delta_{mj}) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{e^{-ik_\beta R}}{R} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2}{\partial \xi_m \partial \xi_m}\right) \frac{e^{-ik_\beta R}}{R} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}. \tag{19}$$

§ 9.4 剪切位错与张裂位错

一、剪切位错点源的位移场

如果我们将地震时震源的复杂过程加以简化，则往往可以用断层面两侧岩石的相对错动来描述震源．而在大多数情况下，这种错动往往又可以用剪切错动来表示．所谓剪切错动是指相对错动的方向就在错动面内．令 $\boldsymbol{e}_\nu$ 为断层面的法线方向单位向量，$\boldsymbol{e}_u$ 为断层面的剪切位错方向（即 $\boldsymbol{e}_u$ 为 $\boldsymbol{e}_\nu$ 正方向一侧的介质相对 $\boldsymbol{e}_\nu$ 负方向一侧的介质的相对错动方向的单位向量）．因为是剪切位错，所以有 $\boldsymbol{e}_u \perp \boldsymbol{e}_\nu$．位错 $[\boldsymbol{u}]$ 可以记为

$$[\boldsymbol{u}] = u_0(t)\boldsymbol{e}_u, \tag{1}$$

且不考虑外力场，即令 $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0$．地震发生时，断层面上的位错往往是从一点开始，然后沿着断层面扩展，现在先不考虑这一过程，这将在 § 9.7 中讨论．现在先讨论面积为 $d\Sigma$ 的位错面上剪切位错的位移场，当 $d\Sigma$ 足够小时，可以把它看作一个点源．只有在点源的情况讨论清楚后，才能讨论位错沿断层面的扩展问题．一般可以认为，断层面上发生位错时，位错面上的应力保持连续，即 $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})] = 0$，而仅有位移错 $[\boldsymbol{u}]$．

下面在频率域中讨论，则 (1) 式可化为 $[\hat{\boldsymbol{u}}] = \hat{u}_0(\omega)\boldsymbol{e}_u$，根据以上条件，即均匀各向同性无限介质中位错面元 $d\Sigma$ 上发生剪切位错、点源、外力场及应力错都为零，则 §9.3(12) 式可化简为

$$d\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega) = \hat{u}_0\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{G}}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma$$

由 § 9.3 (13) 式

$$= \hat{u}_0\boldsymbol{e}_u \cdot [\lambda \boldsymbol{I}\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{G}}^T + \mu(\nabla\hat{\boldsymbol{G}}^T + \hat{\boldsymbol{G}}^T\nabla)] \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma$$

由于 $\boldsymbol{e}_u \perp \boldsymbol{e}_\nu$

$$= \mu\hat{u}_0 d\Sigma(\boldsymbol{e}_u \cdot \nabla\hat{\boldsymbol{G}}^T \cdot \boldsymbol{e}_\nu + \boldsymbol{e}_\nu \cdot \nabla\hat{\boldsymbol{G}}^T \cdot \boldsymbol{e}_u)$$

由于 $\hat{\boldsymbol{G}}^T = \hat{\boldsymbol{G}}$

$$= \mu\hat{u}_0 d\Sigma(\boldsymbol{e}_u \cdot \nabla\hat{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{e}_\nu + \boldsymbol{e}_\nu \cdot \nabla\hat{\boldsymbol{G}} \cdot \boldsymbol{e}_u), \tag{2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) &= \frac{1}{4\pi\mu k_\beta^2}\left[\nabla \times \nabla \times \left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\boldsymbol{I}\right) - \nabla\nabla \cdot \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\boldsymbol{I}\right)\right] \\
&= \hat{\boldsymbol{G}}_2 - \hat{\boldsymbol{G}}_1, \\
\hat{\boldsymbol{G}}_1 &= \frac{1}{4\pi\mu k_\beta^2}\nabla\nabla \cdot \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\boldsymbol{I}\right), \\
\hat{\boldsymbol{G}}_2 &= \frac{1}{4\pi\mu k_\beta^2}\nabla \times \nabla \times \left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\boldsymbol{I}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

现在把坐标原点移到发生位错的点源处，并取球坐标，则有

$$\nabla = -\left(\boldsymbol{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\partial}{R\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\partial}{R\sin\theta\partial\varphi}\right), \tag{4}$$

此处加一负号是因为(3)式中的∇运算是对源点$\boldsymbol{\xi}$进行的，如改成对场点$\boldsymbol{x}$进行，则应反号. 令

$$a = \frac{1}{4\pi\mu k_\beta^2}, \tag{5}$$

并应用如下公式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \varphi} = \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_R, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_R + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta),
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_R = 0, \quad \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\theta = 0, \quad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\varphi = 0, \\
&\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_R, \quad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{e}_\theta, \\
&\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \ (i, j \text{ 可任取 } R, \theta \text{ 或 } \varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将(4)式代入(3)式再一起代入(2)式，并利用(6)、(7)式进行一系列运算，略去$\frac{1}{R}$的高次项后可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u \cdot \nabla \hat{\mathbf{G}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_v &= a\boldsymbol{e}_u \cdot \nabla\nabla\nabla \cdot \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{e}_v \\
&\simeq -a(\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_R(\boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{e}_v) \frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u \cdot \nabla \hat{\mathbf{G}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_v &= a\boldsymbol{e}_u \cdot \nabla\nabla \times \nabla \times \left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{e}_v \\
&\simeq a(\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_\theta(\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_v) \frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) \\
&\quad + a(\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_\varphi(\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_v) \frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_v \cdot \nabla \hat{\mathbf{G}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_u = a(\boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_\theta(\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_u) \frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) \\
+ a(\boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_R)\boldsymbol{e}_\varphi(\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_u) \frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

由于

$$\frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) = \left(\frac{ik_\beta^3}{R} + \frac{4k_\beta^2}{R^2} - \frac{6ik_\beta}{R^3} - \frac{6}{R^4}\right)e^{-ik_\beta R}, \tag{11}$$

若

$$k_\beta R = \frac{2\pi R}{\lambda_\beta} \gg 1,$$

即震源距R比地震横波的波长λ_β大得多时，则(11)式的括号中第二、三、四项可略去，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) \simeq \frac{ik_\beta^3}{R} e^{-ik_\beta R}, \quad \text{当 } k_\beta R \gg 1, \\
&\frac{\partial^3}{\partial R^3}\left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\right) \simeq \frac{ik_\alpha^3}{R} e^{-ik_\alpha R}, \quad \text{当 } k_\alpha R \gg 1.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

再令

$$\hat{u}_0(\omega)=\Delta u\hat{g}(\omega),\tag{13}$$

其中 Δu 为位错幅度；$\hat{g}(\omega)$ 为位错的频谱，即震源时间函数的谱．因而有

$$\frac{\hat{u}_0(\omega)ik_\alpha^3}{k_\beta^3}=\Delta ui\omega\hat{g}(\omega)\frac{\beta^2}{\alpha^3}.\tag{14}$$

将 (12) 式代入 (8)、(9)、(10) 式 (在 $k_\beta R\gg 1$, $k_\alpha R\gg 1$ 的条件下)，利用 (3) 式再一起代入 (2) 式，最后利用 (14) 式可以化得

$$d\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)=d\hat{u}_R\boldsymbol{e}_R+d\hat{u}_\theta\boldsymbol{e}_\theta+d\hat{u}_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
d\hat{u}_R&=i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}[2(\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{e}_u)]\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R},\\
d\hat{u}_\theta&=i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}[(\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\theta)+(\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_\theta)]\frac{e^{-ik_\beta R}}{R},\\
d\hat{u}_\varphi&=i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}[(\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\varphi)+(\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_\varphi)]\frac{e^{-ik_\beta R}}{R},
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$$m_0=\mu\Delta ud\Sigma.\tag{17}$$

(15)、(16) 式便是均匀、各向同性无限弹性介质中剪切位错点源产生的位错谱的远场表达式．所谓远场即要求震源距 R 比纵波和横波的波长 λ_α 和 λ_β 要大得多．这里点源处于坐标原点．位错所激起的位移还未传播到外边界面时，公式 (15)、(16) 所表达的位移谱公式仍然适用．(15) 式中的 $d\hat{u}_R\boldsymbol{e}_R$ 一项代表纵波，而 $d\hat{u}_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 及 $d\hat{u}_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ 项代表横波．在(16) 式中，

m_0 称为地震矩，它反映震源剪切位错的规模；

$\hat{g}(\omega)$ 为震源时间函数谱；

$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}$ 及 $\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}$ 反映了介质弹性常数对位移谱的影响；

方括号内的项为震源辐射因子，反映了不同方向上辐射的幅度分布；

$\frac{1}{R}$ 为体积扩散因子；

$e^{-ik_\alpha R}$ 及 $e^{-ik_\beta R}$ 反映纵、横波的时间延迟。

设断层在 x_2、x_3 平面内 (图 9.3)，且

$$\boldsymbol{e}_u=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_\nu=\boldsymbol{e}_1,$$

因此有

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_R&=\cos\theta,\\
\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_\theta&=-\sin\theta,\\
\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_\varphi&=0,\\
\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_R&=\sin\theta\cos\varphi,\\
\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\theta&=\cos\theta\cos\varphi,\\
\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\varphi&=-\sin\varphi.
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

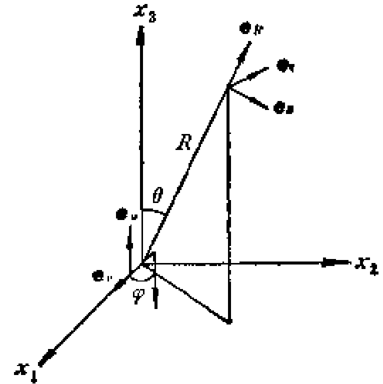


图 9.3

将 (18) 式代入 (16) 式可得

$$\left.\begin{aligned} d\hat{u}_R &= i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\sin 2\theta\cos\varphi\,\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R},\\ d\hat{u}_\theta &= i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}\cos 2\theta\cos\varphi\,\frac{e^{-ik_\beta R}}{R},\\ d\hat{u}_\varphi &= i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}(-\cos\theta\sin\varphi)\,\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}. \end{aligned}\right\}\tag{19}$$

或有

$$d\hat{\boldsymbol{u}} = i\omega\hat{g}(\omega)m_0\frac{1}{4\pi\rho c^3}\mathscr{R}\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{R}\tag{20}$$

其中

$$\mathscr{R} = \sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_R + \cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta - \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\tag{21}$$

为辐射因子. 对纵波(即 $\boldsymbol{e}_R$ 方向的位移) $c=\alpha$, 对横波(即 $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的位移) $c=\beta$.

可以把位移谱的结果(19)式变换到时间域内去. 有如下对应关系

$$\left.\begin{aligned} i\omega\hat{g}(\omega)e^{-ik_\alpha R} &\longleftrightarrow g'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right),\\ i\omega\hat{g}(\omega)e^{-ik_\beta R} &\longleftrightarrow g'\left(t-\frac{R}{\beta}\right). \end{aligned}\right\}\tag{22}$$

令

$$m_0 g'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right) = q'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right),\tag{23}$$

$$C_1 = \frac{q'\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)}{4\pi\rho\alpha^3},\quad C_2 = \frac{q'\left(t-\frac{R}{\beta}\right)}{4\pi\rho\beta^3},\tag{24}$$

则对(19)式进行傅氏反变换并利用(22)、(23)式可得

$$d\boldsymbol{u} = du_R\boldsymbol{e}_R + du_\theta\boldsymbol{e}_\theta + du_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\tag{25}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} du_R &= \frac{C_1}{R}\sin 2\theta\cos\varphi,\\ du_\theta &= \frac{C_2}{R}\cos 2\theta\cos\varphi,\\ du_\varphi &= -\frac{C_2}{R}\cos\theta\sin\varphi. \end{aligned}\right\}\tag{26}$$

比较(25)、(26)式与§8.4(15)式,可见它们是完全一样的. 由此可见剪切位错点源的远场位移场与无矩双力偶点源的远场位移场是完全一样的,在§9.5中还要证明即使对近场也是一样的.

从(23)式知

$$q(t) = m_0 g(t) = \mu\Delta u d\Sigma g(t) = \mu u(t)d\Sigma,$$

即有

$$q(t) = \mu u(t)d\Sigma.\tag{27}$$

对比(24)式与§8.4(10)式,可见 $q(t)$ 就是无矩双力偶中两力偶之一的力偶矩. 而 $u(t)$

反映了位错的大小及其与时间的关系，因此(27)式反映了位错与无矩双力偶的等效关系.

二、张裂位错点源的位移场

设在均匀各向同性无限弹性介质中的位错面 $d\Sigma$ 上发生张裂位错. 所谓张裂位错是指位错面两侧介质的相对位移方向与位错面的法线方向相一致.

与前面一样，令 $\boldsymbol{e}_\nu$ 为 $d\Sigma$ 面的法线方向单位向量，$\boldsymbol{e}_u$ 为张裂位错的位错方向的单位向量. 因为是张裂位错，所以有 $\boldsymbol{e}_u /\!/ \boldsymbol{e}_\nu$. 与前面剪切位错时一样，可由 § 9.3 (12) 式得到

$$d\hat{u}(\boldsymbol{x}, \omega) = \hat{u}_0 \boldsymbol{e}_u \cdot [\lambda \boldsymbol{I} \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{G}} + \mu(\nabla \hat{\boldsymbol{G}} + \hat{\boldsymbol{G}} \nabla)] \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma$$
$$= \lambda \hat{u}_0 d\Sigma \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{G}} + \mu \hat{u}_0 d\Sigma \boldsymbol{e}_\nu \cdot (\nabla \hat{\boldsymbol{G}} + \hat{\boldsymbol{G}} \nabla) \cdot \boldsymbol{e}_\nu, \tag{28}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{G}}$ 仍由 (3) 式给出. 只要在 (16) 式中令 $\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{e}_\nu$，便可得到 (28) 式等号右边第二项，而求右边第一项时同样利用 (4)—(7) 式，并略去 $\frac{1}{R}$ 的高次项可得

$$\lambda \hat{u}_0 d\Sigma \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{G}} = -\lambda \hat{u}_0 d\Sigma a \nabla \cdot \nabla \nabla \cdot \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} \boldsymbol{I} \right)$$
$$\simeq \lambda a \hat{u}_0 d\Sigma \frac{\partial^3}{\partial R^3} \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) \boldsymbol{e}_R. \tag{29}$$

在震源距 R 比波长大很多时，亦即 $k_\alpha R \gg 1$，$k_\beta R \gg 1$ 时，可以有

$$\frac{\partial^3}{\partial R^3} \left(\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} \right) \simeq \frac{i k_\alpha^3}{R} e^{-ik_\alpha R}.$$

同样令

$$\hat{u}_0 = \Delta u \hat{g}(\omega), \quad m_0 = \mu \Delta u d\Sigma,$$

并利用 (16) 式和 (29) 式，可将 (28) 式化为

$$\left.\begin{aligned}
d\hat{u}_R &= i\omega \hat{g}(\omega) m_0 \frac{1}{4\pi\rho\alpha\beta^2} \left\{ 1 + 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_R)^2 - 1] \right\} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}, \\
d\hat{u}_\theta &= i\omega \hat{g}(\omega) m_0 \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} 2(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_\theta) \frac{e^{-ik_\beta R}}{R}, \\
d\hat{u}_\varphi &= i\omega \hat{g}(\omega) m_0 \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} 2(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_\varphi) \frac{e^{-ik_\beta R}}{R},
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$d\hat{\boldsymbol{u}} = d\hat{u}_R \boldsymbol{e}_R + d\hat{u}_\theta \boldsymbol{e}_\theta + d\hat{u}_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi. \tag{31}$$

(31) 式及 (30) 式便是张裂位错点源的远场位移谱. (31)、(30) 式同样可以简记为

$$d\hat{\boldsymbol{u}} = i\omega \hat{g}(\omega) m_0 \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 c} \mathscr{Q} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{R}, \tag{32}$$

其中

$$\mathscr{Q} = \{1 + 2(\beta/\alpha)^2[(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_R)^2 - 1]\}\boldsymbol{e}_R + 2(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_\varphi)\boldsymbol{e}_\theta$$
$$+ 2(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{33}$$

$c = 2$，对 $\boldsymbol{e}_R$ 方向的分量(即 P 波)，

$c = \beta$，对 $\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的分量(即 S 波)，

$\mathscr{Q}$ 为张裂位错的辐射因子.

当位错 $[\boldsymbol{u}]$ 为任意方向，即既不在 Σ 面内又不在 $\boldsymbol{e}_\nu$ 方向时，利用分量的分解，我们总

可以将它分解为一个剪切位错 $[\boldsymbol{u}_S]$ 与一个张裂位错 $[\boldsymbol{u}_L]$ 之和,即有

$$[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}_S] + [\boldsymbol{u}_L] = u_S\boldsymbol{e}_S + u_L\boldsymbol{e}_L. \tag{34}$$

由于均匀各向同性的无限弹性介质中的剪切位错和张裂位错的位错谱已由(16)式和(30)式分别给出. 因而此种介质中任意方向的索米亚那位错产生的位移谱便可由(34)及(16)、(30)式得到.

§ 9.5 位错的等效力系

一、均匀各向同性介质中的剪切位错等效于无矩双力偶

注意,本节的讨论要求介质是均匀各向同性的,但可以是有限介质. 设在均匀各向同性的介质中有位错面元 $d\Sigma$, 其两侧的介质发生相对的位移错动 $[\boldsymbol{u}]$. 令 $[\boldsymbol{u}] = u(t)\boldsymbol{e}_u$, 其中 $\boldsymbol{e}_u$ 为位错方向的单位向量, $\boldsymbol{e}_\nu$ 为 $d\Sigma$ 面的法线方向单位向量. 因为现在讨论剪切位错,因此有 $\boldsymbol{e}_u \perp \boldsymbol{e}_\nu$. 由 § 9.2 (8)式或(9) 式可知, 由于 $d\Sigma$ 面上的位错 $[\boldsymbol{u}]$ 而产生的位移场为

$$d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau')\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi] d\tau', \tag{1}$$

或记为

$$du_i(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau')\alpha_k \overset{*}{\sigma}{}^i_{kl} \nu_l d\Sigma_\xi] d\tau', \tag{2}$$

其中 α_k 为 $\boldsymbol{e}_u$ 的分量形式, $\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl}$ 为 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T)$ 的分量形式, ν_l 为 $\boldsymbol{e}_\nu$ 的分量形式. 因为我们讨论的是位错的等效力系,因此只要讨论位错的影响项就够了.

因为讨论的是均匀各向同性介质,因此有关系式

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) = \lambda \boldsymbol{I} \nabla \cdot \boldsymbol{G}^T + \mu(\nabla \boldsymbol{G}^T + \boldsymbol{G}^T \nabla), \tag{3}$$

或记为

$$\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl} = \lambda \delta_{kl} \frac{\partial G^i_m}{\partial \xi_m} + \mu\left(\frac{\partial G^i_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial G^i_k}{\partial \xi_l}\right), \tag{4}$$

其中

$$G^i_k = G^i_k(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau'),$$

它代表作用于 $\boldsymbol{\xi}$ 点 τ' 时刻的 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的单位集中脉冲力, 在 $\boldsymbol{x}$ 点 t 时刻产生的位移场在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量. 注意上角标代表场点,下角标代表源点.

由于 $\boldsymbol{e}_u$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_\nu$, 因而 $\alpha_k\delta_{kl}\nu_l = \alpha_k\nu_k = 0$, 且设 Σ 面是平面, 所以 ν_l 为常向量, 要求 α_k 也是常向量,因此

$$\frac{\partial G^i_l}{\partial \xi_k}\nu_l = \frac{\partial(G^i_l\nu_l)}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial G^i_k}{\partial \xi_l}\alpha_k = \frac{\partial(G^i_k\alpha_k)}{\partial \xi_l},$$

由此 (2) 式可化为

$$du_i = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu u(\tau')d\Sigma\alpha_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}(G^i_l\nu_l)\right]d\tau' + \int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu u(\tau')d\Sigma\nu_l \frac{\partial}{\partial \xi_l}(G^i_k\alpha_k)\right]d\tau' \tag{5}$$

由 G_k^i 的定义可知,(5) 式中的 $G_k^i\alpha_k$ 代表作用在 $\boldsymbol{\xi}$ 点 τ' 时刻的 $\boldsymbol{e}_u$ 方向的单位集中脉冲力(或称为单位脉冲力点源) 产生的在 $\boldsymbol{x}$ 点 t 时刻的位移,注意 $\frac{\partial}{\partial \xi_l}$ 是对源点 $\boldsymbol{\xi}$ 而不是对场点 $\boldsymbol{x}$ 求偏微商,因此 $\nu_l \frac{\partial}{\partial \xi_l}(G_k^i\alpha_k)$ 代表 $(\boldsymbol{\xi}, \tau')$ 处 $\boldsymbol{e}_u$ 方向的单位脉冲力点源在 $\boldsymbol{e}_\nu$ 方向的导数即单位脉冲力偶点源所产生的在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 处的位移,见图 9.4(a).

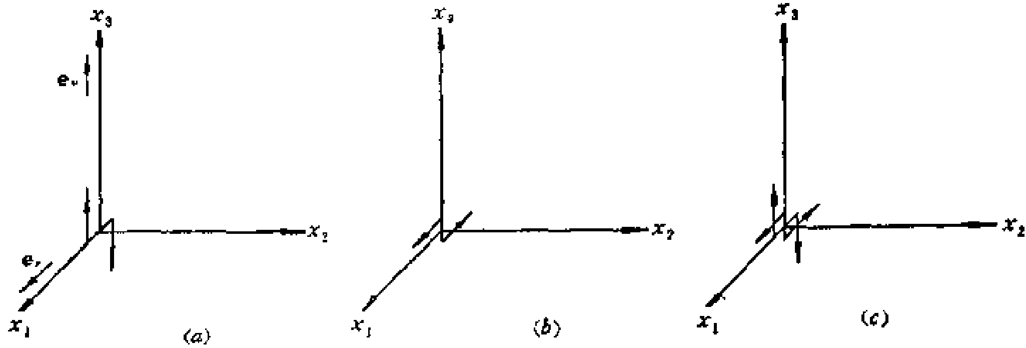


图 9.4　剪切位错的等效力系

$\boldsymbol{e}_\nu$ 为位错面法线方向, $\boldsymbol{e}_u$ 为位错方向,位错面在 x_2ox_3 平面上.

同理 $\alpha_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}(G_k^i\nu_l)$ 则代表 $(\boldsymbol{\xi}, \tau')$ 处 $\boldsymbol{e}_\nu$ 方向的单位脉冲力点源在 $\boldsymbol{e}_u$ 方向的导数, 亦即另一个单位脉冲力点源在 $(\boldsymbol{x}, t)$ 处所产生的位移,图 9.4(b). 而 $\mu u(\tau')d\Sigma$ 可以看做力偶点源的位移场. 如果考虑整个 Σ 面而不是位错面面元 $d\Sigma$, 则对 (1) 式在 Σ 面上积分后便可得到相当于 Σ 面上的力偶分布所激起的位移场. 从图 9.4(c) 可以看出,

$$\nu_l \frac{\partial}{\partial \xi_l}(G_k^i\alpha_k) \text{ 及 } \alpha_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}(G_l^i\nu_l)$$

所代表的两对力偶的方向相反, 从 (5) 式可见两力偶的强度 $\mu u(t)$ 相等, 因而总的力偶矩为零,因此总的效果相当于无矩双力偶.

令 $q(t)$ 为剪切位错的等效无矩双力偶的任一对力偶的力偶矩, 由以上讨论可知有关系式

$$dq(t) = \mu u(t)d\Sigma. \tag{6}$$

令 $\bar{u}(t)$ 为 Σ 面上的平均剪切位错,令 A 为 Σ 面的总面积, 我们这里假定 Σ 面为平面, 同时 Σ 面上的剪切位错的方向对于各点都是相同的. 在上述假定下,对 (6) 积分立得

$$q(t) = \mu\bar{u}(t)A. \tag{7}$$

(6)、(7) 式反映了剪切位错与无矩双力偶的等效关系.

二、均匀各向同性弹性介质中的张裂位错的等效力系

若 $\boldsymbol{e}_u$ 平行 $\boldsymbol{e}_\nu$, 即发生张裂位错的情况,则位错对位移场的贡献项为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma u(\tau')\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T) \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_\Sigma \lambda u(\tau')\nabla \cdot \boldsymbol{G}^T d\Sigma_\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \\ &\quad \cdot \int_\Sigma 2\mu u(\tau')\boldsymbol{e}_\nu \cdot \nabla\boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi,\end{aligned} \tag{8}$$

或记为

$$u_l=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_{\Sigma}\lambda u(\tau')\frac{\partial G_m^i}{\partial\xi_m}d\Sigma_\xi+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_{\Sigma}2\mu u(\tau')\nu_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}(G_l^i)\nu_l d\Sigma_\xi. \tag{9}$$

仍假定 Σ 面为平面，因此 ν_l 为常向量，有

$$\nu_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}(G_l^i)\nu_l=\nu_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}(G_l^i\nu_l),$$

由前面的讨论可知

$$\nu_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}(G_l^i\nu_l)$$

反映了 e_ν 方向的单位脉冲力点源在 e_ν 方向的导数，亦即 e_ν 方向的无矩偶极(图 9.5)产生的位移场，相应的力偶点源强度为 $2\mu u(\tau')$. 而 (9) 式等号右边第一项中的 $\frac{\partial G_m^i}{\partial\xi_m}$ 可记为

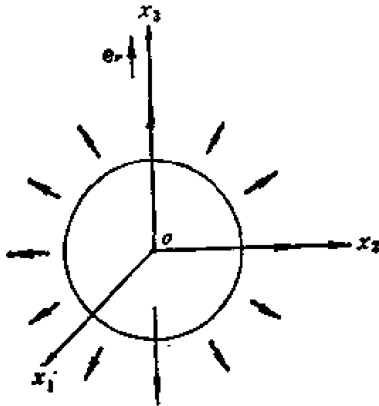


图 9.5 张裂位错的等效力系，张裂位错在 x_1ox_2 平面内

$$\frac{\partial G_m^i}{\partial\xi_m}=\frac{\partial G_1^i}{\partial\xi_1}+\frac{\partial G_2^i}{\partial\xi_2}+\frac{\partial G_3^i}{\partial\xi_3}. \tag{10}$$

(10) 式中的 $\frac{\partial G_1^i}{\partial\xi_1}$ 可以看作是 e_1 方向的单位脉冲无矩偶极产生的位移场，$\frac{\partial G_2^i}{\partial\xi_2}$ 和 $\frac{\partial G_3^i}{\partial\xi_3}$ 可以分别看作是 e_2 方向和 e_3 方向的单位脉冲无矩偶极产生的位移场。因此三者合起来就可以看作是单位脉冲膨胀中心点源(即力的散度)所产生的位移场。而相应的膨胀中心点源的强度为 $\lambda u(\tau')$. 对 $d\tau'$ 积分后便得到强度为 $\lambda u(\tau')$ 的膨胀中心点源和强度为 $2\mu u(\tau')$ 的 e_ν 方向的无矩偶极点源所产生的位移场，再对 $d\Sigma_\xi$ 积分便得到 Σ 面上分布的膨胀中心和 e_ν 方向的无矩偶极所产生的位移场。由此可见 e_ν 方向的张裂位错与一个膨胀中心和一个 e_ν 方向的无矩偶极所合成的力系是等效的 (图 9.5)。

三、位错的位移场的积分核的物理意义

位错的位移场由 § 9.2(8)式或 (9) 式给出

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T)\cdot\boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T)$ 称为位错的位移场的积分核。(11) 式中仅考虑了位错对位移场的贡献。

积分核 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{G}^T)$ 在直角坐标系中的分量表达式为 $\overset{*}{\sigma}{}_{lk}^i$，而可将 (11) 式记为

$$u_i(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}[u_k]\overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i\nu_l d\Sigma_\xi. \tag{12}$$

对于均匀各向同性弹性介质，$\overset{*}{\sigma}{}_{lk}^i$ 的表达式如下

$$\overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i=\lambda\delta_{kl}\frac{\partial G_m^i}{\partial\xi_m}+\mu\left(\frac{\partial G_l^i}{\partial\xi_k}+\frac{\partial G_k^i}{\partial\xi_l}\right). \tag{13}$$

$\overset{*}{\sigma}{}_{kl}^i$ 代表 $(\boldsymbol{\xi},\tau')$ 处作用的由 (kl) 定义的力系在 $(\boldsymbol{x},t)$ 处产生的位移在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量。

由前面的讨论可知，当 $l=k$ 时，这个力系就相当于强度为 $\lambda[u_l]$ 的膨胀中心和强度

为 $2\mu[u_l]$ 的 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的无矩偶极. 称 $k=l$ 的 $\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl}$ 为 A 型核.

当 $k \neq l$ 时这个力系相当于两对有矩力偶,他们的力偶矢量的方向彼此相反,且垂直于 $\boldsymbol{e}_k$ 和 $\boldsymbol{e}_l$, 其强度为 $\mu([u_k]\nu_l+[u_l]\nu_k)$. 称 $k \neq l$ 时的 $\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl}$ 为 B 型核.

从前面的讨论可知张裂位错时取 A 型核,剪切位错时取 B 型核.

§9.6 位错的静态位移场、应力场

仅考虑位错的影响,则由 §9.3 (14) 式可得位错的位移谱

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega)=\int_{\Sigma}[\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\omega)]\cdot\boldsymbol{\sigma}[\hat{\boldsymbol{G}}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\omega)]\cdot\boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi. \tag{1}$$

在 (1) 式中令 $\omega\to 0$, 就得到位错的静态位移场. 因为静态位移场就是位移谱的零频值. 这里假定 $\lim\limits_{t\to\infty}[\boldsymbol{u}(t)]$ 存在,也就是 t 趋于无穷时, $\boldsymbol{u}(t)$ 趋于一定极限. 这是符合实际情况的,这相当于地震后断层面因位错而达到新的状态,并相对稳定下来. 如令

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})&=\lim_{\omega\to 0}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega),\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi})&=\lim_{\omega\to 0}[\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},\omega)],\\ \boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})&=\lim_{\omega\to 0}\hat{\boldsymbol{G}}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\omega),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

则在 $\omega\to 0$ 的情况下, (1) 式化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\int[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi})]\cdot\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]\cdot\boldsymbol{e}_\nu d\Sigma_\xi, \tag{3}$$

或可表达为

$$u^i=\int_\Sigma[u_k]\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl}\nu_l d\Sigma. \tag{4}$$

(3) 式或 (4) 式就是位错的静态位移场的表达式.

为了简化记号我们仍将用撇号代表求偏微商 (见 §8.2 (47) 式).

对于均匀各向同性介质, 位错的积分核 $\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl}$ 可表达为

$$\overset{*}{\sigma}{}^i_{kl}=\lambda\delta_{kl}\frac{\partial G^i_m}{\partial\xi_m}+\mu\left(\frac{\partial G^i_l}{\partial\xi_k}+\frac{\partial G^i_k}{\partial\xi_l}\right)=\lambda\delta_{kl}G^i_{m,m}+\mu(G^i_{l,k}+G^i_{k,l}). \tag{5}$$

如果介质又是无限的, 则 $G^i_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 就是静态集中力的索米亚那张量. §8.3 (23) 式给出

$$G^i_k(\boldsymbol{x},\xi)=\frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{ik}R'^{mm}-\gamma R'^{ik})=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2R}{\partial^2x_m}-\gamma\frac{\partial^2R}{\partial x_i\partial x_k}\right). \tag{6}$$

在 §8.3 中已证明了它就是均匀各向同性的无限弹性介质中的索米亚那张量 G^i_k 的谱在频率 $\omega\to 0$ 时的极限. 由 (6) 式易见有

$$G^i_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=G^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=G^k_i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

知道了由 (3) 或 (4) 式给出的 $(\boldsymbol{x},t)$ 处的位移, 便可用应力张量与位移之间的关系求出 $(\boldsymbol{x},t)$ 处的应力张量

$$\Sigma^{ij}(\boldsymbol{x})=\lambda\delta_{ij}\frac{\partial u^m}{\partial x_m}+\mu\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}+\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)=\lambda\delta_{ij}u^{m,m}+\mu(u^{i,j}+u^{j,i}). \tag{8}$$

将 (4) 式代人 (8) 式立得

$$\Sigma^{ij}(\boldsymbol{x}) = \int [u_k] H_{kl}^{ij} \nu_l d\Sigma_\xi, \tag{9}$$

其中

$$H_{kl}^{ij} = \lambda\delta_{ij}\frac{\partial \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{m}}{\partial x_m} + \mu\left(\frac{\partial \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{j}}{\partial x_i}\right) = \lambda\delta_{ij}\overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{m,m} + \mu(\overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{i,j} + \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{j,i}). \tag{10}$$

如记

$$\tau_{kl}^{m} = \overset{*}{\sigma}{}_{kl}^{m}, \tag{11}$$

则可得位错的静态位移场为

$$u^i(\boldsymbol{x}, t) = \int_\Sigma [u_k]\tau_{kl}^i \nu_l d\Sigma. \tag{12}$$

位错的静态应力张量场为

$$\Sigma^{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \int_\Sigma [u_k] H_{kl}^{ij} \nu_l d\Sigma. \tag{13}$$

对于均匀各向同性的无限弹性介质有

$$G_k^i(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu}(\delta_{ij}R'^{mm} - \gamma R'^{ik}), \tag{14}$$

$$\tau_{kl}^i(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = \lambda\delta_{kl}G_{m,m}^i + \mu(G_{k,l}^i + G_{l,k}^i), \tag{15}$$

$$H_{kl}^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda\delta_{ij}\tau_{kl}^{m,m} + \mu(\tau_{kl}^{i,j} + \tau_{kl}^{j,i}). \tag{16}$$

通过求偏微商可以求出 (14、) (15)、(16) 式来. 如果令

$$R_k = x_k - \xi_k, \tag{17}$$

则可求得

$$G_k^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu}\left[(2-\gamma)\frac{\delta_{ik}}{R} + \gamma\frac{R_iR_k}{R^3}\right], \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\tau_{kl}^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu}\Big[&\frac{2\mu(1-\gamma)}{R^3}(-R_i\delta_{kl} + R_k\delta_{il} + R_l\delta_{ik}) \\ &+ 6\gamma\mu\frac{R_iR_kR_l}{R^5}\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}H_{kl}^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu}\Big[&-4\mu^2(2-3\gamma)\frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{R^3} + \frac{4\mu^2(1-\gamma)}{R^3} \\ &\cdot(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{12\mu^2(1-\gamma)}{R^5}(R_iR_j\delta_{kl} + R_kR_l\delta_{ij}) \\ &- \frac{6\mu^2(1-2\gamma)}{R^5}(R_iR_k\delta_{jl} + R_iR_l\delta_{jk} + R_jR_k\delta_{il} \\ &+ R_jR_l\delta_{ik}) - 60\gamma\mu^2\frac{R_iR_jR_kR_l}{R^7}\Big].\end{aligned} \tag{20}$$

τ_{kl}^i 为位错的静态位移场的积分核，其中 k 为位错方向，l 为位错面的法线方向，i 为位移分量的方向. H_{kl}^{ij} 为位错的静态应力张量场的积分核，l、k 的意义同前，i 为 $\boldsymbol{x}$ 处的面元方向，j 为面元上的应力分量的方向. 而上面各式中

$$\gamma = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}.$$

§ 9.7 位错运动源理论

在上面几节的讨论中或者把震源看做点源，或者假定地震发生时，断层面上的位错是同时发生的. 实际上发生地震时，往往是在断层面上的某点开始破裂而发生位错，然后位错(即破裂)沿断层面不断扩展. 本节讨论位错沿断层面扩展时所产生的位移场.

对于大地震的断层面，沿走向方向的尺度一般都远大于沿倾向方向的尺度，因此往往可以用长条形的断层模型来模拟. 在最简单的情况下，可以用长条形的矩形断层面模型来模拟. 对长条形断层，有时它是以断层的中间开始破裂而发生位错，然后向两端扩展；有时它是从断层的一端开始破裂，而向另一端扩展，它们分别称为双侧破裂模式和单侧破裂模式. 例如，有证据表明，1966 年邢台地震属于单侧破裂，而 1970 年云南通海地震属于双侧破裂[12]. 对于较小的地震，断层面往往并不伸展到地面，发生破裂的位错面可以是任意形状，这时往往假定断层面是圆盘形的，在多数情况下可以认为这是一种合理的假定，并可假定破裂是从中心开始然后向四周扩展，这就是所谓圆盘形位错模式.

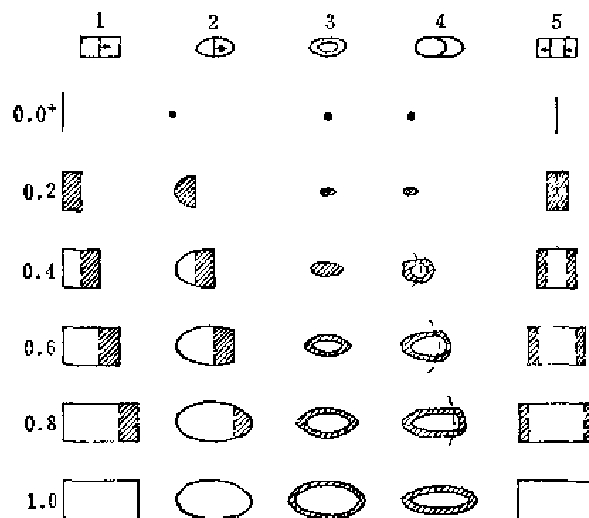


图 9.6 五种长条形位错模型

0.0+ 为破裂开始的时刻， 1.0 为破裂终止的时刻

1. 为矩形断层面单侧破裂模式；
2. 为椭圆形断层面单侧破裂模式；
3. 为椭圆形断层面自相似破裂模式；
4. 为愈合锁定破裂 (pinned anealing crack)；
5. 为矩形断层面双侧破裂模式.

安德逊 (Anderson)[57] 曾列举了五种长条形位错模型 (图 9.6).

下面仅讨论模式 (1) 和模式 (5)，即矩形断层面单侧破裂模式和矩形断层面双侧破裂模式.

一、矩形断层面单侧破裂

假定在断层的宽度方向上是同时破裂的，这种假定当然只是实际情况的一种近似.

现在讨论远场问题. 所谓远场，在这里不但要求震源距离比地震波的波长要大得多，而且要求震源距比震源本身的尺度即断层面的尺度要大得多.

我们讨论破裂是走向剪切位错的情况，即位错方向沿断层走向方向，即沿 AB 方向，并且位错是从断层面一端 A 开始的，然后以一定速度 v 传播到另一端 B(图 9.7). 假定断层上各点位错时间函数都是一样的. 断层长为 L 宽为 W.

我们在 § 9.4 (20) 中已给出了剪切位错点源的远场位移谱为

$$d\hat{\boldsymbol{u}} = i\omega\hat{g}(\omega)\frac{\mu\Delta u d\Sigma}{4\pi\rho c^3 R}\mathscr{R}e^{-ik_cR}. \tag{1}$$

设在 $t=0$ 时刻在 A 处开始破裂而发生剪切位错经一定时间 τ 后传播到了 D 处，D 点离 A 点的距离为 ξ，由于破裂的传播速度为 v，因此 D 点的位错点源相对于 A 点的位错点源推迟了时间 $\frac{\xi}{v}$，D 点的位错点源对远场的场点 Q 的位移谱的贡献为

$$d\hat{\boldsymbol{u}} = i\omega\hat{g}(\omega)\frac{\mu\Delta u d\Sigma}{4\pi\rho c^3 R'}\mathscr{R}e^{-ik_cR'-i\frac{\xi}{v}\omega}, \tag{2}$$

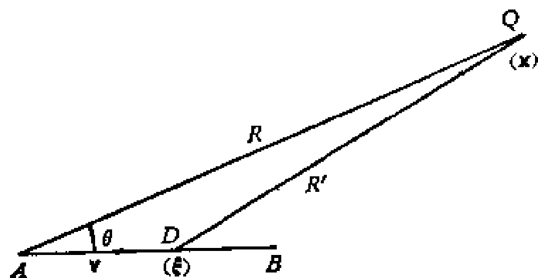


图 9.7 矩形断层面单侧破裂

其中 $\hat{g}(\omega)$ 为位错的归一化时间谱；Δu 为位错的幅度；$d\Sigma$ 为位错面元；c 为波速；$k_c=\frac{\omega}{c}$；$R'=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$为场点 Q 与源点 D 之间的距离；$\mathscr{R}$ 为辐射因子，按照图 9.3，取 AB 方向为球坐标的 z 轴，则有

$$\mathscr{R} = \sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_R + \cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta - \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi.$$

令

$$d\Sigma = Wd\xi, \tag{3}$$

其中 W 为断层宽度，则运动位错源在 Q 点产生的位移谱由 (2) 式可得

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega) = \int_0^L i\omega\hat{g}(\omega)\frac{\mu\Delta u w}{4\pi\rho c^3 R'}\mathscr{R}e^{-i\omega\left(\frac{R'}{c}+\frac{\xi}{v}\right)}d\xi. \tag{4}$$

由于是远场，$R'\gg L$，因此有

$$R'\simeq R-\xi\cos\theta,\quad \mathscr{R}(D)\simeq\mathscr{R}(A),$$

其中 R 为 A 点与 Q 点之间的距离(图 9.8). 并对不在指数项中的 R' 取

$$\frac{1}{R'}\simeq\frac{1}{R},$$

则对 (4) 可进行积分得

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\omega) = i\omega\hat{G}(\omega)\frac{m_0}{4\pi\rho c^3 R}e^{-iX-i\omega\frac{R}{c}}\mathscr{R}\frac{\sin X}{X}, \tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\theta}{c}\right), \\ m_0 &= \mu\Delta u W L \quad \text{为地震矩.} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(5) 式为单侧有限移动源所辐射的地震体波的频谱，在 § 15.3 中还要对它进行讨论，并以

此求出震源参数.

将 (4) 式进行傅氏反变换使变换到时间域得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{\mu\Delta u W}{4\pi\rho c^3}\int_0^L \dot{g}\left(t-\frac{R'}{c}-\frac{\xi}{v}\right)\frac{\mathscr{R}}{R'}\,d\xi \\
&\simeq \frac{\mu\Delta u W}{4\pi\rho c^3 R}\mathscr{R}\int_0^L \dot{g}\left[t-\frac{R}{c}-\xi\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\theta}{c}\right)\right]d\xi \\
&= \frac{m_0}{4\pi\rho c^2 R}\mathscr{R}\frac{F(\theta)}{L}\left[g\left(t-\frac{R}{c}\right)-g\left(t-\frac{R}{c}-\frac{L}{cF(\theta)}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中

$$
F(\theta)=\frac{1}{\dfrac{c}{v}-\cos\theta} \tag{8}
$$

称为调制因子,它对波的振幅起调制作用. 而 $g(t)$ 为震源时间函数,它的谱为 $\hat{G}(\omega)$.

下面对 (6) 式进行一些讨论.

1. $F(\theta)$ 对波幅的调制作用

对处于不同方位角的场点, 即当 θ 角不同时, $F(\theta)$ 值亦不同, 从而影响到位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 的大小. 由 (7) 式易见,当 $\theta=0$ 时,

$$
F(0)=\frac{1}{\dfrac{c}{v}-1}
$$

取最大值. 当 $\theta=\pi$ 时,

$$
F(\pi)=\frac{1}{\dfrac{c}{v}+1}
$$

取最小值. 也就是说,由于运动源的效果 (v 为有限值),使得顺着破裂传播方向的波的振幅变大, 背着破裂传播方向的波的振幅变小. 因而使波的辐射图案发生变化, 对 P 波由图 9.8 (a) 变成 (b), 对 S 波由 (c) 变成 (d). 由图 9.8 可以见到, S 波受到有限运动源的这种调制作用比 P 波更为强烈. 这是因为破裂速度比较接近于 S 波速度, 且因源在运动而使 S 波的加强作用最大的方向也正是原来 S 波的最大辐射方向, 而对 P 波则对应着原来的最小辐射方向.

2. 周期调制

(7) 式中 $g\left(t-\frac{R}{c}\right)-g\left(t-\frac{R}{c}-\frac{L}{cF(\theta)}\right)$ 为周期调制项. 为了更清楚地说明它对波的周期的调制作用,需要对震源时间函数(归一化的)作某些假定. 假定

$$
g(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t<0\\ 1 & \text{当 } t\geqslant 0,\end{cases} \tag{9}
$$

这时点源产生的位移场为脉冲函数 (即 δ 函数). 下面比较两种情况, 一种是假定有限长度的震源上的各点同时破裂, 另一种情况是假定震源为单侧有限移动破裂.

假定断层面上各处同时破裂（实际情况当然不是这样），则此种情况下产生的位移场可以在 (7) 式中令破裂传播速度 $v\to\infty$ 得到

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\frac{m_0}{4\pi\rho c^3RL}\mathscr{R}S(t,\theta), \tag{10}$$

其中

$$S(t,\theta)=\frac{g\left(t-\frac{R}{c}+\frac{L}{c}\cos\theta\right)-g\left(t-\frac{R}{c}\right)}{\cos\theta}. \tag{11}$$

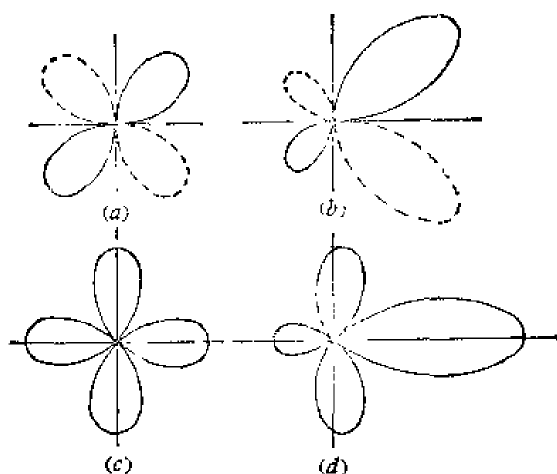


图 9.8

从 (11) 式可以看出，当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时，$S(t,\theta)\to\delta\left(t-\frac{R}{c}\right)$，这时与点源的效果是相同的. 当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，$S(t,\theta)$ 对时间的关系为一矩形脉冲，脉宽为$\frac{L|\cos\theta|}{c}$，脉高为$\frac{1}{|\cos\theta|}$，因此不管 θ 取什么值，$S(t,\theta)$ 对时间的函数关系是曲线下的面积保持为单位面积. 并且可以看到，当 $|\cos\theta|$ 越大时，脉冲宽度越大，幅度越低. 脉宽还与波走过断层长度方向的时间 $\frac{L}{c}$ 成正比. $S(t,\theta)$ 的脉宽和脉高与 θ 之间的关系见图 9.9(a)、(b).

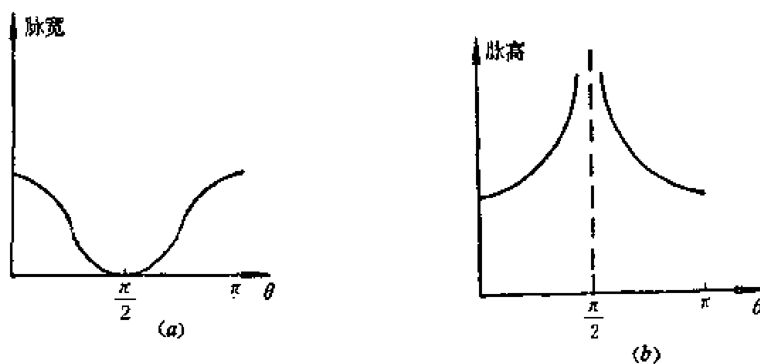


图 9.9 断层面上同时破裂时，地震波的脉宽、脉高与方位角 θ 之间的关系

对有限运动源情况，即 v 为有限时，位移的分布仍可用(10)式来表达，但此时 $S(t,\theta)$ 为

$$S(t,\theta)=\frac{1}{\frac{c}{v}-\cos\theta}\left\{g\left(t-\frac{R}{c}\right)-g\left[t-\frac{R}{c}-L\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\theta}{c}\right)\right]\right\}. \tag{12}$$

实际地震测量表明，破裂传播的速度 v 一般小于横波波速，因此有 $v<c$. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，得 $S\left(t,\frac{\pi}{2}\right)$ 与时间的关系为一矩形脉冲. 而当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，从 (12) 式可以看出，$S(t,\theta)$ 仍为一矩形脉冲，并且不管 θ 取什么值，$S(t,\theta)$ 对时间的关系是，在 $S(t,\theta)-t$ 图中曲线下的面积保持为单位面积. 与前面 $v\to\infty$ 情况不同的地方在于，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$S(t,\theta)$ 不是 δ 函数而是矩形脉冲，且脉宽就是破裂扩展经过整个断层的时间 $\frac{L}{v}$. 而当 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 减小时，也就是转向顺着破裂扩展的方向，这时波的脉宽变短，脉幅增大. 当 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 增大时，即转向背着破裂扩展的方向，这时波的脉宽变长，脉幅减小. 实际上这就是多普勒效应. 图 9.10 (a)、(b) 中给出了有限运动源情况下 $S(t,\theta)$ 的脉宽 τ 和脉幅 A 与 θ 之间的关系.

如果讨论的是辐射的 P 波，那末由于 $S(t,\theta)$ 的影响，在地震图上就构成了 P 波的初动半周期 $T_{1/2}$，有

$$T_{1/2}=L\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\theta}{\alpha}\right). \tag{13}$$

但是对于实际的地球介质，还要考虑震源附近、传播路径上及台站附近介质的影响，以及仪器的频率响应，这些将在第十五章中讨论. 注意，波的幅度除了受有限性因子 $S(t,\theta)$ 的影响外，还受到辐射因子 $\mathscr{R}$ 的影响 (见 (3) 式).

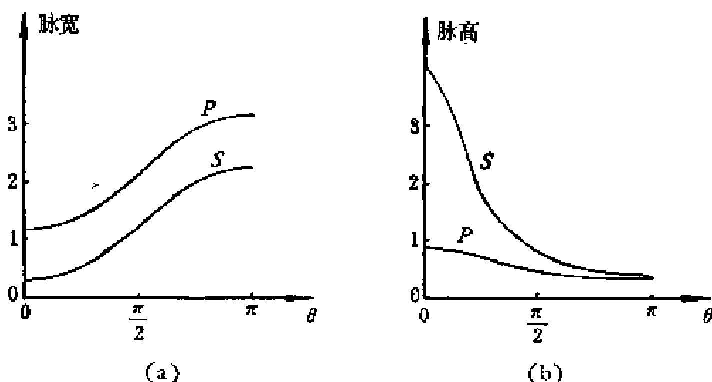


图 9.10　单侧有限移动源辐射体波位移的有限源因子 $S(t,\theta)$ 造成的脉宽 τ 和脉幅 A 与方位角 θ 之间的关系. ($v=0.8\beta$, $\alpha=\sqrt{3}\beta$)

二、矩形断层面双侧破裂

先讨论一般情况. 设破裂的起始点在断层上的某点，而不一定是在端部. 将坐标原点取在起始破裂点，设 $\theta=0$ 的方向 (图 9.7) 破裂扩展速度 v_1、破裂长度为 L_1，而 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 方向的破裂扩展速度为 v_2、破裂长度为 L_2，取 $v_1>0$，$v_2<0$. 断层总长度 $L=L_1+L_2$. 并记

$$a = \frac{m_0}{4\pi\rho c^3 R}. \tag{14}$$

则类似于得到 (6) 式的推导,双侧破裂的位移场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = a\mathscr{R}\frac{1}{L\left(\frac{1}{v_1} - \frac{\cos\theta}{c}\right)}\left[g\left(t - \frac{R}{c}\right) - g\left(t - \frac{R}{c} - L_1\left(\frac{1}{v_1} - \frac{\cos\theta}{c}\right)\right)\right] \\ + a\mathscr{R}\frac{-1}{L\left(\frac{1}{v_2} - \frac{\cos\theta}{c}\right)}\left[g\left(t - \frac{R}{c}\right) - g\left(t - \frac{R}{c}\right.\right. \\ \left.\left. + L_2\left(\frac{1}{v_2} - \frac{\cos\theta}{c}\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{15}$$

当破裂起始点在断层的中点,且破裂向两侧扩展的速度相同时,可在 (15) 式中令

$$L_1 = L_2 = \frac{L}{2}, \quad v = v_1 = -v_2,$$

得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = a\mathscr{R}\frac{1}{L\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\theta}{c}\right)}\left[g\left(t - \frac{R}{c}\right) - g\left(t - \frac{R}{c} - \frac{L}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\theta}{c}\right)\right)\right] \\ + a\mathscr{R}\frac{1}{L\left(\frac{1}{v} + \frac{\cos\theta}{c}\right)}\left[g\left(t - \frac{R}{c}\right) - g\right. \\ \left.\cdot\left(t - \frac{R}{c} - \frac{L}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{\cos\theta}{c}\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{16}$$

仍假定

$$g(t) = H(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t < 0, \\ 1 & \text{当 } t \geq 0. \end{cases} \tag{17}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,则 (16) 式化为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = a\mathscr{R}\frac{2}{\frac{L}{v}}\left[H\left(t - \frac{R}{c}\right) - H\left(t - \frac{R}{c} - \frac{1}{2}\frac{L}{v}\right)\right], \tag{18}$$

此时波形为一矩形脉冲,脉宽为 $\frac{1}{2}\frac{L}{v}$,为单侧破裂 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时脉宽的一半。

对 (16) 式,考察 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 时的情况,类似 (8) 式,令

$$\left.\begin{aligned}X^-(\theta) = L\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\theta}{c}\right), \\ X^+(\theta) = L\left(\frac{1}{v} + \frac{\cos\theta}{c}\right),\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

则对称双侧破裂的位移场 (16) 式可记为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = a\mathscr{R}\frac{1}{X^-(\theta)}\left[H\left(t - \frac{R}{c}\right) - H\left(t - \frac{R}{c} - \frac{1}{2}X^-(\theta)\right)\right]$$

$$+ a\mathscr{R}\frac{1}{X^+(\theta)}\left[H\left(t-\frac{R}{c}\right)-H\left(t-\frac{R}{c}-\frac{1}{2}X^+(\theta)\right)\right]. \tag{20}$$

当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，有 $X^+(\theta)>X^-(\theta)$，这时远场位移场的波形如图 9.11 所示．波形不再是规则的矩形．而此时脉宽为 $\frac{1}{2}X^+(\theta)$，脉高为 $a\mathscr{R}\left(\frac{1}{X^-(\theta)}+\frac{1}{X^+(\theta)}\right)$．当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，波形类似图 9.11，此时脉宽为 $X^-(\theta)$，脉高为

$$a\mathscr{R}\left(\frac{1}{X^-(\theta)}+\frac{1}{X^+(\theta)}\right).$$

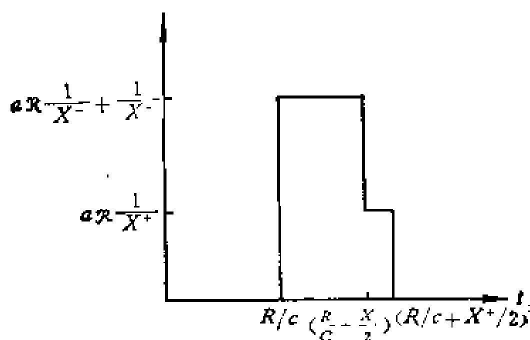


图 9.11　对称双侧破裂的远场位移波形

从 (19) 和 (20) 式可以看出

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\theta_0$$

和

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_0$$

方向的波形是一样的，从

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{X^-(\theta)}+\frac{1}{X^+(\theta)}\right)=0,$$

可以得到

$$\left(\frac{1}{X^-(\theta)}+\frac{1}{X^+(\theta)}\right)$$

的极大值在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处，其极小值在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 方向，由此可见，对称的双侧破裂使得沿断层走向的方向上波的幅度增加了．

如果讨论的是 P 波，则上述脉冲的宽度就相当于 P 波的初动半周期．上述讨论表明，对于对称双向破裂的情况，P 波初动半周期为

$$T_{1/2}=\frac{1}{2}\frac{L}{v}\left(1+\frac{v}{c}|\cos\theta|\right) \tag{21}$$

同单侧破裂情况一样，实际的地震图上的波形还受到传播介质和仪器频率响应等因素的影响．

由于上述的这种有限运动源的多普勒效应，使得在波幅增大的方向上不但位移增大，而且周期缩短，使地动的加速度大大增加，从而使地震烈度相应增高，也就是地震的破坏性增强．还可以用有限运动源多普勒效应判断断层面，并研究各种震源参数例如断层面的长度、破裂的方向和破裂速度等等，这些将在第十五章中详细讨论．

第十章　多层弹性半空间问题和兰姆问题

§ 10.1　多层弹性半空间中位错的静态位移场和应力张量场

在研究地震成因、震源参数以及地震预报等问题中，研究地震前后地面的形变场是一个重要方面. 这就首先要研究断层面位错的位移场和应力场，以及它们对地面的影响. 这种位错包括地震时断层面两侧岩石的突然相对错动和断层面的蠕变滑动.

前面 § 9.6 节中已给出了均匀各向同性的无限介质中位错的静态位移场和应力张量场的表达式. 但是在实际情况下，地下是由成层介质组成，它们在性质上有所差异，特别是自由界面即地表的影响更不容忽略. 例如可以把地壳看作一介质层，而把地幔看作弹性半空间. 再细分，地壳内的岩石又可分为若干层. 在平原地区，地表的表土层与岩石的性质差异很大，又应算作一层. 因此，为了更好地模拟实际情况，下面将讨论多层弹性半空间中位错的静态位移场和应力张量场.

敏德林 (Mindlin)[58] 在半无限介质中先求集中力的位移场，再用求微商的办法得到了多种力系的位移场. 前面 § 9.5 中已经证明无矩双力偶的影响场与剪切位错的影响场是完全等效的，同样也找到了与张裂位错等效的力系. 斯特凯梯 (Steketee)[59] 和丸山卓男 (Maruyama)[60] 用喀勒金 (Galerkin) 向量的方法研究了弹性半空间中的位错的静态位移场和应力张量场. 但是喀勒金向量的方法只能用来解决半无限空间等较简单的问题. 本·梅纳赫姆 (Ben-Menahem) 和辛格 (Singh)[61] 利用汉森向量研究了单层加弹性半空间中的位错的静态位移场. 本节中将用汉森向量解结合哈斯克尔 (Haskell) 矩阵法研究多层弹性半空间中位错的静态位移场和应力张量场. 所给出的求解过程和结果的表达形式与辛格[62]的略有不同，但无本质差异.

一、向量拉普拉斯方程的汉森向量解

考察向量拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

的三个独立的向量解. 要求用类似 § 5.4 (12) 的形式给出这些解. 假定所取坐标系仍适合附录二中所述条件，即对 $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ 曲线坐标系，其度规因子 h_1 = 常数，h_2/h_3 与 ξ_1 无关，令

$$h_2 h_3 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1),$$

则应有 $f_1 = 1$ 或 ξ_1^2. 再考察如下向量

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \nabla\phi \\ \boldsymbol{N} &= \nabla\times\nabla\times(\chi\boldsymbol{e}_1) \\ \boldsymbol{M} &= \nabla\times(\chi\boldsymbol{e}_1), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

先讨论 $\boldsymbol{N}$. 令 $\chi = \varepsilon\phi$，当坐标系适合条件 $f_1 = 1$ 时，取 $\varepsilon = 1$；当坐标系适合条件 $f_1 = \xi_1^2$ 时，取 $\varepsilon = \xi_1$. 由附录二中 (9) 式可知有

$$\nabla\times\nabla\times(\chi\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{h_1}\nabla\left(\frac{\partial\varepsilon\phi}{\partial\xi_1}\right) - \boldsymbol{e}_1\varepsilon\nabla^2\phi. \tag{3}$$

取 ϕ 为标量拉氏方程的解，即 $\nabla^2\phi=0$，则

$$N=\nabla\times\nabla\times(\chi e_1)=\frac{1}{h_1}\nabla\left(\frac{\partial\chi}{\partial\xi_1}\right). \tag{4}$$

可以看出，此时 N 是一个梯度场，也就是与 L 完全相似，事实上 N 应该就是 L 的线性组合，因此 N 和 L 不再是相互独立的解．从 (2) 及 (4) 式得知，M 的散度为零，因为要求 ϕ 是标量拉氏方程的解，因此有 $\nabla\cdot L=\nabla^2\phi=0$.

因此我们现在有两组独立解 N(或 L) 以及 M，其中 M 有非零旋度和零散度，而 N 有零旋度和零散度.

为找出第三个独立向量解，可考察向量 χe_1，此处 χ 是标量拉氏方程的解，而 e_1 是沿坐标轴 e_z、e_x 或 e_y 的单位向量．显然 χe_1 是向量拉氏方程 (1) 的解．一般它有着非零散度，并且一般它的旋度也不为零．当然我们也可取 χe_1 和 N 或 M 的线性组合作为第三个独立向量解．如果坐标系为柱坐标系，则可以这样来取三个基本向量解：

$$\left.\begin{aligned}N_m^{\pm}&=\frac{1}{k}\nabla\chi_m^{\pm}\\ M_m^{\pm}&=\frac{1}{k}\nabla\times(\chi_m^{\pm}e_z)\\ G_m^{\pm}&=\pm 2\chi_m^{\pm}e_z-N_m^{\pm}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

这里 $\chi_m^{\pm}$ 应为标量拉氏方程

$$\nabla^2\chi_m^{\pm}=0 \tag{6}$$

的解．$\chi_m^{\pm}$ 在柱坐标系中的基本解为

$$\chi_m^{\pm}=J_m(kr)e^{im\varphi\pm kz}, \tag{7}$$

其中 $J_m(kr)$ 为 m 阶贝塞尔函数，m 为正整数.

二、静态弹性平衡方程的汉森向量解

不考虑体力，因为一般它不随时间变化，它只起了恒定的影响作用，所以经常可以把它略去．由于考虑静态问题，显然 $\frac{\partial}{\partial t}$ 为零．因此 § 3.5 (7) 式表达的拉梅运动方程化为

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u+\mu\nabla^2 u=0. \tag{8}$$

其基本向量解除可取 $N_m^{\pm}$ 及 $M_m^{\pm}$ 之外，发现 $G_m^{\pm}$ 已不再是静态弹性平衡方程的解．可取

$$F_m^{\pm}=G_m^{\pm}+CzN_m^{\pm} \tag{9}$$

将 (9) 式代入 (8) 式后可定出常数 c，得 $c=\mp 2\delta k$．其中

$$\delta=\frac{1}{3-4\nu}, \tag{10}$$

而 ν 为泊松比．因此现在 $F_m^{\pm}$ 适合方程 (8)．$F_m^{\pm}$ 的散度和旋度一般都不为零，显然 $F_m^{\pm}$ 不会是 $N_m^{\pm}$ 和 $M_m^{\pm}$ 的线性组合．即 $F_m^{\pm}$ 是线性独立的第三解.

因此，在柱坐标中，弹性方程 (8) 的基本解可取为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N}_m^{\pm} &= \frac{1}{k}\nabla\chi_m^{\pm}, \\ \boldsymbol{M}_m^{\pm} &= \frac{i}{k}\nabla\times(\chi_m^{\pm}\boldsymbol{e}_z), \\ \boldsymbol{F}_m^{\pm} &= \pm 2\chi_m^{\pm}\boldsymbol{e}_z \mp 2\delta kz\boldsymbol{N}_m^{\pm}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这里 $\chi_m^{\pm}$ 应为标量拉氏方程(6)的解. $\chi_m^{\pm}$ 在柱坐标中的基本解系仍可用(7)式来表达. 将(7)式代入(11)式可以得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N}_m^{\pm} &= \frac{1}{k}\left[\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)\boldsymbol{e}_r + \frac{im}{r}J_m(kr)\boldsymbol{e}_\varphi \pm kJ_m(kr)\boldsymbol{e}_z\right]e^{im\varphi\pm kz}, \\ \boldsymbol{M}_m^{\pm} &= \frac{i}{k}\left[\frac{im}{r}J_m(kr)\boldsymbol{e}_r - \frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)\boldsymbol{e}_\varphi\right]e^{im\varphi\pm kz}, \\ \boldsymbol{F}_m^{\pm} &= \left[\mp 2\delta z\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)\boldsymbol{e}_r \mp 2\delta z\frac{im}{r}J_m(kr)\boldsymbol{e}_\varphi \pm 2(1\mp\delta kz)J_m(kr)\boldsymbol{e}_z\right]e^{im\varphi\pm kz}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

如果引入向量 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$, 令它们为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_m &= \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)e^{im\varphi}\boldsymbol{e}_r + \frac{im}{kr}J_m(kr)e^{im\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \\ \boldsymbol{P}_m &= J_m(kr)e^{im\varphi}\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{C}_m &= -\frac{m}{kr}J_m(kr)e^{im\varphi}\boldsymbol{e}_r - \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)e^{im\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

则(12)式中的 $\boldsymbol{N}_m^{\pm}$、$\boldsymbol{M}_m^{\pm}$、$\boldsymbol{F}_m^{\pm}$ 可用 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来表达:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{N}_m^{\pm} &= (\boldsymbol{B}_m \pm \boldsymbol{P}_m)e^{\pm kz}, \\ \boldsymbol{F}_m^{\pm} &= [(\pm 1 - 2\delta kz)\boldsymbol{P}_m - (1\pm 2\delta kz)\boldsymbol{B}_m]e^{\pm kz}, \\ \boldsymbol{M}_m^{\pm} &= \boldsymbol{C}_m e^{\pm kz}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由(13)式可证 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 之间构成正交向量组, 因此由(14)式易证 $\boldsymbol{N}_m^{+}$、$\boldsymbol{M}_m^{+}$、$\boldsymbol{F}_m^{+}$ 之间,以及 $\boldsymbol{N}_m^{-}$、$\boldsymbol{M}_m^{-}$、$\boldsymbol{F}_m^{-}$ 之间也构成正交向量组.

三、位移场和应力场的表达式

显然,弹性方程的一般解可以表达为

$$\boldsymbol{u} = \sum_m \int_0^\infty \boldsymbol{U}^m k\,dk, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{U}^m$ 可以是由(14)式所表达的 $\boldsymbol{N}_m^{\pm}$、$\boldsymbol{F}_m^{\pm}$ 及 $\boldsymbol{M}_m^{\pm}$ 的线性组合. 由所求问题的边界条件可以确定组合的系数. 我们用下式来表达 $\boldsymbol{U}^m$:

$$\boldsymbol{U}^m = a_m^+\boldsymbol{N}_m^+ + a_m^-\boldsymbol{N}_m^- + b_m^+\boldsymbol{F}_m^+ + b_m^-\boldsymbol{F}_m^- + c_m^+\boldsymbol{M}_m^+ + c_m^-\boldsymbol{M}_m^-. \tag{16}$$

将(14)式代入(16)式可得到用 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来表达 $\boldsymbol{U}^m$ 的式子:

$$\boldsymbol{U}^m = (f_{m1} - f_{m2} - 2\delta z f'_{m2})\boldsymbol{B}_m + \frac{1}{k}(f'_{m1} + f'_{m2} - 2\delta k^2 z f_{m2})\boldsymbol{P}_m + f_{m3}\boldsymbol{C}_m. \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} f_{m1} &= a_m^+e^{kz} + a_m^-e^{-kz}, \\ f_{m2} &= b_m^+e^{kz} + b_m^-e^{-kz}, \\ f_{m3} &= c_m^+e^{kz} + c_m^-e^{-kz}, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{m1} &= \frac{df_{m1}}{dz} = k(a_m^+ e^{kz} - a_m^- e^{-kz}), \\ f'_{m2} &= \frac{df_{m2}}{dz} = k(b_m^+ e^{kz} - b_m^- e^{-kz}), \\ f'_{m3} &= \frac{df_{m3}}{dz} = k(c_m^+ e^{kz} - c_m^- e^{-kz}). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

应力张量 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u})$ 与位移场 $\boldsymbol{u}$ 的关系对于均匀各向同性介质为

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{I} \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \mu(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla). \tag{19}$$

因此由 (15) 式得 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u})$ 可表达为

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}) = \sum_m \int_0^\infty \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m) k dk. \tag{20}$$

$\boldsymbol{e}_z$ 方向上的应力 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m) \cdot \boldsymbol{e}_z$ 可由 (17) 式代入 (19) 式得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m) \cdot \boldsymbol{e}_z &= 2\mu(f'_{m1} - \delta f'_{m2} - 2\delta k^2 z f_{m2}) \boldsymbol{B}_m \\ &+ 2\mu k(f_{m1} + \delta f_{m2} - 2\delta z f'_{m2}) \boldsymbol{P}_m + \mu f'_{m3} \boldsymbol{C}_m. \end{aligned} \tag{21}$$

(17) 式和 (21) 式便是位移场和 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的应力场的一般表达式. 利用 (15) 式和 (20) 式可求出总位移场 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的总应力场 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{e}_z$.

四、无限弹性空间中位错点源的静态位移场

前面 § 9.6 (12) 式已给出了无限弹性空间中位错源的静态位移场为

$$u^i(\boldsymbol{x}, t) = \int_\Sigma [u_k] \tau^i_{kl} \nu_l d\Sigma. \tag{22}$$

其中 $[u_k]$ 为位错向量, ν_l 为位错面面元法线方向单位向量, τ^i_{kl} 为位错点源的静态位移场的积分核. 注意以上各量都是向量或张量在直角坐标系中的分量表达式. 由 § 9.6 (19) 式知

$$\tau^i_{kl} = \frac{1}{4\pi}\left[(1-\gamma)\left(-\frac{R_i}{R^3}\delta_{kl} + \frac{R_k}{R^3}\delta_{il} + \frac{R_l}{R^3}\delta_{ki}\right) + 3\gamma \frac{R_i R_k R_l}{R^5}\right]. \tag{23}$$

引入 T^i_{kl}, 令

$$\tau^i_{kl} = \int_0^\infty T^i_{kl} k dk, \tag{24}$$

并且记

$$\boldsymbol{T}_{kl} = T^i_{kl} \boldsymbol{e}_i. \tag{25}$$

下面设法把 $\boldsymbol{T}_{kl}$ 投影到 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 上去, 即用 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 的线性组合 ($m = 0, 1, 2, \cdots$) 来表达 $\boldsymbol{T}_{kl}$.

由贝塞尔函数的积分公式知有

$$\int_0^\infty J_n(kr) e^{-k|z|} dk = \frac{(\sqrt{z^2 + r^2} - z)^n}{r^n \sqrt{z^2 + r^2}}, \tag{26}$$

并有

$$R = \sqrt{z^2 + r^2} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|. \tag{27}$$

在 (26) 式中令 $n = 0$、1、2, 并对积分式求 $\frac{\partial}{\partial z}$ 后可得到下面一些结果:

$$
\left.\begin{aligned}
I_0^0 &= \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(kr)\,dk = \frac{1}{R},\\
I_0^1 &= \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_0(kr)\,dk = \frac{\epsilon z}{R^3},\\
I_0^2 &= \int_0^\infty k^2 e^{-k|z|} J_0(kr)\,dk = \frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3},\\
I_1^0 &= \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(kr)\,dk = \frac{R - \epsilon z}{rR},\\
I_1^1 &= \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_1(kr)\,dk = \frac{r}{R^3},\\
I_1^2 &= \int_0^\infty k^2 e^{-k|z|} J_1(kr)\,dk = 3\epsilon \frac{rz}{R^5},\\
I_2^0 &= \int_0^\infty e^{-k|z|} J_2(kr)\,dk = \frac{(R - \epsilon z)^2}{r^2 R},\\
I_2^1 &= \int_0^\infty k e^{-k|z|} J_2(kr)\,dk = \frac{(R - \epsilon z)^2(2R + \epsilon z)}{r^2 R^3},\\
I_2^2 &= \int_0^\infty k^2 e^{-k|z|} J_2(kr)\,dk = 3\frac{r^2}{R^5}.
\end{aligned}\right\} \tag{28}
$$

其中

$$
\epsilon = \begin{cases} 1 & 当 z > 0 时,\\ -1 & 当 z < 0 时. \end{cases} \tag{29}
$$

为了简化表达式，在(26)—(29)式以及以下的一些表达式中都已令 $\xi_z = 0$，也就是令位错点源在 $z = 0$ 的平面上．对于 $\xi_z \neq 0$，也就是位错点源在 $z = \xi_z$ 平面上的情况，只要在这些公式中把 z 改写成 $(z - \xi_z)$ 就行了．

下面设法将 $\boldsymbol{T}_{kl}$ 按 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来投影．我们将以 (kl) 取为(12)的情况(走向滑动)为例进行计算．对于 (kl) 取其它值的情况，推导是类似的，因此将只写出最后结果．

由(23)式，令 $k = 1, l = 2$，可得

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{12}^1 &= \frac{1}{4\pi}\left[(1-\gamma)\frac{R_2}{R^3} + 3\gamma\frac{R_1^2 R_2}{R^5}\right]\\
&= \frac{1-\gamma}{4\pi}\frac{r}{R^3}\sin\varphi + \frac{3\gamma}{4\pi}\frac{r^3}{R^5}\cos^2\varphi\sin\varphi\\
&\overset{由(28)}{=\!=\!=} \frac{1-\gamma}{4\pi} I_1^1 \sin\varphi + \frac{\gamma}{4\pi} r I_2^2 \cos^2\varphi\sin\varphi,\\
\tau_{12}^2 &= \frac{1-\gamma}{4\pi} I_1^1 \cos\varphi + \frac{\gamma}{4\pi} r I_2^2 \sin^2\varphi\cos\varphi,\\
\tau_{12}^3 &= \frac{1}{8\pi}\gamma z I_2^2 \sin 2\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{30}
$$

其中 I_1^1 及 I_2^2 的表达式可见(28)式．

为了计算和表达方便，下面把 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$ 都改写成相应的复数，使其实部为 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$，这样我们在求得最后结果后只要再取实部，就可得到所求结果．因此有

$$\left.\begin{aligned} \sin m\varphi &\to -ie^{im\varphi}, \\ \cos m\varphi &\to e^{im\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

由 (25) 式我们有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{12} &= T_{12}^1\boldsymbol{e}_1 + T_{12}^2\boldsymbol{e}_2 + T_{12}^3\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{T}_{12} &= T_{12}^r\boldsymbol{e}_r + T_{12}^\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + T_{12}^z\boldsymbol{e}_z. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

由 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 的关系可得

$$\left.\begin{aligned} T_{12}^r &= T_{12}^1\cos\varphi + T_{12}^2\sin\varphi, \\ T_{12}^\varphi &= -T_{12}^1\sin\varphi + T_{12}^2\cos\varphi, \\ T_{12}^z &= T_{12}^3. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

把 (28) 式中的 I_1^1、I_2^2 的表达式代入 (30) 式中，并与 (24) 式相比较就可以求得 T_{12}^1、T_{12}^2 和 T_{12}^3 的表达式. 将它们代入 (33) 式中，并利用 (31) 式将 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$ 都改写成指数形式，可得

$$\left.\begin{aligned} T_{12}^r &= \frac{-i}{8\pi}e^{i2\varphi-k|z|}\left[(2-\gamma-\epsilon\gamma kz)\frac{\partial}{\partial r}J_2(kr) + \frac{4}{kr}J_2(kr)\right], \\ T_{12}^\varphi &= \frac{1}{4\pi}e^{i2\varphi-k|z|}\left[(2-\gamma-\epsilon\gamma kz)\frac{1}{kr}J_2(kr) + \frac{\partial}{\partial r}J_2(kr)\right], \\ T_{12}^z &= \frac{-i}{8\pi}e^{i2\varphi-k|z|}\gamma kzJ_2(kr). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

将 (34) 式代入 (32) 式，并利用 (13) 式给出的 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 与 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的关系，就可以最后得到 $\boldsymbol{T}_{12}$ 用 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来表示的式子：

$$\boldsymbol{T}_{12} = \frac{1}{8\pi}e^{-k|z|}\{-i[2-\gamma-\epsilon\gamma kz]\boldsymbol{B}_2 - i\gamma kz\boldsymbol{P}_2 + i2\boldsymbol{C}_2\}.$$

对 $\boldsymbol{T}_{kl}$ 的其它各量可用类似方法得到. 在写出这些式子时，我们令位错点源在 $z = \xi_z = h$ 的平面上，最后得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{11} &= \frac{1}{8\pi}e^{-k|z-h|}\{\gamma[-3+\epsilon k(z-h)]\boldsymbol{B}_0 + [2-\gamma-\epsilon\gamma k(z-h)]\boldsymbol{B}_2 \\ &\quad - [2\epsilon(1-2\gamma)+\gamma k(z-h)]\boldsymbol{P}_0 + \gamma k(z-h)\boldsymbol{P}_2 - 2\boldsymbol{C}_2\}, \\ \boldsymbol{T}_{22} &= \frac{1}{8\pi}e^{-k|z-h|}\{\gamma[-3+\epsilon k(z-h)]\boldsymbol{B}_0 - [2-\gamma-\epsilon\gamma k(z-h)]\boldsymbol{B}_2 \\ &\quad - [2\epsilon(1-2\gamma)+\gamma k(z-h)]\boldsymbol{P}_0 - \gamma k(z-h)\boldsymbol{P}_2 + 2\boldsymbol{C}_2\}, \\ \boldsymbol{T}_{33} &= \frac{1}{4\pi}e^{-k|z-h|}\{[1-\gamma-\epsilon\gamma k(z-h)]\boldsymbol{B}_0 + [\epsilon+\gamma k(z-h)]\boldsymbol{P}_0\}, \\ \boldsymbol{T}_{23} &= \frac{1}{4\pi}e^{-k|z-h|}\{i[\gamma k(z-h)-\epsilon]\boldsymbol{B}_1 - i[1-\gamma \\ &\quad + \epsilon\gamma k(z-h)]\boldsymbol{P}_1 + i\epsilon\boldsymbol{C}_1\}, \\ \boldsymbol{T}_{31} &= \frac{1}{4\pi}e^{-k|z-h|}\{-[\gamma k(z-h)-\epsilon]\boldsymbol{B}_1 + [1-\gamma \\ &\quad + \epsilon\gamma k(z-h)]\boldsymbol{P}_1 - \epsilon\boldsymbol{C}_1\}, \\ \boldsymbol{T}_{12} &= \frac{1}{8\pi}e^{-k|z-h|}\{-i[2-\gamma-\epsilon\gamma k(z-h)]\boldsymbol{B}_2 \\ &\quad - ik\gamma(z-h)\boldsymbol{P}_2 + i2\boldsymbol{C}_2\}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$\boldsymbol{T}_{kl}$ 为无穷介质中位错点源的静态位移场的积分核，它本身的物理意义是位移场，所以它应满足静态的位移方程(8)式. 因此它应该也能写成(17)式那样的形式，即有

$$\boldsymbol{T}_{kl} = [X_{m1} - X_{m2} - 2\delta(z-h)X'_{m2}]\boldsymbol{B}_m + \frac{1}{k}[X'_{m1} + X'_{m2} - 2\delta k^2(z-h)X_{m2}]\boldsymbol{P}_m + X_{m3}\boldsymbol{C}_m. \tag{36}$$

比较(35)式和(36)式就可得到(36)式中的 X_{m1}、X_{m2}、X_{m3} 为

$$\left.\begin{aligned} X_{m1} &= e^m i_m e^{-k|z-h|}, \\ X_{m2} &= e^m j_m e^{-k|z-h|}, \\ X_{m3} &= e^m k_m e^{-k|z-h|}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

其中 $m=0$、1、2，而对不同的位错源，也就是当 (kl) 取不同值时，i_m、j_m、k_m 的值由表10.1给出.

表 10.1 i_m、j_m、k_m 的值

	(11)	(22)	(33)	(23)	(31)	(12)	(11)+(22)+(33)
i_0	$\frac{1}{8\pi}\frac{1-6\delta}{1+\delta}$	$\frac{1}{8\pi}\frac{1-6\delta}{1+\delta}$	$-\frac{1}{4\pi}\frac{\delta}{1+\delta}$	0	0	0	$-\frac{1}{4\pi}\frac{7\delta-1}{1+\delta}$
j_0	$\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	$\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{1+\delta}$	0	0	0	0
k_0	0	0	0	0	0	0	0
i_1	0	0	0	$-\frac{i}{4\pi}\frac{\delta}{1+\delta}$	$\frac{1}{4\pi}\frac{\delta}{1+\delta}$	0	0
j_1	0	0	0	$\frac{i}{4\pi}\frac{1}{1+\delta}$	$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{1+\delta}$	0	0
k_1	0	0	0	$\frac{i}{4\pi}$	$-\frac{1}{4\pi}$	0	0
i_2	$\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	$-\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	0	0	0	$-\frac{i}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	0
j_2	$-\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	$\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	0	0	0	$\frac{i}{8\pi}\frac{1}{1+\delta}$	0
k_2	$-\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	0	0	0	$\frac{i}{4\pi}$	0

表中

$$\delta = \frac{1}{3-4\nu} = \frac{\gamma}{2-\gamma}, \tag{38}$$

而 ν 为泊松比.

对比无穷介质中位错源的位移场的积分核的表达式(36)与介质中位移场的一般表达式(17)，可见两者的形式完全一致，因此它们的 z 方向的应力表达式也应一致. 对比(21)式可知，无限介质中位错点源的 z 向应力向量的积分核为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}_{kl})\cdot\boldsymbol{e}_z = 2\mu[X'_{m1} - \delta X'_{m2} - 2\delta k^2(z-h)X_{m2}]\boldsymbol{B}_m + 2\mu k[X_{m1} + \delta X_{m2} - 2\delta(z-h)X'_{m2}]\boldsymbol{P}_m + \mu X'_{m3}\boldsymbol{C}_m. \tag{39}$$

(36)式和(39)式便是均匀各向同性的无限介质中位错点源的位移场积分核和 z 方

向的应力场积分核. 将它们分别乘以 kdk, 并对 k 从零积分到∞后再代入(22)式中取代 τ_{kl}^{i}, 对位错面Σ积分后便得到无穷介质中Σ位错面上的位错的位移场和 z 方向的应力场.

五、振幅向量,位移应力向量和层矩阵

设在半无穷介质上有多层平行介质层,如图 10.1 所示. 引入柱坐标系,使 $\boldsymbol{e}_z$ 轴垂直于介质间的分界面和自由表面,$\boldsymbol{e}_z$ 的正方向是从自由表面指向介质内部的方向.因此 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 平行于分界面和自由表面. 并且 $z=0$ 取在自由表面上.

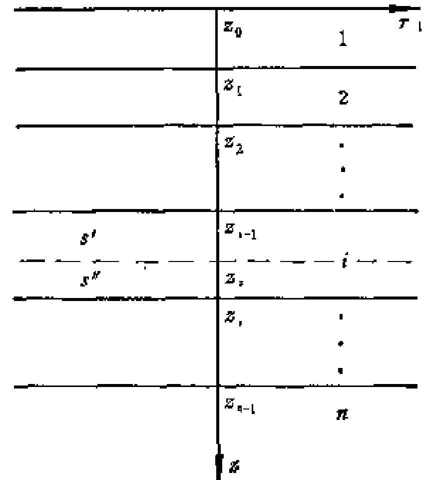


图 10.1 多层弹性半空间

同平面波问题一样(§ 5.4),为使量纲整齐,可把 $\boldsymbol{U}^m$ 和 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m)\cdot\boldsymbol{e}_z$ 记作 $k\boldsymbol{U}^m$ 和 $\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m)\cdot\boldsymbol{e}_z$, 其中 μ_1 为多层弹性半空间中第一层介质的剪切模量. $\boldsymbol{U}^m$ 和 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m)\cdot\boldsymbol{e}_z$ 的表达式已由(17)式和(21)式给出,将(18)式代入(17)和(21)式可得

$$\left.\begin{aligned}
&k\boldsymbol{U}^m = kU_B^m\boldsymbol{B}_m + kU_P^m\boldsymbol{P}_m + kU_C^m\boldsymbol{C}_m,\\
&\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m)\cdot\boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\mu_1}\tau_B^m\boldsymbol{B}_m + \frac{1}{\mu_1}\tau_P^m\boldsymbol{P}_m\\
&\qquad + \frac{1}{\mu_1}\tau_C^m\boldsymbol{C}_m,
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
kU_B^m &= k\,\mathrm{ch}\,kz(a_m^+ + a_m^-) + k\,\mathrm{sh}\,kz(a_m^+ - a_m^-) - (k\,\mathrm{sh}\,kz\\
&\quad + 2\delta k^2z\,\mathrm{ch}\,kz)(b_m^+ - b_m^-) - (k\,\mathrm{ch}\,kz + 2\delta k^2z\,\mathrm{sh}\,kz)(b_m^+ + b_m^-),\\
kU_P^m &= k\,\mathrm{sh}\,kz(a_m^+ + a_m^-) + k\,\mathrm{ch}\,kz(a_m^+ - a_m^-) + (k\,\mathrm{ch}\,kz\\
&\quad - 2\delta k^2z\,\mathrm{sh}\,kz)(b_m^+ - b_m^-) + (k\,\mathrm{sh}\,kz - 2\delta k^2z\,\mathrm{ch}\,kz)(b_m^+ + b_m^-),\\
kU_C^m &= k\,\mathrm{ch}\,kz(c_m^+ + c_m^-) + k\,\mathrm{sh}\,kz(c_m^+ - c_m^-),\\
\frac{1}{\mu_1}\tau_B^m &= 2k\frac{\mu}{\mu_1}\mathrm{sh}\,kz(a_m^+ + a_m^-) + 2k\frac{\mu}{\mu_1}\mathrm{ch}\,kz(a_m^+ - a_m^-) - 2k\frac{\mu}{\mu_1}(\delta\,\mathrm{ch}\,kz\\
&\quad + 2\delta kz\,\mathrm{sh}\,kz)(b_m^+ - b_m^-) - 2k\frac{\mu}{\mu_1}(\delta\,\mathrm{sh}\,kz + 2\delta kz\,\mathrm{ch}\,kz)(b_m^+ + b_m^-),\\
\frac{1}{\mu_1}\tau_P^m &= 2k\frac{\mu}{\mu_1}\mathrm{ch}\,kz(a_m^+ + a_m^-) + 2k\frac{\mu}{\mu_1}\mathrm{sh}\,kz(a_m^+ - a_m^-) + 2k\frac{\mu}{\mu_1}(\delta\,\mathrm{sh}\,kz\\
&\quad - 2\delta kz\,\mathrm{ch}\,kz)(b_m^+ - b_m^-) + 2k\frac{\mu}{\mu_1}(\delta\,\mathrm{ch}\,kz - 2\delta kz\,\mathrm{sh}\,kz)(b_m^+ + b_m^-),\\
\frac{1}{\mu_1}\tau_C^m &= k\frac{\mu}{\mu_1}\mathrm{sh}\,kz(c_m^+ + c_m^-) + k\frac{\mu}{\mu_1}\mathrm{ch}\,kz(c_m^+ - c_m^-).
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

引入幅度列向量 $\boldsymbol{K}^m$, 其转置 $\boldsymbol{K}^{mT}$ 为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^{mT} = [&k(a_m^+ + a_m^-),\ k(a_m^+ - a_m^-),\ k(b_m^+ - b_m^-),\ k(b_m^+ + b_m^-),\\
&k(c_m^+ + c_m^-),\ k(c_m^+ - c_m^-)].
\end{aligned} \quad (42)$$

为了与平面波的情况(§ 5.4)一致,所以在 $\boldsymbol{K}^m$ 中将其分量按(42)式的次序排列,这样(42)式与§ 5.4 (29)式完全相似.

再引入位移应力向量 $\boldsymbol{H}^m$，其转置 $\boldsymbol{H}^{mT}$ 为

$$\boldsymbol{H}^{mT}=\left[kU_B^m,\ kU_P^m,\ \frac{1}{\mu_1}\tau_P^m,\ \frac{1}{\mu_1}\tau_B^m,\ kU_C^m,\ \frac{1}{\mu_1}\tau_C^m\right]. \tag{43}$$

将 (43) 式与平面波情况定义的 $\boldsymbol{H}$ 从而 $\boldsymbol{H}^T$ 的表达式 § 5.4(28) 式相比较，可以发现它们也完全相似。

由 (41) 式和 $\boldsymbol{K}^m$、$\boldsymbol{H}^m$ 的定义 (42)、(43) 式可知有

$$\boldsymbol{H}^m=\boldsymbol{D}(z)\cdot\boldsymbol{K}^m. \tag{44}$$

如果简记

$$C_z=\operatorname{ch}kz,\quad S_z=\operatorname{sh}kz,$$
$$q=2\frac{\mu}{\mu_1},\qquad \eta_z=2\delta kz, \tag{45}$$

则 $\boldsymbol{D}(z)$ 可由如下矩阵给出

$$\boldsymbol{D}(z)=\begin{bmatrix} C_z & S_z & -S_z-\eta_zC_z & -C_z-\eta_zS_z & 0 & 0\\ S_z & C_z & C_z-\eta_zS_z & S_z-\eta_zC_z & 0 & 0\\ qC_z & qS_z & q\delta S_z-q\eta_zC_z & q\delta C_z-q\eta_zS_z & 0 & 0\\ qS_z & qC_z & -q\delta C_z-q\eta_zS_z & -q\delta S_z-q\eta_zC_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_z & S_z\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{2}S_z & \frac{q}{2}C_z \end{bmatrix}. \tag{46}$$

由 $\boldsymbol{D}(z)$ 的形式可见，它与平面波情况一样 (§ 5.4 (31))，它也是准对角矩阵，它可分为一个四阶方阵和一个二阶方阵。由准对角矩阵的性质并结合 (42)—(44) 式可知，$\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$ 方向的位移和 z 向面上的应力在 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$ 方向的分量与 $\boldsymbol{C}_m$ 方向的位移和 z 向面上的应力在 $\boldsymbol{C}_m$ 方向的分量是不相耦合的。

以上讨论的是多层弹性半空间的任意一层内的振幅向量和位移应力向量之间的关系式。讨论时令 z 轴的起始点即坐标原点取在该层的顶面上。设我们讨论的是第 i 层，令 d_i 为第 i 层的层厚，d_{i-1} 为第 $i-1$ 层的层厚。显然由于界面上的位移以及界面上的应力向量的连续性条件，第 i 层顶面的位移应力向量应与第 $i-1$ 层底部的位移应力向量相等，即应有

$$\boldsymbol{H}_i^m(0)=\boldsymbol{H}_{i-1}^m(d_{i-1}). \tag{47}$$

由此得

$$\boldsymbol{H}_{i-1}^m(d_{i-1})=\boldsymbol{H}_i^m(0)=\boldsymbol{D}_i(0)\cdot\boldsymbol{K}_i^m. \tag{48}$$

由 $\boldsymbol{D}_i(z)$ 的表达式 (46) 可得 $\boldsymbol{D}_i(0)$ 为

$$\boldsymbol{D}_i(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ q & 0 & 0 & q\delta & 0 & 0\\ 0 & q & -q\delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{2} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

令

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{D}_i(0). \tag{50}$$

则由 (48) 式可得

$$\boldsymbol{K}_i^m = \boldsymbol{E}_i^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{i-1}^m(d_{i-1}), \tag{51}$$

其中 $\boldsymbol{E}_i^{-1}$ 为 $\boldsymbol{E}_i$ 的逆矩阵，由 (49) 式可得

$$\boldsymbol{E}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{1+\delta} & 0 & \dfrac{1}{q(1+\delta)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\delta}{1+\delta} & 0 & \dfrac{1}{q(1+\delta)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\delta} & 0 & -\dfrac{1}{q(1+\delta)} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{1+\delta} & 0 & \dfrac{1}{q(1+\delta)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{2}{q} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

对于第 i 层的底部，可在 (44) 式中令 $z = d_i$ 得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_i^m(d_i) &= \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{K}_i^m = \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{E}_i^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{i-1}^m(d_{i-1}) \\ &= \boldsymbol{a}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{H}_{i-1}^m(d_{i-1}). \end{aligned} \tag{53}$$

可简记

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i(d_i) = \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{E}_i^{-1}. \tag{54}$$

由 $\boldsymbol{D}_i(z)$ 及 $\boldsymbol{E}_i^{-1}$ 的表达式 (46)、(52) 式，及 $\boldsymbol{a}_i$ 的定义 (54) 式得

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} C + \dfrac{\eta}{1+\delta} S & -\dfrac{1-\delta}{1+\delta} S - \dfrac{\eta}{1+\delta} C & -\dfrac{\eta}{q(1+\delta)} S & \dfrac{2}{q(1+\delta)} S + \dfrac{\eta}{q(1+\delta)} C & 0 & 0 \\ -\dfrac{1-\delta}{1+\delta} S + \dfrac{\eta}{1+\delta} C & C - \dfrac{\eta}{1+\delta} S & \dfrac{2}{q(1+\delta)} S - \dfrac{\eta}{q(1+\delta)} C & \dfrac{\eta}{q(1+\delta)} S & 0 & 0 \\ q\dfrac{\eta}{1+\delta} S & 2q\dfrac{\delta}{1+\delta} S - q\dfrac{\eta}{1+\delta} C & C - \dfrac{\eta}{1+\delta} S & \dfrac{1-\delta}{1+\delta} S + \dfrac{\eta}{1+\delta} C & 0 & 0 \\ 2q\dfrac{\delta}{1+\delta} S + q\dfrac{\eta}{1+\delta} C & -q\dfrac{\eta}{1+\delta} S & \dfrac{1-\delta}{1+\delta} S - \dfrac{\eta}{1+\delta} C & C + \dfrac{\eta}{1+\delta} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & C \end{bmatrix}. \tag{55}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} C &= C_z|_{z=d_i} = \operatorname{ch} kd_i, \\ S &= S_z|_{z=d_i} = \operatorname{sh} kd_i, \\ \eta &= 2\delta k d_i. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

$\boldsymbol{a}_i$ 反映了在静态情况下，位移和 z 向面上的应力的分量在层顶面的值和在层底面的值之间的关系，与平面波情况一样，$\boldsymbol{a}_i$ 称为第 i 层介质的层矩阵.

六、多层弹性半空间内位错的静态位移场

以上面所述为基础，下面讨论多层问题. 利用矩阵代数不难解决，但这里与平面波情况（§ 5.4）不同. 平面波情况源在无穷远处，即讨论在第 n 层的弹性半空间内有平面波入射的情况. 而这里，源可以在任何一层内. 设位错源在第 s 层内，位错面为 Σ，位错向量为 $[u_k(\boldsymbol{\xi})]$，ν_l 为位错面元的法线单位向量，$\tau^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 为多层弹性半空间的位错位移场的积分核，而位移场 $u^i(\boldsymbol{x})$ 为

$$u^i(x) = \int_\Sigma [u_k(\boldsymbol{\xi})]\tau^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\nu_l(\boldsymbol{\xi})d\Sigma_\xi. \tag{57}$$

因此，只要求得积分核 $\tau^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$，就可以从(57)式得到位移场. (57) 式中 k、l、i 均为直角坐标系的 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 方向的角标 1、2 或 3.

设位错源处于第 s 层中，并由许多位错元组成，由通过某一位错元的一水平面，把这一层分为上下两层，令上层为 s' 层，下层为 s'' 层. 设位错元离第 s 层顶面的距离为 h_s，即 s' 的层厚为 h_s，因此 s'' 的层厚为 $(d_s - h_s)$. 再设弹性半空间为第 n 层，在第 n 层内的振幅向量为 $\boldsymbol{K}^m_n$，由 (51) 式得

$$\boldsymbol{K}^m_n = \boldsymbol{E}^{-1}_n \cdot \boldsymbol{H}^m_{n-1}(d_{i-1}).$$

再由 $\boldsymbol{H}^m_i(d_i)$ 与 $\boldsymbol{H}^m_{i-1}(d_{i-1})$ 之间的关系式 (53) 可得

$$\boldsymbol{K}^m_n = \boldsymbol{E}^{-1}_n \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-2} \cdots \boldsymbol{a}_{s+1} \cdot \boldsymbol{a}_s(d_s - h_s) \cdot \boldsymbol{H}^m_s(h_s + 0), \tag{58}$$

其中 $\boldsymbol{H}^m_s(h_s + 0)$ 为正好在通过位错元的水平面下方的 $\boldsymbol{H}^m_s$ 值. 再令 $\boldsymbol{H}^m_s(h_s - 0)$ 为通过位错元的水平面的上方的 $\boldsymbol{H}^m_s$ 值. 由于位错源的间断性（奇异性），

$$\boldsymbol{H}^m_s(h_s + 0) \neq \boldsymbol{H}^m_s(h_s - 0).$$

类似于 (58) 式，可得到关系式

$$\boldsymbol{H}^m_s(h_s - 0) = \boldsymbol{a}_s(h_s) \cdot \boldsymbol{a}_{s-1} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{H}^m_1(0). \tag{59}$$

令

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{E}^{-1}_n \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-2} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{a}_{s+1} \cdot \boldsymbol{a}_s(d_s - h_s), \\ \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{a}_s(h_s) \cdot \boldsymbol{a}_{s-1} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

则 (58) 式和 (59) 式可记为

$$\boldsymbol{K}^m_n = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{H}^m_s(h_s + 0), \tag{61}$$

$$\boldsymbol{H}^m_s(h_s - 0) = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}^m_1(0). \tag{62}$$

令

$$\boldsymbol{S}^m = \boldsymbol{H}^m_s(h_s + 0) - \boldsymbol{H}^m_s(h_s - 0), \tag{63}$$

显见 $\boldsymbol{S}^m$ 与位错源密切联系，它反映了位错源的存在及其特性. 由 (61)—(63) 式可得

$$\boldsymbol{L}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}^m_n - \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}^m_1(0) = \boldsymbol{S}^m.$$

上式右乘矩阵 $\boldsymbol{L}$ 可得

$$\boldsymbol{K}^m_n - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{H}^m_1(0) = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}^m, \tag{64}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}^{-1}_n \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-2} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1. \tag{65}$$

由于第 n 层中位移振幅的有限性，必有第 n 层的振幅系数

$$a^+_{mn} = b^+_{mn} = c^+_{mn} = 0,$$

否则当 $z\to\infty$ 时，$a^{+}_{mn}e^{kz}$、$b^{+}_{mn}e^{kz}$、$c^{+}_{mn}e^{kz}$ 趋于 ∞. 所以 $\boldsymbol{K}^{m}_{n}$ 的转置 $\boldsymbol{K}^{mT}_{n}$ 为

$$\boldsymbol{K}^{mT}_{n}=[{}_ka^{-}_{mn},\ -{}_ka^{-}_{mn},\ -{}_kb^{-}_{mn},\ {}_kb^{-}_{mn},\ {}_kc^{-}_{mn},\ -{}_kc^{-}_{mn}]. \tag{66}$$

(66)式为第 n 层(半空间)内的振幅向量.

另外因为自由表面上应力为零,所以 $\boldsymbol{H}^{m}_{1}(0)$ 的转置 $\boldsymbol{H}^{mT}_{1}(0)$ 为

$$\boldsymbol{H}^{mT}_{1}(0)=[{}_kU^{m}_{B}(0),\ {}_kU^{m}_{P}(0),\ 0,\ 0,\ {}_kU^{m}_{C}(0),\ 0]. \tag{67}$$

将(66)、(67)式代入(64)式便可得

$$\left.\begin{aligned}
{}_ka^{-}_{mn}-J_{11}{}_kU^{m}_{B}(0)-J_{12}{}_kU^{m}_{P}(0)&=\sum_{i=1}^{4}L_{1i}S_i,\\
-{}_ka^{-}_{mn}-J_{21}{}_kU^{m}_{B}(0)-J_{22}{}_kU^{m}_{P}(0)&=\sum_{i=1}^{4}L_{2i}S_i,\\
-{}_kb^{-}_{mn}-J_{31}{}_kU^{m}_{B}(0)-J_{32}{}_kU^{m}_{P}(0)&=\sum_{i=1}^{4}L_{3i}S_i,\\
{}_kb^{-}_{mn}-J_{41}{}_kU^{m}_{B}(0)-J_{42}{}_kU^{m}_{P}(0)&=\sum_{i=1}^{4}L_{4i}S_i,\\
{}_kc^{-}_{mn}-J_{55}{}_kU^{m}_{C}(0)&=\sum_{i=5}^{6}L_{5i}S_i,\\
-{}_kc^{-}_{mn}-J_{65}{}_kU^{m}_{C}(0)&=\sum_{i=5}^{6}L_{6i}S_i.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

(68)中消去 a^{-}_{mn}、b^{-}_{mn}、c^{-}_{mn} 就可以解出自由表面的位移 ${}_kU^{m}_{B}(0)$、${}_kU^{m}_{P}(0)$、${}_kU^{m}_{C}(0)$，得

$$\left.\begin{aligned}
{}_kU^{m}_{B}(0)&=\frac{1}{F_R}\left[(J_{12}+J_{22})\sum_{i=1}^{4}(L_{3i}+L_{4i})S^{m}_{i}-(J_{32}+J_{42})\sum_{i=1}^{4}(L_{1i}+L_{2i})S^{m}_{i}\right],\\
{}_kU^{m}_{P}(0)&=\frac{1}{F_R}\left[(J_{31}+J_{41})\sum_{i=1}^{4}(L_{1i}+L_{2i})S^{m}_{i}-(J_{11}+J_{21})\sum_{i=1}^{4}(L_{3i}+L_{4i})S^{m}_{i}\right],\\
{}_kU^{m}_{C}(0)&=\frac{1}{F_L}\left[-\sum_{i=5}^{6}(L_{5i}+L_{6i})S^{m}_{i}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
F_R&=(J_{11}+J_{21})(J_{32}+J_{42})-(J_{12}+J_{22})(J_{31}+J_{41}),\\
F_L&=J_{55}+J_{65}.
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

只要知道各介质层的弹性常数和层厚,则 $\boldsymbol{a}_i$ 与 $\boldsymbol{E}^{-1}_{n}$ 都可以得到. 从(60)、(65)可知 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{J}$ 也可确定. 因此由(69)式知,只要知道了 S^{m}_{i}，就可得到自由表面的位移.

为求得 S^{m}_{i}，可看(63)式，知 S^{m}_{i} 为通过位错元的水平面下面和上面间的位移应力向量之差.这个差之所以出现正是由于位错元的存在造成的奇异性.因此,这个差 S^{m}_{i} 应等于位错元在无限介质中的位移应力场在同一水平面的下面和上面之差. 为求出后者，只要在(37)式中令 $z-h=+0$，然后将(37)式代入(36)和(39)式就可得到 $\boldsymbol{H}^{m\prime}(h_s+0)$ 的各个分量. 同样,令 $z-h=-0$ 代入(37)式后,再一起代入(36)式和(39)式就可得到 $\boldsymbol{H}^{m\prime}(h_s-0)$. 这里所以加上撇号是因为得到的 $\boldsymbol{H}^{m\prime}(h_s+0)$、$\boldsymbol{H}^{m\prime}(h_s-0)$ 并不是真正的 $\boldsymbol{H}^{m}$ 值,而只是能反映出位错源的奇异性的部分. 将 $\boldsymbol{H}^{m\prime}(h_s+0)$ 和 $\boldsymbol{H}^{m\prime}(h_s-0)$ 代入(63)式可得

$$\left.\begin{aligned}
S_1^m &= k(i_m - j_m)(1-(-)^m),\\
S_2^m &= -k(i_m + j_m)(1+(-)^m),\\
S_3^m &= qk(i_m + \delta j_m)(1-(-)^m),\\
S_4^m &= -qk(i_m - \delta j_m)(1+(-)^m),\\
S_5^m &= kk_m(1-(-)^m),\\
S_6^m &= -\frac{q}{2}kk_m(1+(-)^m).
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

这里将 $(-1)^m$ 写成 $(-)^m$，以使公式清晰.

当 (57) 式中的位错积分核 τ_{kl}^i 的角标 kl 取不同的值时，i_m、j_m、k_m 便相应地取不同的值，它们已由表 10.1 给出. 将其中的值分别代入 (71) 式后便可求得相应的 S_i^m 值. 这些值已在表 10.2 中给出.

由表 10.2 可见，S_i^m 的值或者取实数，或者取虚数. 当 S_i^m 的值为零时，便代表相应的 H_i^m 分量在通过位错源的水平面上连续；而 $S_i^0 = S_i^1 = S_i^2 = 0$ 便代表相应的 H_i 分量的连续性. 例如，对于走向滑动型位错，有 $(kl) = (12)$，这时 $S_1^0 = S_1^1 = S_1^2 = 0$. 它说明 U_B 分量在通过位错源的水平面上是连续的，即上、下是相同的. 同样有

$$S_2^0 = S_2^1 = S_2^2 = S_5^0 = S_5^1 = S_5^2 = 0.$$

因此对于走向滑动型位错，通过位错源的水平面的上面与下面的位移相同，不存在间断. 当 (kl) 确定后，便可在表 10.2 中找到对应的 S_i^m 值. 将它们代入 (69) 式便可得到相应的自由表面上的位移值 $U_B^m(0)$、$U_P^m(0)$ 和 $U_C^m(0)$ 来. 而

$$k\boldsymbol{U}^m(0) = kU_B^m(0)\boldsymbol{B}_m + kU_P^m(0)\boldsymbol{P}_m + kU_C^m(0)\boldsymbol{C}_m. \tag{72}$$

将 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 与 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的关系式 (13) 代入上式，便可得到 $k\boldsymbol{U}^m(0)$ 在 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 方向的分量，得

$$k\boldsymbol{U}^m(0) = kU_r^m(0)\boldsymbol{e}_r + kU_\varphi^m(0)\boldsymbol{e}_\varphi + kU_z^m(0)\boldsymbol{e}_z. \tag{73}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
kU_r^m(0) &= \left[kU_B^m(0)\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr) - kU_C^m(0)\frac{m}{kr}J_m(kr)\right]e^{im\varphi},\\
kU_\varphi^m(0) &= \left[kU_B^m(0)\frac{m}{kr}J_m(kr) - kU_C^m(0)\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)\right]ie^{im\varphi},\\
kU_z^m(0) &= kU_P^m(0)J_m(kr)e^{im\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

由 (31) 式可见，只要对 (74) 式取实部便可得到所求的 $\boldsymbol{U}^m(0)$ 值. 由表 10.2 可见，对一定的位错源类型，即当 (kl) 值取定时，所对应的 S_i^m 值或者全部取实数值，或者全部取虚数值.

由表 10.2 可见，当 $(kl) = (11)$、(22)、(33)、(31) 时，

$$S_i^m = \mathrm{Re}\, S_i^m, \tag{75}$$

则对 (74) 式取实部后可得

$$\left.\begin{aligned}
kU_r^m(0) &= \left[kU_B^m(0)\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr) - kU_C^m(0)\frac{m}{kr}J_m(kr)\right]\cos m\varphi,\\
kU_\varphi^m(0) &= -\left[kU_B^m(0)\frac{m}{kr}J_m(kr) - kU_C^m(0)\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)\right]\sin m\varphi,\\
kU_z^m(0) &= kU_P^m(0)J_m(kr)\cos m\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

表 10.2 位错源静态场的 S_i^n 值

	(kl)						
	(11)	(22)	(33)	(23)	(31)	(12)	(11)+(22)+(33)
S_1^0	0	0	0	0	0	0	0
S_1^1	0	0	0	$-i\frac{k}{2\pi}$	$\frac{k}{2\pi}$	0	0
S_1^2	0	0	0	0	0	0	0
S_2^0	$\frac{k}{2\pi}\frac{3\delta-1}{1+\delta}$	$\frac{k}{2\pi}\frac{3\delta-1}{1+\delta}$	$\frac{k}{2\pi}$	0	0	0	$\frac{k}{2\pi}\frac{7\delta-1}{1+\delta}$
S_2^1	0	0	0	0	0	0	0
S_2^2	0	0	0	0	0	0	0
S_3^0	0	0	0	0	0	0	0
S_3^1	0	0	0	0	0	0	0
S_3^2	0	0	0	0	0	0	0
S_4^0	$\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}\frac{7\delta-1}{1+\delta}$	$\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}\frac{7\delta-1}{1+\delta}$	0	0	0	0	$\frac{k}{\pi}\frac{\mu}{\mu_1}\frac{7\delta-1}{1+\delta}$
S_4^1	0	0	0	0	0	0	0
S_4^2	$-\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	$\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0	0	0	$i\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0
S_5^0	0	0	0	0	0	0	0
S_5^1	0	0	0	$i\frac{k}{2\pi}$	$-\frac{k}{2\pi}$	0	0
S_5^2	0	0	0	0	0	0	0
S_6^0	0	0	0	0	0	0	0
S_6^1	0	0	0	0	0	0	0
S_6^2	$\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	$-\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0	0	0	$-i\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0

当 $(kl)=(23)$, (12) 时,

$$S_i^m = i\,\mathrm{Im}\,S_i^m, \tag{77}$$

则对 (74) 式取实部后可得

$$\left.\begin{aligned}
kU_r^m(0) &= -\left[k\,\mathrm{Im}\,(U_B^m(0))\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr) - k\,\mathrm{Im}\,(U_C^m(0))\frac{m}{kr}J_m(kr)\right]\sin m\varphi,\\
kU_\varphi^m(0) &= -\left[k\,\mathrm{Im}\,(U_B^m(0))\frac{m}{kr}J_m(kr) - k\mathrm{Im}(U_C^m(0))\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}J_m(kr)\right]\cos m\varphi,\\
kU_z^m(0) &= -k\,\mathrm{Im}\,(U_P^m(0))J_m(kr)\sin m\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

自由表面的总位移为

$$\boldsymbol{u}(0) = \sum_m \int_0^\infty \boldsymbol{U}^m(0)kdk. \tag{79}$$

上式中的 $\sum\limits_m \boldsymbol{U}^m(0)$ 就相当于 (25) 式中的 $\boldsymbol{T}_{kl}$，但场点取在自由表面上. 而 (79) 式给出的 $\boldsymbol{u}(0)$ 相当于 (22) 式中的 $\tau_{kl}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, 其中 $\boldsymbol{x}$ 取在自由表面上,即有

$$\boldsymbol{\tau}_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|_{z=0} = \boldsymbol{u}(0). \tag{80}$$

将 (76) 式或 (78) 式代入 (73) 式，得到 $k\boldsymbol{U}^m$ 后代入 (79) 可得 $\boldsymbol{u}(0)$. 由 (80) 可知已求得 $\tau_{kl}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, 由此再代入 (22) 式中就可以最后得到位错面 Σ 上位错在自由表面上激起的静态位移. 设 Σ 面上源点 P 的坐标为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3), 自由面上的场点 Q 的坐标为 $(x_1, x_2, 0)$. 则前面公式中

$$\left.\begin{aligned}
r &= \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2},\\
h &= \xi_3.
\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

求出了自由表面的位移值也就得到了自由表面上的位移应力向量 $\boldsymbol{H}_1^m(0)$, 即有

$$\boldsymbol{H}_1^{mT}(0) = [kU_B^m(0),\ kU_P^m(0),\ 0,\ 0,\ kU_C^m(0),\ 0]. \tag{82}$$

由此很容易求得任意深度 x_3 上的位移应力向量. 设所取的深度 x_3 相当于在第 j 层内离第 j 层顶面的距离为 x_3^j 处. 由 (53) 可知有

$$\boldsymbol{H}_j^m(x_3) = \boldsymbol{a}_j(x_3^j)\cdot\boldsymbol{a}_{j-1}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{H}_1^m(0). \tag{83}$$

而各层的弹性常数和层厚 d_i 都是给定的,由 (55) 可见层矩阵 $\boldsymbol{a}_i$ 也已确定. 由(82)、(83)可知, $\boldsymbol{H}_j^m(x_3)$ 也可以得到. 因此也就得到 $\boldsymbol{H}_j^m(x_3)$ 的分量 $kU_{jB}^m(x_3)$、$kU_{jP}^m(x_3)$、$kU_{jC}^m(x_3)$. 将它们代入 (76) 或 (78) 式中相应于 $U_B^m(0)$、$U_P^m(0)$、$U_C^m(0)$ 的位置便可由 (73) 式求得相应的 $kU_j^m(x_3)$, 类似 (79) 式有

$$\boldsymbol{u}_j(x_3) = \sum_m \int_0^\infty \boldsymbol{U}_j^m(x_3)kdk. \tag{84}$$

将 (84) 式中求得的 $\boldsymbol{u}_j(x_3)$ 取代 (57) 式中的 $\boldsymbol{\tau}_{kl}$ 便可由 (57) 式求得深度为 x_3 处的位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.

求得位移场 $\boldsymbol{u}$ 后,代入 (19) 式便可立即求得任意深度 x_3 处的应力张量.

七、一 个 特 例

下面举一个简单的特例，即弹性半空间走向滑动型位错情况. 可令 $(kl)=(12)$, 则位错的静态位移场可由下式给出

$$u^i(\boldsymbol{x}) = \int_\Sigma [u_1] \tau_{12}^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \nu_2 d\Sigma_\xi. \tag{85}$$

要求在上述特例情况下求出 τ_{12}^i 来. 令源点为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 而场点为 (x_1, x_2, x_3)，在自由表面上有 $x_3 = 0$. 且有

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

先求 $\boldsymbol{J}$. 由(65)式知，在目前弹性半空间情况下有

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\xi_3). \tag{86}$$

将 $\boldsymbol{E}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的表达式(52)和(53)式代入(86)式可求得 $\boldsymbol{J}$. 这里(45)式中的

$$q = 2\frac{\mu_1}{\mu_1} = 2,$$

由此得

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{1+\delta}C + \frac{\eta}{1+\delta}S & \frac{\delta}{1+\delta}S - \frac{\eta}{1+\delta}C & \frac{1}{2(1+\delta)}C - \frac{\eta}{2(1+\delta)}S & \frac{1}{2(1+\delta)}S + \frac{\eta}{2(1+\delta)}C & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{1+\delta}S + \frac{\eta}{1+\delta}C & \frac{\delta}{1+\delta}C - \frac{\eta}{1+\delta}S & \frac{1}{2(1+\delta)}S - \frac{\eta}{2(1+\delta)}C & \frac{1}{2(1+\delta)}C + \frac{\eta}{2(1+\delta)}S & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1+\delta}S & \frac{1}{1+\delta}C & \frac{1}{2(1+\delta)}S & -\frac{1}{2(1+\delta)}C & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1+\delta}C & \frac{1}{1+\delta}S & \frac{1}{2(1+\delta)}C & -\frac{1}{2(1+\delta)}S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{q}S & \frac{2}{q}C \end{bmatrix}. \tag{87}$$

上式中

$$C = \operatorname{ch} k\xi_3, \quad S = \operatorname{sh} k\xi_3. \tag{88}$$

由(60)式可知，此时

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}^{-1}. \tag{89}$$

而 $\boldsymbol{E}^{-1}$ 已由(52)式给出.

由(87)及(70)式可求得

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \frac{2\delta}{(1+\delta)^2}(S+C)^2, \\ F_L &= S + C. \end{aligned} \right\} \tag{90}$$

查表 10.2 知，对目前的 $(kl) = (12)$ 的情况有

$$S_4^2 = i\frac{k}{2\pi}, \quad S_6^2 = -i\frac{k}{2\pi}, \tag{91}$$

其它的 S_l^m 值均为零.

由(88)式及(45)式知有

$$S + C = e^{k\xi_3}, \quad \eta = 2\delta k\xi_3. \tag{92}$$

将(87)、(89)式中相应的各分量及(90)式给出的 F_R、F_L 值代入(69)式，并利用(92)式可得自由表面上的位移分量

$$\left.\begin{aligned}
kU_B^2(0) &= i\frac{k}{8\pi}\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}-1\right)e^{-k\xi_3},\\
kU_P^2(0) &= i\frac{k}{8\pi}\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}+1\right)e^{-k\xi_3},\\
kU_C^2(0) &= i\frac{k}{2\pi}e^{-k\xi_3}.
\end{aligned}\right\}\tag{93}$$

将 (90) 式代入 (74) 式可求出

$$\left.\begin{aligned}
kU_r^2(0) &= i\frac{1}{8\pi}e^{-k\xi_3}e^{i2\varphi}\left[\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}-1\right)\frac{\partial J_2}{\partial r}-\frac{8}{r}J_2\right],\\
kU_\varphi^2(0) &= -\frac{1}{8\pi}e^{-k\xi_3}e^{i2\varphi}\left[\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}-1\right)\frac{2}{r}J_2-4\frac{\partial J_2}{\partial r}\right],\\
kU_z^2(0) &= i\frac{k}{8\pi}e^{-k\xi_3}e^{i2\varphi}\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}+1\right)J_2.
\end{aligned}\right\}\tag{94}$$

这里简记 $J_m(kr)$ 为 J_m。再利用贝塞尔函数的有关公式得

$$\frac{\partial J_2}{\partial r}=-\frac{2}{r}J_2+kJ_1,$$

由此 (94) 可化得

$$\left.\begin{aligned}
kU_r^2(0) &= i\frac{1}{8\pi}e^{-k\xi_3}e^{i2\varphi}\left[k\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}-1\right)J_1-\frac{2}{r}\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}+3\right)J_2\right],\\
kU_\varphi^2(0) &= \frac{1}{8\pi}e^{-k\xi_3}e^{i2\varphi}\left[4kJ_1-\frac{2}{r}\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}+3\right)J_2\right],\\
kU_z^2(0) &= i\frac{1}{8\pi}e^{-k\xi_3}e^{i2\varphi}\left(2k\xi_3-\frac{1}{\delta}+1\right)J_2.
\end{aligned}\right\}\tag{95}$$

将 (95) 式代入 (79) 式，即

$$\boldsymbol{u}(0)=\sum_m\int\boldsymbol{U}^m(0)kdk=\int[kU_r^2(0)\boldsymbol{e}_r+kU_\varphi^2(0)\boldsymbol{e}_\varphi+kU_z^2(0)\boldsymbol{e}_z]dk.$$

并利用 (28) 式可得到 $\boldsymbol{u}(0)$ 的各分量如下:

$$\left.\begin{aligned}
u_r(0) &= \frac{i}{8\pi}e^{i2\varphi}\left[2\xi_3I_1^2-\left(\frac{1}{\delta}+1\right)I_1^1-\frac{4}{r}\xi_3I_2^1+\frac{2}{r}\left(\frac{1}{\delta}-3\right)I_2^0\right],\\
u_\varphi(0) &= \frac{1}{8\pi}e^{i2\varphi}\left[4I_1^1-\frac{4}{r}\xi_3I_2^1+\frac{2}{r}\left(\frac{1}{\delta}-3\right)I_2^0\right],\\
u_z(0) &= \frac{i}{8\pi}e^{i2\varphi}\left[2\xi_3I_2^2-\left(\frac{1}{\delta}-1\right)I_2^1\right].
\end{aligned}\right\}\tag{96}$$

因为有

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(0) &= u_r(0)\boldsymbol{e}_r+u_\varphi(0)\boldsymbol{e}_\varphi+u_z(0)\boldsymbol{e}_z,\\
\boldsymbol{u}(0) &= u_1(0)\boldsymbol{e}_1+u_2(0)\boldsymbol{e}_2+u_3(0)\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}\right\}\tag{97}$$

由 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 及直角坐标基 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 的关系得

$$\left.\begin{aligned}
u_1(0) &= u_r(0)\cos\varphi-u_\varphi(0)\sin\varphi,\\
u_2(0) &= u_r(0)\sin\varphi+u_\varphi(0)\cos\varphi,\\
u_3(0) &= u_z(0).
\end{aligned}\right\}\tag{98}$$

以 $u_z(0)$ 为例，由 (96)—(98) 式，并利用 (28) 式代换 I_m^n，最后取结果的实部为

$$u_z(0) = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{4\pi}\left[2\xi_3\frac{3r^2}{R^5} - \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)\frac{(R-\xi_3)^2(2R+\xi_3)}{r^2R^3}\right],$$

其中

$$R = \sqrt{r^2 + \xi_3^2}.$$

如令

$$\zeta = \frac{\xi_3}{R}, \tag{99}$$

且介质为泊松体，即 $\nu = \frac{1}{4}$，从而 $\delta = \frac{1}{2}$，则 $u_z(0)$ 可化为

$$u_z(0) = \frac{\sin 2\varphi}{8\pi r^2}(2 - 9\zeta + 13\zeta^3 - 6\zeta^5).$$

同理可求出 $u_r(0)$ 和 $u_\varphi(0)$，得到如下结果

$$\left.\begin{aligned} u_r(0) &= \frac{\sin 2\varphi}{8\pi}\frac{R}{r^3}(2A + F), \\ u_\varphi(0) &= \frac{\cos 2\varphi}{8\pi}\frac{R}{r^3}2A \\ u_z(0) &= \frac{\sin 2\varphi}{8\pi}\frac{1}{r^2}E. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 - 2\zeta + \zeta^2 \\ E &= 2 - 9\zeta + 13\zeta^3 - 6\zeta^5, \\ F &= 3 + 8\zeta - 24\zeta^2 + 19\zeta^4 - 6\zeta^6. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

将 (100) 式代入 (98) 式，并令

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= r\cos\varphi \\ R_2 &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

可以得到

$$\left.\begin{aligned} u_1(0) &= \frac{R_2R}{4\pi r^4}\left(A + \frac{R_1^2}{r^2}F\right), \\ u_2(0) &= \frac{R_1R}{4\pi r^4}\left(A + \frac{R_2^2}{r^3}F\right), \\ u_3(0) &= \frac{R_1R_2}{4\pi r^4}E. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

丸山卓男[60]用喀勒金向量的方法求得了半无穷弹性空间中位错的静态位移场，(100) 式及 (103) 式与他得到的对于走向滑动型位错 $(kl) = (12)$ 情况下的结果完全一致．但是喀勒金向量的方法只能用于比较简单的介质条件，例如半无穷弹性空间的情况．而半无穷空间的情况只是这里讨论的多层弹性半空间情况的一种特例．

§ 10.2 多层弹性半空间内位错的位移场

地表的介质可看作由成层介质组成，当讨论近震的地震波时，便可以用多层弹性半空

间的介质条件来模拟，讨论在这样的介质条件下位错所产生的位移场. 本·梅纳赫姆[61]用对汉森向量展开的方法求得了单层加弹性半空间内位错激发的弹性波. 陈运泰[4]进一步利用哈斯克尔矩阵法推广到多层弹性半空间的情况. 这里主要介绍他们的工作.

一、无限介质内位错位移场的柱函表达式

前面 § 9.3 中已给出了均匀各向同性的无限介质内位错位移场的一般公式，不考虑体力场的影响，并且认为位错面上应力应保持连续，则位错的位移场谱在直角坐标系中的表达式为

$$\hat{u}^i(\boldsymbol{x}, \omega) = \oint_\Sigma [\hat{u}_k(\boldsymbol{\xi}, \omega)]\hat{\sigma}^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)\nu_l d\Sigma \tag{1}$$

其中，$\hat{u}^i(\boldsymbol{x}, \omega)$ 为位错在 $\boldsymbol{x}$ 点产生的位移谱的 $\boldsymbol{e}_i$ 向分量；

$\hat{u}_k(\boldsymbol{\xi}, \omega)$ 为位错面 Σ 上 ξ 点的位移错的谱的 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的分量；

ν_l 为位错面 Σ 上法线单位向量的 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的分量；

$\hat{\sigma}^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ 为 $\boldsymbol{\xi}$ 处的法线方向为 $\boldsymbol{e}_l$ 的单位面积的位错面上发生 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的单位位错时，在 $\boldsymbol{x}$ 点所产生的位错谱在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的分量.

可以看到，求位移谱 $\hat{u}_i(\boldsymbol{x}, \omega)$ 的关键在于求得积分核 $\hat{\sigma}^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$. § 9.3 (17) 式已给出，在均匀各向同性的介质中有

$$\hat{\sigma}^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = \lambda\delta_{kl}\frac{\partial \hat{G}^i_m}{\partial \xi_m} + \mu\left(\frac{\partial \hat{G}^i_l}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \hat{G}^i_k}{\partial \xi_l}\right), \tag{2}$$

而对于均匀各向同性的无限介质有

$$4\pi\mu k_\beta^2 \hat{\boldsymbol{G}} = \nabla \times \nabla \times \frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\boldsymbol{I} - \nabla\nabla \cdot \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}\boldsymbol{I}, \tag{3}$$

或

$$4\pi\mu k_\beta^2 \hat{G}^i_k = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_k} - \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial \xi_m}\frac{\partial}{\partial \xi_m}\right)\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} - \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}. \tag{4}$$

在对 (4) 式和 (2) 式进行运算求偏微商时，经常利用

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

化成 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 的形式再进行计算，这点需加以注意.

以上各公式的角标均为直角坐标系三个坐标轴方向的角标. 下面设法求出 $\hat{\sigma}^i_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ 的柱函数表达式. 按习惯，我们取圆柱坐标为 (r, φ, z)，令

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}, \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{x_2-\xi_2}{x_1-\xi_1}, \\ z &= x_3, \quad h = \xi_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

并为简化记号，在下面的公式中省去表示谱的记号∧.

索末菲尔 (Sommerfeld) 公式给出[46]

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} &= \int_0^K J_0(kr)e^{-a|z-h|}\frac{k}{a}dk, \\ \frac{e^{-ik_\beta R}}{R} &= \int_0^K J_0(kr)e^{-b|z-h|}\frac{k}{b}dk, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$R^2 = r^2 + (z-h)^2, \quad a = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}, \quad b = \sqrt{k^2 - k_\beta^2}. \tag{7}$$

将索末菲尔公式 (6) 代入 (4) 式，并利用贝塞尔函数的各项性质特别是递推公式，使可求出 G_k^i 的柱函数表达式。例如

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) = \int_0^\infty \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} e^{-b|z-h|}\frac{k}{b}dk$$
$$= \int_0^\infty J_1(kr)\frac{x_1}{r} e^{-b|z-h|}\frac{k^2}{b}dk,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\right) = -\epsilon\int_0^\infty J_0(kr)e^{-b|z-h|}k\,dk,$$

其中

$$\epsilon = \begin{cases} 1, & 当\ z > h \\ -1, & 当\ z < h. \end{cases} \tag{8}$$

用类似上面的计算，考虑到贝塞尔函数的递推公式，并利用 $x_1 = r\cos\varphi$，$x_2 = r\sin\varphi$，将 $x_1 x_2$ 化为 r，φ 坐标，则可用最后求得 $\sigma_{kl}^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)$ 的贝塞尔函数表达式如下

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11}^1 &= \cos\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{11}^1 dk + \cos 3\varphi\int_0^\infty J_3(kr)\theta_{11}^1 dk,\\
\sigma_{11}^2 &= \sin\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{11}^2 dk + \sin 3\varphi\int_0^\infty J_3(kr)\theta_{11}^1 dk,\\
\sigma_{11}^3 &= \epsilon\left[\int_0^\infty J_0(kr)\Delta_{11}^3 dk + \cos 3\varphi\int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^3 dk\right],\\
\sigma_{22}^1 &= \cos\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{11}^2 dk - \cos 3\varphi\int_0^\infty J_3(kr)\theta_{11}^1 dk,\\
\sigma_{22}^2 &= \sin\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{11}^1 dk - \sin 3\varphi\int_0^\infty J_3(kr)\theta_{11}^1 dk,\\
\sigma_{22}^3 &= \epsilon\left[\int_0^\infty J_0(kr)\Delta_{11}^3 dk - \cos 2\varphi\int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^3 dk\right],\\
\sigma_{33}^1 &= \cos\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{33}^1 dk,\\
\sigma_{33}^2 &= \sin\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{33}^1 dk,\\
\sigma_{33}^3 &= \epsilon\int_0^\infty J_0(kr)\Delta_{33}^3 dk,\\
\sigma_{23}^1 &= \epsilon\sin 2\varphi\int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^3 dk,\\
\sigma_{23}^2 &= \epsilon\left[\int_0^\infty J_0(kr)\Delta_{23}^2 dk - \cos 2\varphi\int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^3 dk\right],\\
\sigma_{23}^3 &= \sin\varphi\int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{23}^3 dk,\\
\sigma_{31}^1 &= \epsilon\left[\int_0^\infty J_0(kr)\Delta_{23}^2 dk + \cos 2\varphi\int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^3 dk\right],\\
\sigma_{31}^2 &= \epsilon\sin\varphi\int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^3 dk,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{31}^{3} &= \cos\varphi \int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{23}^{3} dk, \\
\sigma_{12}^{1} &= \sin\varphi \int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{12}^{1} dk + \sin 3\varphi \int_0^\infty J_3(kr)\theta_{11}^{1} dk, \\
\sigma_{12}^{2} &= \cos\varphi \int_0^\infty J_1(kr)\Delta_{12}^{1} dk - \cos 3\varphi \int_0^\infty J_3(kr)\theta_{11}^{1} dk, \\
\sigma_{12}^{3} &= \varepsilon \sin 2\varphi \int_0^\infty J_2(kr)\theta_{11}^{3} dk.
\end{aligned}\right\}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta_{11}^{1} &= \frac{X}{a}[2(1-2\gamma)k_\beta^2 - 3k^2] + \frac{Y}{b}(3k^2 - 4k_\beta^2), \\
\theta_{11}^{1} &= k^2\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right), \\
\Delta_{11}^{2} &= \frac{X}{a}[2(1-2\gamma)k_\beta^2 - k^2] + \frac{Y}{b}k^2, \\
\Delta_{11}^{3} &= \frac{2X}{k}[(1-2\gamma)k_\beta^2 - k^2] + 2kY, \\
\theta_{11}^{3} &= 2k(X - Y), \\
\Delta_{33}^{1} &= 4\left(\frac{\Omega}{a}X - bY\right), \\
\Delta_{33}^{3} &= 4\left(\frac{\Omega}{k}X - kY\right), \\
\Delta_{23}^{2} &= 2\left(-kX + \frac{b^2}{k}Y\right), \\
\Delta_{23}^{3} &= 4\left(aX - \frac{\Omega}{b}Y\right) \\
\Delta_{12}^{1} &= -\frac{X}{a}k^2 + \frac{Y}{b}(k^2 - 2k_\beta^2),
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
X &= -\frac{k^2}{8\pi k_\beta^2} e^{-a|z-h|}, \\
Y &= -\frac{k^2}{8\pi k_\beta^2} e^{-b|z-h|}, \\
\gamma &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

将 σ_{kl}^{i} 代入 (1) 式便可得到无限介质内位错的位移谱的贝塞尔函数表达式. 本・梅纳赫姆等[61][4]曾用如下方法得到(9)式,即先求得无限介质中位错位移谱的球贝塞尔函数的展式, 再利用球贝塞尔函数用贝塞尔函数来表达的积分表达式就可以得到位移谱的贝塞尔函数的积分表达式. 这里直接利用索末菲尔积分 (6) 式的方法运算比较简捷.

二、用柱坐标中的汉森 (Hanson) 向量来表达运动方程的解

和 § 5.4 中求多层弹性半空间对入射的平面波的响应谱的解法一样,这里亦利用汉森向量求解. 但是这里要在柱坐标中来表达. 波动方程在频率域中的表达式为

$$\alpha^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\beta^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}+\omega^2\boldsymbol{u}=0,\tag{12}$$

我们只要求得位移谱 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega)$，便可求得位移场

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2\pi}\int\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\omega)e^{i\omega t}d\omega.\tag{13}$$

附录二中已经证明，只要取圆柱坐标中的 $\boldsymbol{e}_z$ 与各层分界面以及自由界面(即地表)相垂直，则 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega)$ 可由以下基本向量组成

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}_m^\pm&=\frac{1}{k_\alpha}\nabla\phi_m^\pm\\ \boldsymbol{N}_m^\pm&=\frac{1}{kk_\beta}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{e}_z\phi_m^\pm),\\ \boldsymbol{M}_m^\pm&=\frac{i}{k}\nabla\times(\boldsymbol{e}_z\phi_m^\pm).\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

只要 $\phi_m^\pm$ 满足方程

$$\nabla^2\phi_m^\pm+k_\alpha^2\phi_m^\pm=0\tag{15}$$

则 $\boldsymbol{L}_m^\pm$、$\boldsymbol{N}_m^\pm$、$\boldsymbol{M}_m^\pm$ 是运动方程(12)的解，并且它们之间是线性无关的. 将它们取作基本解，而 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\omega)$ 便可由它们构成.

(15)式的基本解在圆柱坐标中的表达式为

$$\phi_m^\pm=J_m(kr)e^{im\varphi\pm az},\tag{16}$$

其中 $J_m(kr)$ 为 m 阶贝塞尔函数，m 为正整数.

在以下表达式中为了简便起见，略去了对 m 的所有可取值的求和以及对函数 $f_m(kr)k$ 的对 k 从零到正无穷的积分，即以 $f_m(k)$ 来代替 $\sum\limits_m\int_0^\infty f_m(k)kdk$.

如令 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 为柱坐标系的坐标单位向量，并引入向量 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$，它们由 § 10.1 (13)式定义. 再将 $\phi_m^\pm$ 的基本解(16)代入 $\boldsymbol{L}_m^\pm$、$\boldsymbol{N}_m^\pm$、$\boldsymbol{M}_m^\pm$ 的表达式(14)式中，并利用 § 10.1 (13)式将它们表达为 $\boldsymbol{B}_m^\pm$、$\boldsymbol{P}_m^\pm$、$\boldsymbol{C}_m^\pm$ 的线性组合

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}_m^\pm&=\frac{1}{k_\alpha}(k\boldsymbol{B}_m\pm a\boldsymbol{P}_m)e^{\pm az},\\ \boldsymbol{N}_m^\pm&=\frac{1}{k_\beta}(\pm b\boldsymbol{B}_m+k\boldsymbol{P}_m)e^{\pm bz},\\ \boldsymbol{M}_m^\pm&=\boldsymbol{C}_me^{\pm bz}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

令 $\boldsymbol{U}^m$ 为 $\boldsymbol{L}_m^\pm$、$\boldsymbol{N}_m^\pm$、$\boldsymbol{M}_m^\pm$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{U}^m=(a_m^+\boldsymbol{L}_m^++a_m^-\boldsymbol{L}_m^-)+(b_m^+\boldsymbol{N}_m^++b_m^-\boldsymbol{N}_m^-)+(c_m^+\boldsymbol{M}_m^++c_m^-\boldsymbol{M}_m^-),\tag{18}$$

则运动方程的解即位移谱为

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\omega)=\sum_m\int_0^\infty\boldsymbol{U}^mkdk.$$

按照前面的约定，略去 $\sum\limits_m\int_0^\infty kdk$ 等符号. (18)式表示解 U^m 可以表达为基本向量 $\boldsymbol{L}_m^+$、$\boldsymbol{L}_m^-$、$\boldsymbol{N}_m^+$、$\boldsymbol{N}_m^-$、$\boldsymbol{M}_m^+$、$\boldsymbol{M}_m^-$ 的线性组合，而组合系数 $a_m^\pm$、$b_m^\pm$、$c_m^\pm$ 则代表相应波的振幅. 角标+号代表上行波，即向自由面方向传播的波；角标一号代表下行波，即离开自由界面方向的波. 将 $\boldsymbol{L}_m^\pm$、$\boldsymbol{N}_m^\pm$、$\boldsymbol{M}_m^\pm$ 的表达式(17)代入(18)式，可得

$$\boldsymbol{U}^m=\left(\frac{k}{k_\alpha}f_{m1}+\frac{1}{k_\beta}f'_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m+\left(\frac{1}{k_\alpha}f'_{m1}+\frac{k}{k_\beta}f_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m+f_{m3}\boldsymbol{C}_m \tag{19}$$

而 f_{m1}、f_{m2}、f_{m3} 及 f'_{m1}、f'_{m2}、f'_{m3} 的表达式可见 § 10.1(18) 式。

而由位移场 $\boldsymbol{U}^m$ 立即可求出相应的应力张量，即

$$\boldsymbol{S}^m=\lambda\boldsymbol{I}\nabla\cdot\boldsymbol{U}^m+\mu(\nabla\boldsymbol{U}^m+\boldsymbol{U}^m\nabla), \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位二阶张量，将 (19) 式代入上式可求得 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的面元上的应力向量

$$\boldsymbol{S}^m\cdot\boldsymbol{e}_z=2\mu\left(\frac{k}{k_\alpha}f'_{m1}+\frac{\Omega}{k_\beta}f_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m+2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}f_{m1}+\frac{k}{k_\beta}f'_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m+\mu f'_{m3}\boldsymbol{C}_m, \tag{21}$$

其中

$$\Omega=k^2-\frac{k_\beta^2}{2}. \tag{22}$$

比较 (19)、(21) 式与 § 5.4 中的 (17)、(23) 式，可以看到它们完全相同。由此可知，§ 5.4 中平面波在多层弹性半空间的许多表达式都可以照搬到这里来。

这里 $\boldsymbol{U}^m$ 的定义 (18) 式与本·梅纳赫姆[61]及陈运泰[4]对 $\boldsymbol{U}^m$ 作的定义略有不同。他们定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^m=&(a_m^+k_\alpha\boldsymbol{L}_m^++a_m^-k_\alpha\boldsymbol{L}_m^-)+(b_m^+k_\beta\boldsymbol{N}_m^++b_m^-k_\beta\boldsymbol{N}_m^-)\\&+(c_m^+k_\beta\boldsymbol{M}_m^++c_m^-k_\beta\boldsymbol{M}_m^-).\end{aligned} \tag{23}$$

这里这样定义 $\boldsymbol{U}^m$ 后可使 $a_m^\pm$、$b_m^\pm$、$c_m^\pm$ 的物理意义较为明显，它们就代表波的振幅. 并且这样定义 $\boldsymbol{U}^m$ 后不仅使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而且使矩阵 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{J}$（见后面）等的分量全部成为无量纲的量，从而便于计算。

三、用基本向量 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来表达无限介质的位错点源的位移场

设在 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 点有一位错点源，它在 (x_1,x_2,x_3) 点产生的位移场为

$$\boldsymbol{U}=\sum_m\int_0^\infty\boldsymbol{U}_0^m k\,dk, \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_0^m=\left(\frac{k}{k_\alpha}X_{m1}+\frac{1}{k_\beta}X'_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m+\left(\frac{1}{k_\alpha}X'_{m1}+\frac{k}{k_\beta}X_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m+X_{m3}\boldsymbol{C}_m. \tag{25}$$

而 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的应力谱为

$$\boldsymbol{S}_0^m\cdot\boldsymbol{e}_z=2\mu\left(\frac{k}{k_\alpha}X'_{m1}+\frac{\Omega}{k_\beta}X_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m+2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}X_{m1}+\frac{k}{k_\beta}X'_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m+\mu X'_{m3}\boldsymbol{C}_m. \tag{26}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}X_{m1}&=i_me^{-a|z-h|}\varepsilon^m\\X_{m2}&=j_me^{-b|z-h|}\varepsilon^{m+1}\\X_{m3}&=k_me^{-b|z-h|}\varepsilon^m,\\X'_{m1}&=\frac{dX_{m1}}{dz}=-i_mae^{-a|z-h|}\varepsilon^{m+1},\\X'_{m2}&=\frac{dX_{m2}}{dz}=-j_mbe^{-b|z-h|}\varepsilon^m,\\X'_{m3}&=\frac{dX_{m3}}{dz}=-k_mbe^{-b|z-h|}\varepsilon^{m+1}.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

这里仍用 (5) 式来定义柱坐标.

如果能对 $(\xi_1、\xi_2、\xi_3)$ 处的位错点源求出 $i_m、j_m、k_m$，问题便解决了. 前面已求得无限弹性介质中位错点源的位移谱的贝塞尔函数表达式. 但是位错谱分量是取在直角坐标系中，即取在 $\boldsymbol{e}_1、\boldsymbol{e}_2、\boldsymbol{e}_3$ 的方向上，如果把它们移到 $\boldsymbol{e}_r、\boldsymbol{e}_\varphi、\boldsymbol{e}_z$ 方向上，再进一步通过 § 10.1 (13) 式用 $\boldsymbol{B}_m、\boldsymbol{P}_m、\boldsymbol{C}_m$ 来表达，最后与 (25) 式相比较便可求得 $i_m、j_m、k_m$. 为此，由柱坐标与直角坐标的关系式知

$$\boldsymbol{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl}^r \boldsymbol{e}_r + \sigma_{kl}^\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + \sigma_{kl}^z \boldsymbol{e}_z, \tag{28}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{kr}^r &= \sigma_{kl}^1 \cos\varphi + \sigma_{kl}^2 \sin\varphi, \\ \sigma_{kr}^\varphi &= -\sigma_{kl}^1 \sin\varphi + \sigma_{kl}^2 \cos\varphi, \\ \sigma_{kl}^z &= \sigma_{kl}^3. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

将 (9) 式中的各表达式分别代入 (29) 式中，并利用 § 10.1 (31) 式把 $\cos m\varphi、\sin m\varphi$ 化成 $e^{im\varphi}$，则可求得 $\boldsymbol{T}_{kl}$ 在 $\boldsymbol{e}_r、\boldsymbol{e}_\varphi、\boldsymbol{e}_z$ 方向的分量，再由 § 10.1 (13) 式把它们用 $\boldsymbol{B}_m、\boldsymbol{P}_m、\boldsymbol{C}_m$ 来表达，可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{11} &= -\frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{a}X + bY\right)\boldsymbol{B}_0 + \left(-\frac{k}{a}X + \frac{b}{k}Y\right)\boldsymbol{B}_2 \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{k^2}X + Y\right)\boldsymbol{P}_0 + \varepsilon(X - Y)\boldsymbol{P}_2 + \frac{k_\beta^2}{kb}Y\boldsymbol{C}_2, \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{22} &= -\frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{a}X + bY\right)\boldsymbol{B}_0 - \left(-\frac{k}{a}X + \frac{b}{k}Y\right)\boldsymbol{B}_2 \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{k^2}X + Y\right)\boldsymbol{P}_0 - \varepsilon(X - Y)\boldsymbol{P}_2 - \frac{k_\beta^2}{kb}Y\boldsymbol{C}_2, \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{33} &= -\frac{2}{ka}(\Omega X - abY)\boldsymbol{B}_0 + \frac{2\varepsilon}{k^2}(\Omega X - k^2Y)\boldsymbol{P}_0, \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{23} &= \frac{2i\varepsilon}{k^2}(k^2X - \Omega Y)\boldsymbol{B}_1 - \frac{2i}{kb}(abX - \Omega Y)\boldsymbol{P}_1 \\ &\quad - \varepsilon\frac{ik_\beta^2}{k^2}Y\boldsymbol{C}_1, \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{31} &= -\frac{2\varepsilon}{k^2}(k^2X - \Omega Y)\boldsymbol{B}_1 + \frac{2}{kb}(abX - \Omega Y)\boldsymbol{P}_1 \\ &\quad + \varepsilon\frac{k_\beta^2}{k^2}Y\boldsymbol{C}_1, \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{T}_{12} &= \frac{i}{ka}(k^2X - abY)\boldsymbol{B}_2 + i\varepsilon(-X + Y)\boldsymbol{P}_2 \\ &\quad - \frac{ik_\beta^2}{kb}Y\boldsymbol{C}_2, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

其中

$$\varepsilon = (1 - 2\gamma)k_\beta^2 - k^2. \tag{31}$$

并须注意，对 (30) 式中各式还乘以 kdk，并对 k 从零积分到正无穷. 在 (30) 式中已予以略去. 将 (30) 式与 (25) 式比较便可得到 $\boldsymbol{T}_{kl}$ 的不同 kl 值下的 $i_m、j_m、k_m$ 值. 表 10.3

表 10.3 不同 kl 值下的 i_m, j_m, k_m 值

	(kl)						
	(11)	(22)	(33)	(23)	(31)	(12)	(11)+(22)+(33)
i_0	$\frac{k_\alpha \varepsilon}{4\pi a k_\beta^2}$	$\frac{k_\alpha \varepsilon}{4\pi a k_\beta^2}$	$\frac{\Omega k_\alpha}{2\pi a k_\beta^2}$	0	0	0	$-\frac{4\gamma - 1}{4\pi a} k_\alpha$
j_0	$-\frac{k}{4\pi k_\beta}$	$-\frac{k}{4\pi k_\beta}$	$\frac{k}{2\pi k_\beta}$	0	0	0	0
k_0	0	0	0	0	0	0	0
i_1	0	0	0	$-\frac{ikk_\alpha}{2\pi k_\beta^2}$	$\frac{kk_\alpha}{2\pi k_\beta^2}$	0	0
j_1	0	0	0	$-\frac{i\Omega}{2\pi b k_\beta}$	$\frac{\Omega}{2\pi b k_\beta}$	0	0
k_1	0	0	0	$\frac{i}{4\pi}$	$-\frac{1}{4\pi}$	0	0
i_2	$\frac{k^2 k_\alpha}{4\pi a k_\beta^2}$	$-\frac{k^2 k_\alpha}{4\pi a k_\beta^2}$	0	0	0	$-\frac{ik^2 k_\alpha}{4\pi a k_\beta^2}$	0
j_2	$\frac{k}{4\pi k_\beta}$	$-\frac{k}{4\pi k_\beta}$	0	0	0	$-\frac{ik}{4\pi k_\beta}$	0
k_2	$-\frac{k}{4\pi b}$	$\frac{k}{4\pi b}$	0	0	0	$\frac{ik}{4\pi b}$	0

中列出了不同 kl 值下的 i_m、j_m、k_m 值[4].

表 10.3 中给出的 i_m、j_m、k_m 值与本・梅纳赫姆[61]给出的 i_m、j_m、k_m 值略有不同，首先是由于按照陈运泰[4]把 $\boldsymbol{C}_m$ 的定义为本・梅纳赫姆定义的 $\boldsymbol{C}_m$ 乘以 i. 所以这里 k_m 的数值为他的结果除以 i. 其次，由于 $\boldsymbol{U}^m$ 的定义也有所不同 (比较 (18) 式和 (23) 式)，所以 i_m 的值都乘了 k_α, j_m、k_m 的值都乘了 k_β, 这样定义 $\boldsymbol{U}^m$ 可以使 $a_m^\pm$、$b_m^\pm$、$c_m^\pm$ 的物理意义清楚，它们相应于波的振幅，而且使 i_m、j_m、k_m 的值都化成了无量纲的量. 以后还可以看到，可以得到一系列无量纲的矩阵.

四、半无限弹性空间内位错源的位移场

设在半无限弹性空间 $z > 0$ 内，在 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 处有位错点源. 由前面 (25)、(26) 式知无限弹性空间内位错点源产生的位移谱和 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的应力谱为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{U}_0^m &= \left(\frac{k}{k_\alpha} X_{m1} + \frac{1}{k_\beta} X'_{m2}\right) \boldsymbol{B}_m + \left(\frac{1}{k_\alpha} X'_{m1} + \frac{k}{k_\beta} X_{m2}\right) \boldsymbol{P}_m + X_{m3} \boldsymbol{C}_m, \\ \boldsymbol{S}_0^m \cdot \boldsymbol{e}_z &= 2\mu\left(\frac{k}{k_\alpha} X'_{m1} + \frac{\Omega}{k_\beta} X_{m2}\right) \boldsymbol{B}_m + 2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha} X_{m1} + \frac{k}{k_\beta} X'_{m2}\right) \boldsymbol{P}_m + \mu X'_{m3} \boldsymbol{C}_m, \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

其中 X_{mi} 和 X'_{mi} 可见 (27) 式，而 (27) 式中的 i_m、j_m、k_m 可见表 10.3. 由于现在是半无限空间，因此还应有附加位移场 $\boldsymbol{U}^m$, $\boldsymbol{U}^m$ 反映自由界面的影响场，$\boldsymbol{U}^m$ 及与之相应的应力谱可用下式表达

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}^m &= \left(\frac{k}{k_\alpha}f_{m1} + \frac{1}{k_\beta}f'_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m + \left(\frac{1}{k_\alpha}f'_{m1} + \frac{k}{k_\beta}f_{m3}\right)\boldsymbol{P}_m + f_{m3}\boldsymbol{C}_m,\\ \boldsymbol{S}^m\cdot\boldsymbol{e}_z &= 2\mu\left(\frac{k}{k_\alpha}f'_{m1} + \frac{\Omega}{k_\beta}f_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m + 2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}f_{m1} + \frac{k}{k_\beta}f'_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m + \mu f'_{m3}\boldsymbol{C}_m,\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

其中 f_{m1}、f_{m2}、f_{m3}、f'_{m1}、f'_{m2}、f'_{m3} 可见 § 10.1 (18) 式. 由物理分析可知,上行波振幅应为零,即自由界面不可能激发出向自由界面方向传播的波,因此有 $a_m^+ = b_m^+ = c_m^+ = 0$.

再由自由界面上应力为零的边条件可得,

$$(\boldsymbol{S}^m + \boldsymbol{S}_0^m)\cdot\boldsymbol{e}_z = 0,\ \text{当}\ z = 0. \quad(34)$$

将 (32), (33) 式代入上式,取 $z = 0$, 由于 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 是线性无关的, 因此它们的系数应全部为零,即在 $z = 0$ 处有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Omega}{k_\alpha}f_{m1} + \frac{k}{k_\beta}f'_{m2} = -\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}X_{m1} + \frac{k}{k_\beta}X'_{m2}\right),\\ &\frac{k}{k_\alpha}f'_{m1} + \frac{\Omega}{k_\beta}f_{m2} = -\left(\frac{k}{k_\alpha}X'_{m1} + \frac{\Omega}{k_\beta}X_{m2}\right),\\ &f'_{m3} = -X'_{m3}.\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

将 X_{mi} 和 f_{mi} 的表达式 (27) 式和 § 10.1 (18) 式代入 (35) 式,并利用

$$a_m^+ = b_m^+ = c_m^+ = 0$$

的物理条件,则可得

$$\left.\begin{aligned}a_m^- &= (-)^m\left(-\frac{L'}{L}e^{-ah}i_m + \frac{2bk\Omega}{L}\frac{k_\alpha}{k_\beta}e^{-bh}j_m\right),\\ b_m^- &= (-)^m\left(-\frac{2ak\Omega}{L}\frac{k_\beta}{k_\alpha}e^{-ah}i_m + \frac{L'}{L}e^{-bh}j_m\right),\\ c_m^- &= (-)^m e^{-bh}k_m,\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}L &= \Omega^2 - k^2ab,\\ L' &= \Omega^2 + k^2ab.\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

将 a_m^-、b_m^-、c_m^- 的表达式 (36) 代入 § 10.1 (18) 式, 再一起代入 (33) 式中, 可求得自由界面的影响谱, 将它与用 (32) 式表达的位错源的位移谱叠加后便求得总位移谱, 它满足源点的奇异性条件和自由界面的边界条件. 如引入符号

$$\left.\begin{aligned}R_{e1} &= -\frac{L'}{L}, \quad R_{e2} = \frac{2\Omega ab}{L},\\ R_{e3} &= \frac{L'}{L}, \quad R_{e4} = -\frac{2k^2\Omega}{L},\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

则总位移场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_0^m + \boldsymbol{U}^m = \Big[&\frac{k}{k_a}i_m((-\varepsilon)^m e^{-a|z-h|} + R_{e1}e^{-a(z+h)} + R_{e2}e^{-ah-bz})\\ &-\frac{b}{k_\beta}j_m((-\varepsilon)^m e^{-b|z-h|} + R_{e3}e^{-b(z+h)} + R_{e4}e^{-bh-az})\Big](-)^m\boldsymbol{B}_m\\ &+\Big[-\frac{a}{k_\alpha}i_m((-\varepsilon)^{m+1}e^{-a|z-h|} + R_{e3}e^{-a(z+h)} + R_{e4}e^{-ah-bz})\end{aligned}$$

$$+\frac{k}{k_\beta}j_m((-\epsilon)^{m+1}e^{-b|z-h|}+R_{e1}e^{-b(z+h)}+R_{e2}e^{-bh-az})\Big](-)^{m+1}\boldsymbol{P}_m$$
$$+k_m((-\epsilon)^m e^{-b|z-h|}+e^{-b(z+h)})(-)^m\boldsymbol{C}_m. \tag{39}$$

上式中各项的物理意义如下

$\boldsymbol{B}_m$ 项代表到达接收点为 P 波或 SV 波的水平分量；

$\boldsymbol{P}_m$ 项代表到达接收点为 P 波或 SV 波的垂直分量；

$\boldsymbol{C}_m$ 项代表到达接收点为 SH 波的项；

包含 $e^{-a|z-h|}$ 的项代表直达 P 波；

包含 $e^{-b|z-h|}$ 的项代表直达 SV 波或 SH 波；

包含 $e^{-a(z+h)}$ 的项代表入射到自由界面为 P 波、反射的也为 P 波；

包含 e^{-ah-bz} 的项代表入射到自由界面为 P 波，反射为 SV 波；

包含 $e^{-b(z+h)}$ 的项代表入射到自由界面为 S 波、反射为 S 波（SV 波或 SH 波）；

包含 e^{-bh-az} 的项代表入射到自由界面为 SV 波、反射为 P 波；

而 R_{e1}、R_{e2}、R_{e3}、R_{e4} 为相应的波的反射系数.

由 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 的定义 § 10.1 (13) 式，可以将 $\boldsymbol{W}_m$ 用 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 来表达，也就是求得 $\boldsymbol{W}_m$ 在 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 方向的投影 W_r、W_φ、W_z. 将所得结果对 kdk 求积分（从零积到正无穷大），并对所有可能的 m 求和，就可以得到所求的位移谱. 对位错源，m 只取 0，1，2 三种值，而与位错源的 (kl) 值相对应的源的 i_m、j_m、k_m 值可见表 10.3.

注意，上面求出的结果相当于 (1) 式中的 $\sigma^{i}_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\omega)$，对实际的位错源，还要了解位错谱 $\Delta U_k(\boldsymbol{\xi},\omega)$、位错面 Σ 及位错面的法线方向单位向量 ν_e，将它们一起代入公式 (1)，就可以求出半无限空间中位错的位移谱，最后再进行傅里叶反变换就可求得位移场.

对多层弹性半空间问题原则上也可以仿照上法解决，但实际上层的数目一多，求解就变得十分复杂，下面将用哈斯克尔矩阵法来解决多层问题.

五、多层弹性半空间中位错源的位移场

前面在第二部分中已讨论了怎样用基本向量 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来表达运动方程的解，在第三部分中讨论了如何用 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 来表达无限弹性空间中位错点源的位移谱(位移场). 在此基础上利用哈斯克尔矩阵法可以很方便地讨论多层弹性半空间问题，而不是像第四部分中那样仅限于讨论半无限空间问题.

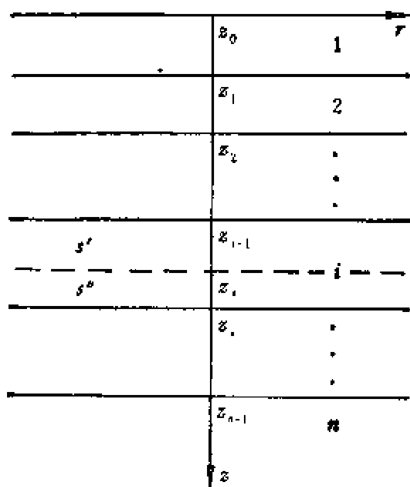


图 10.2 多层弹性半空间

设有多层弹性半空间如图 10.2，令 z 轴指向介质层内，$z=0$ 为自由表面. 介质分为若干平行层，而第 n 层为弹性半空间，在第 i 层中的位移谱 $\boldsymbol{U}_i$ 和 z 方向上的应力谱 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_i)\cdot\boldsymbol{e}_z$ 为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}_i&=\sum_m\int_0^\infty U_i^m k dk,\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_i)\cdot\boldsymbol{e}_z&=\sum_m\int_0^\infty \boldsymbol{S}(U_i^m)\cdot\boldsymbol{e}_z k dk.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

下面仍和前面一样省去 $\sum\limits_m \int_0^\infty k\,dk$ 记号，并在 (41) 式到 (46) 式中省去代表层的角标 i，由第二部分中的讨论知

$$\left.\begin{aligned} kU^m &= k\left(\frac{k}{k_\alpha} f_{m1} + \frac{1}{k_\beta} f'_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m + k\left(\frac{1}{k_\alpha} f'_{m1} + \frac{k}{k_\beta} f_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m + k f_{m3}\boldsymbol{C}_m, \\ \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_m)\cdot\boldsymbol{e}_z &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\left(\frac{k}{k_\alpha} f'_{m1} + \frac{\Omega}{k_\beta} f_{m2}\right)\boldsymbol{B}_m + 2\frac{\mu}{\mu_1}\left(\frac{\Omega}{k_\alpha} f_{m1} + \frac{k}{k_\beta} f'_{m2}\right)\boldsymbol{P}_m \\ &\quad + \frac{\mu}{\mu_1} f'_{m3}\boldsymbol{C}_m. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

f_{mj} 和 f'_{mj} 的表达式见 § 10.1 (8) 式. 在 (41) 式中引入 k 和 μ_1 是为了使量纲整齐. 而 μ_1 为第一层介质的剪切模量,其实可以取为任何一层介质的剪切模量. 上面 (41) 式中除 k、μ_1 及 $\boldsymbol{e}_z$ 外其它各量均省去了角标 i，实际上它们都是第 i 层中的量.

(41) 式又可写成

$$\left.\begin{aligned} k\boldsymbol{U}^m &= kU_B^m\boldsymbol{B}_m + kU_P^m\boldsymbol{P}_m + kU_C^m\boldsymbol{C}_m, \\ \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m)\cdot\boldsymbol{e}_z &= \frac{1}{\mu_1}\tau_B^m\boldsymbol{B}_m + \frac{1}{\mu_1}\tau_P^m\boldsymbol{P}_m + \frac{1}{\mu_1}\tau_C^m\boldsymbol{C}_m. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

将 § 10.1 (18) 式代入 (41) 式,再与 (42) 式相比较可得

$$\left.\begin{aligned} kU_B^m &= \frac{k^2}{k_\alpha}\operatorname{ch} az(a_m^+ + a_m^-) + \frac{k^2}{k_\alpha}\operatorname{sh} az(a_m^+ - a_m^-) \\ &\quad + \frac{kb}{k_\beta}\operatorname{ch} bz(b_m^+ - b_m^-) + \frac{kb}{k_\beta}\operatorname{sh} bz(b_m^+ + b_m^-), \\ kU_P^m &= \frac{ka}{k_\beta}\operatorname{sh} az(a_m^+ + a_m^-) + \frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{ch} az(a_m^+ - a_m^-) \\ &\quad + \frac{k^2}{k_\beta}\operatorname{sh} bz(b_m^+ - b_m^-) + \frac{k^2}{k_\beta}\operatorname{ch} az(b_m^+ + b_m^-), \\ kU_C^m &= k\operatorname{ch} bz(c_m^+ + c_m^-) + k\operatorname{sh} bz(c_m^+ - c_m^-), \\ \frac{1}{\mu_1}\tau_B^m &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{sh} az(a_m^+ + a_m^-) + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{ka}{k_\alpha}\operatorname{ch} az(a_m^+ - a_m^-) \\ &\quad + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\beta}\operatorname{sh} bz(b_m^+ - b_m^-) + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\beta}\operatorname{ch} bz(b_m^+ + b_m^-), \\ \frac{1}{\mu_1}\tau_P^m &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\alpha}\operatorname{ch} az(a_m^+ + a_m^-) + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{\Omega}{k_\alpha}\operatorname{sh} az(a_m^+ - a_m^-) \\ &\quad + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{kb}{k_\beta}\operatorname{ch} bz(b_m^+ - b_m^-) + 2\frac{\mu}{\mu_1}\frac{kb}{k_\beta}\operatorname{sh} bz(b_m^+ + b_m^-), \\ \frac{1}{\mu_1}\tau_C^m &= \frac{\mu}{\mu_1} b\operatorname{sh} bz(c_m^+ + c_m^-) + \frac{\mu}{\mu_1} b\operatorname{ch} bz(c_m^+ - c_m^-). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

可以看到,(43) 式和 § 5.4 中讨论多层弹性半空间中的平面波时的 § 5.4 (27) 式是完全相类似的,只是在 U、τ、$a^\pm$、$b^\pm$、$c^\pm$ 等量上多了角标 m.

与平面波问题一样,引入振幅应力列向量 $\boldsymbol{H}^m$，其转置 $\boldsymbol{H}^{mT}$ 为

$$\boldsymbol{H}^{mT} = \left[kU_B^m,\ kU_P^m,\ \frac{1}{\mu_1}\tau_P^m,\ \frac{1}{\mu_1}\tau_B^m,\ kU_C^m,\ \frac{1}{\mu_1}\tau_C^m\right]. \tag{44}$$

再引入振幅谱列向量 $\boldsymbol{K}^m$，其转置 $\boldsymbol{K}^{mT}$ 为

$$\boldsymbol{K}^{mT} = [k(a_m^+ + a_m^-),\ k(a_m^+ - a_m^-),\ k(b_m^+ - b_m^-),$$
$$k(b_m^+ + b_m^-),\ k(c_m^+ + c_m^-),\ k(c_m^+ - c_m^-)]. \tag{45}$$

由此可见，(43) 式代表了位移应力谱列向量和波振幅谱列向量之间的关系，这个关系可简记为

$$\boldsymbol{H}^m = \boldsymbol{D}(z) \cdot \boldsymbol{K}^m, \tag{46}$$

其中 $\boldsymbol{D}(z)$ 为二阶六行六列的准对角矩阵，它由一个四阶方阵和一个二阶方阵组成，其表达式可见在 § 5.4 中讨论平面波问题时定义的矩阵 $\boldsymbol{D}(z)$ 的表达式 § 5.4 (31) 式，这里不再重复写出. 由于 $\boldsymbol{D}(z)$ 是准对角矩阵，可见波振幅谱向量中的 $a_m^\pm$、$b_m^\pm$ 和 $c_m^\pm$ 之间是互不耦合的，由于 $a_m^\pm$、$b_m^\pm$、$c_m^\pm$ 分别对应 P 波，SV 波和 SH 波，因此可见 P 波，SV 波和 SH 波之间是互不耦合的.

与前面一样，由分界面上的位移连续和应力连续条件，可知第 i 层顶部的 $\boldsymbol{H}_i(0)$ 值与第 $i-1$ 层底部的 $\boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1})$ 值，即有 $\boldsymbol{H}_i(0) = \boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1})$. 其中 d_{i-1} 为第 $i-1$ 层的层厚，由此得

$$\boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1}) = \boldsymbol{H}_i(0) = D_i(0) \cdot \boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{K}_i \tag{47}$$

由 $\boldsymbol{D}_i(z)$ 的表达式 § 5.4 (31)，令 $z=0$ 可得 $\boldsymbol{D}_i(0)$，并定义 $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{D}_i(0)$，由此求得其逆矩阵 $\boldsymbol{E}_i^{-1}$，

$$\boldsymbol{H}_i(d_i) = \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{E}_i^{-1} \cdot \boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1}), \tag{48}$$

或有

$$\boldsymbol{H}_i(d_i) = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{H}_{i-1}(d_{i-1}). \tag{49}$$

我们便得到了位移应力谱向量的递推关系 (49) 式，其中

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot \boldsymbol{E}_i^{-1} = \boldsymbol{D}_i(d_i) \cdot [\boldsymbol{D}_i(0)]^{-1}. \tag{50}$$

$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{E}^{-1}$、$\boldsymbol{a}$ 的表达式可见 § 5.4 中的 (34)、(39)、(41) 式，这里不再重复写出.

与 § 10.1 讨论静态问题时完全一样，设位错源处于第 s 层中，可以用通过震源的水平面把这一层分成上下两层 (图 10.2). 上层令为 s' 层，下层为 s'' 层. 而 s' 层厚度为 h_s，即震源离第 s 层顶面的距离为 h_s. 与推导得 § 10.1 (64) 式的过程完全一样，可以得到

$$\boldsymbol{K}_n^m - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{H}_1^m(0) = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}^m, \tag{51}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-2} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1$$
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-1} \cdot \boldsymbol{a}_{n-2} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{a}_{s+1} \cdot \boldsymbol{a}_s(d_s - h_s)$$

$\boldsymbol{K}_n^m$ 为第 n 层的波的振幅谱列向量

$\boldsymbol{H}_1^m(0)$ 为位移应力谱列向量在自由表面的值.

而

$$\boldsymbol{S}^m = \boldsymbol{H}_s^m(h_s + 0) - \boldsymbol{H}_s^m(h_s - 0) \tag{52}$$

为源系数向量，它等于通过震源的水平面下面和上面的位移应力谱列向量之差，它反映了震源的性质.

与 § 10.1 中一样，由 $z \to \infty$ 时波的有限性得第 n 层即半无限介质层中波的振幅系数 $a_{mn}^+ = b_{mn}^+ = c_{mn}^+ = 0$，并由自由表面 z 向应力为零的条件及(51)式，则与 § 10.1 中(67)—(69) 的推导一样，可以立即求出自由表面的位移谱 $kU_B^m(0)$，$kU_P^m(0)$，$kU_C^m(0)$，其表达式

与 § 10.1 (69) 式完全一样.

而自由表面的位移谱为

$$\boldsymbol{U}(0)=\sum_{m}\int_{0}^{\infty}\boldsymbol{U}^{m}(0)kdk, \tag{53}$$

其中

$$k\boldsymbol{U}^{m}(0)=kU_{B}^{m}(0)\boldsymbol{B}_{m}+kU_{P}^{m}(0)\boldsymbol{P}_{m}+kU_{C}^{m}(0)\boldsymbol{C}_{m}.$$

如果将 $\boldsymbol{B}_m$、$\boldsymbol{P}_m$、$\boldsymbol{C}_m$ 与 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 之间的关系式 § 10.1 (13) 式代入上式便可得到 $k\boldsymbol{U}^m(0)$ 在 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 上的分量,有

$$k\boldsymbol{U}^{m}(0)=kU_{r}^{m}(0)\boldsymbol{e}_{r}+kU_{\varphi}^{m}\boldsymbol{e}_{\varphi}+kU_{z}^{m}(0)\boldsymbol{e}_{z}, \tag{54}$$

其中 $kU_r^m(0)$、$kU_\varphi^m(0)$、$kU_z^m(0)$ 与 § 10.1 中讨论静态问题时的 $kU_r^m(0)$、$kU_\varphi^m(0)$、$kU_z^m(0)$ 的表达式 § 10.1 (74) 式完全一样.

对所得结果取实部便得自由表面的位移谱的 m 阶值. 最后将所得的 $k\boldsymbol{U}^m(0)$ 代入 (40) 式便可得到自由表面的位移谱, 或再进行傅里叶反变换就可得到位移场, 这就是所要求出的结果.

与 § 10.1 完全类似,也很容易得到任意深度的位移谱和应力谱,这里不再赘述.

下面求 S_i^m, S_i^m 反映了震源处位移应力向量谱的不连续性, 因此与 § 10.1 中一样, 只要考虑能反映出震源处位移应力谱不连续性的公式 (25)、(26). 令 $z-h=+0$ 代入 (27) 式再一起代入 (25) 和 (26) 式便可得到刚好在通过震源的水平面下方的位移谱 $\boldsymbol{U}^m$ 和 z 方向面上的应力谱 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}^m)\cdot\boldsymbol{e}_z$.

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}_0^{m+}&=\left(\frac{k}{k_\alpha}i_m-\frac{b}{k_\beta}j_m\right)\boldsymbol{B}_m+\left(-\frac{a}{k_\alpha}i_m+\frac{k}{k_\beta}j_m\right)\boldsymbol{P}_m+k_m\boldsymbol{C}_m,\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_0^{m+})\cdot\boldsymbol{e}_z&=2\mu\left(-\frac{k}{k_\alpha}ai_m+\frac{\Omega}{k_\beta}j_m\right)\boldsymbol{B}_m+2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}i_m-\frac{k}{k_\beta}bj_m\right)\boldsymbol{P}_m-\mu bk_\beta\boldsymbol{C}_m.\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

由 $k\boldsymbol{U}_0^{m+1}$ 和 $\dfrac{1}{\mu_1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_0^{m+1})\cdot\boldsymbol{e}_z$ 可组成向量 $\boldsymbol{H}^{m'}(d_s-h_s+0)$.

同样在 (27) 式中令 $z-h=-0$, 代入 (25)、(26) 式便可得到刚好在通过震源的水平面的上方的位移谱和应力谱

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}_0^{m-}&=\left(\frac{k}{k_\alpha}i_m-\frac{b}{k_\beta}j_m\right)(-)^m\boldsymbol{B}_m+\left(\frac{a}{k_\alpha}i_m-\frac{k}{k_\beta}j_m\right)(-)^m\boldsymbol{P}_m+k_m(-)^m\boldsymbol{C}_m,\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_0^{m-})\cdot\boldsymbol{e}_z&=2\mu\left(\frac{k}{k_\alpha}ai_m-\frac{\Omega}{k_\beta}j_m\right)(-)^m\boldsymbol{B}_m+2\mu\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}i_m-\frac{k}{k_\beta}bj_m\right)\boldsymbol{P}_m\\ &\quad+\mu bk_m(-)^m\boldsymbol{C}_m\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

由 $k\boldsymbol{U}_0^{m-1}$ 和 $\dfrac{1}{\mu_1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}_0^{m-})\cdot\boldsymbol{e}_z$ 可组成向量 $\boldsymbol{H}^{m'}(d_s-h_s-0)$. 当然, 在上述各式中除 k、μ_1 外各与介质弹性常数有关的参数都取第 s 层介质的弹性常数. 由 $\boldsymbol{S}^m$ 的定义 (52) 式可知,

$$\boldsymbol{S}^m=\boldsymbol{H}^{m'}(d_s-h_s+0)-\boldsymbol{H}^{m'}(d_s-h_s-0).$$

由此得

表 10.4 位错源位移应力谱的源系数 S_i^m[4]

	(kl)						
	(11)	(22)	(33)	(23)	(31)	(12)	(11)+(22)+(33)
S_1^0	0	0	0	0	0	0	0
S_1^1	0	0	0	$-\frac{ik}{2\pi}$	$\frac{k}{2\pi}$	0	0
S_1^2	0	0	0	0	0	0	0
S_2^0	$-\frac{k}{2\pi}(1-2\gamma)$	$-\frac{k}{2\pi}(1-2\gamma)$	$\frac{k}{2\pi}$	0	0	0	$\frac{k}{2\pi}(4\gamma-1)$
S_2^1	0	0	0	0	0	0	0
S_2^2	0	0	0	0	0	0	0
S_3^0	0	0	0	0	0	0	0
S_3^1	0	0	0	0	0	0	0
S_3^2	0	0	0	0	0	0	0
S_4^0	$\frac{k}{2\pi}(4\gamma-1)\frac{\mu}{\mu_1}$	$\frac{k}{2\pi}(4\gamma-1)\frac{\mu}{\mu_1}$	0	0	0	0	$\frac{k}{\pi}(4\gamma-1)\frac{\mu}{\mu_1}$
S_4^1	0	0	0	0	0	0	0
S_4^2	$-\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	$\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0	0	0	$\frac{ik}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0
S_5^0	0	0	0	0	0	0	0
S_5^1	0	0	0	$\frac{ik}{2\pi}$	$-\frac{k}{2\pi}$	0	0
S_5^2	0	0	0	0	0	0	0
S_6^0	0	0	0	0	0	0	0
S_6^1	0	0	0	0	0	0	0
S_6^2	$\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	$-\frac{k}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0	0	0	$-\frac{ik}{2\pi}\frac{\mu}{\mu_1}$	0

$$\left.\begin{aligned}
S_1^m &= k\left(\frac{k}{k_\alpha}i_m - \frac{b}{k_\beta}j_m\right)(1-(-)^m),\\
S_2^m &= k\left(-\frac{a}{k_\alpha}i_m + \frac{k}{k_\beta}j_m\right)(1+(-)^m),\\
S_3^m &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\left(\frac{\Omega}{k_\alpha}i_m - \frac{bk}{k_\beta}j_m\right)(1-(-)^m),\\
S_4^m &= 2\frac{\mu}{\mu_1}\left(-\frac{ak}{k_\alpha}i_m + \frac{\Omega}{k_\beta}j_m\right)(1+(-)^m),\\
S_5^m &= kk_m(1-(-)^m),\\
S_6^m &= -\frac{\mu}{\mu_1}bk_m(1+(-)^m).
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

各种基本类型的位错源的源系数 S_i^m 的数值可将表 10.3 中的相应 i_m、j_m，k_m 值代入 (57) 式中得到，其结果由表 10.4 给出.

表 10.2 与表 10.4 是完全相同的. 这由 § 10.1 (38) 式给出的 δ 与 γ 之间的关系可以立刻得到证明. 也就是说位错的静态场与动态场的源系数 S_i^m 是完全相同的.

§ 10.3 兰 姆 问 题

下面从半无限弹性介质内的膨胀点源为例说明怎样用迴路积分的办法来求解位移场，这就是兰姆问题.

这里用位移势的方法来求解，当然用 § 10.1 及 § 10.2 中本征向量展开的方法可以直接求出位移场，但是直接求位移场的方法其表达式比较复杂.

一、柱坐标中用位移势来表达位移和应力

可用位移势 ϕ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 来表达位移场 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\phi}, \tag{1}$$

其中 ϕ、$\boldsymbol{\phi}$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \alpha^2\nabla^2\phi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}}{\partial t^2} = \beta^2\nabla^2\boldsymbol{\phi} \tag{3}$$

下面用柱坐标 (r, φ, z) 来表达 (1) 式，由于所讨论的问题无论是源或是边界条件都具有轴对称性，所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\phi_r}{\partial\varphi} = \frac{\partial\phi_z}{\partial\varphi} = 0,$$

由此，从 (1) 式可得

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\partial\phi_\varphi}{\partial z},\\
u_\varphi &= \frac{\partial\phi_r}{\partial z} - \frac{\partial\phi_z}{\partial \rho},\\
u_z &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_\varphi).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

位移的 u_r、u_z 分量只与 ϕ 和 ψ_φ 有关，相当于 P、SV 波；而 u_φ 只与 ψ_r、ψ_z 有关，相当于 SH 波。

在柱坐标中应力应变关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},\\ \sigma_{zr} &= \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中

$$\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

引入 χ，令

$$\psi_\varphi = -\frac{\partial \chi}{\partial r},$$

则易证 χ 满足方程

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \beta^2\nabla^2\chi \tag{6}$$

将 (4) 式中 u_r、u_z 的表达式代入 (5) 式并利用 (6) 式，可得

$$\sigma_{zz} = \mu\left[(2k_\alpha^2 - k_\beta^2)\phi + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + k_\beta\chi\right)\right].$$

$$\sigma_{zr} = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(2\frac{\partial\phi}{\partial z} + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + k_\beta^2\chi\right).$$

二、半无限弹性介质中爆炸点源的位移势

设在半无限弹性介质内有爆炸点源(膨胀点源)，它在无限介质中的位移势为

$$\phi = \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}, \tag{7}$$

这是爆炸点源位移势在频率域中的表达式，它把地下爆炸源模拟为产生地震纵波的波源。对于位错源，当 $R \gg \lambda$ 时（λ 为波长），所产生的位移场中亦有 $\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$ 或 $\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}$ 等项，因此讨论清楚了 (7) 式所代表的源的解，则其它类型的源可用类似的方法求出其位移势。

取 z 轴垂直向下，并取柱坐标，设源在 z 轴上，且离地面的距离为 d（图 10.3），设半无限介质中激发出的位移势为

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} - \frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'} + \int_0^\infty A(k)e^{-az}J_0(kr)dk,\\ \chi &= \int_0^\infty B(k)e^{-bz}J_0(kr)dk,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中

$$a = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}, \qquad b = \sqrt{k^2 - k_\beta^2},$$

$$R = \sqrt{(z-d)^2 + r^2}, \quad R' = \sqrt{(z+d)^2 + r^2}.$$

$\frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}$ 相当于相对地面的镜象虚源，或相当于地面的反射纵波，而 $\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}$ 为直达纵

波.

(8) 式中的 ϕ 满足波动方程 (2), χ 亦满足波动方程 (6), 且满足 $r=0$、$z=d$ 处的震源条件，除此外在半空间内无奇点. 而自由界面 $z=0$ 处的边界条件为

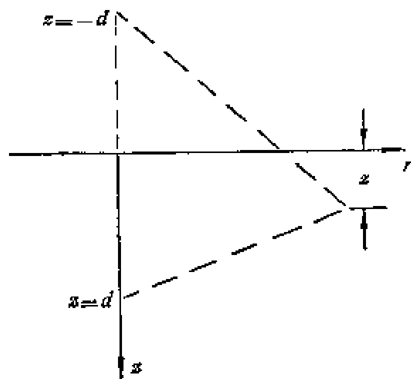


图 10.3

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zz}|_{z=0} &= \mu\left[(2k_\alpha^2-k_\beta^2)\phi+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right.\right.\\&\left.\left.\left.+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+k_\beta^2\chi\right)\right]\right|_{z=0}=0,\\ \sigma_{zr}|_{z=0} &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(2\frac{\partial\phi}{\partial z}+2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right.\right.\\&\left.\left.\left.+k_\beta\chi\right)\right]\right|_{z=0}=0.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

由兰姆-索末菲公式有

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}&=\int_0^\infty\frac{k}{a}e^{a(z-d)}J_0(kr)dk,\qquad z-d<0\\ \frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}&=\int_0^\infty\frac{k}{a}e^{-a(z+d)}J_0(kr)dk,\quad z+d>0\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

将 (10) 式代入 (8) 式再一起代入 (9) 式求得 $A(k)$、$B(k)$, (8) 式化为

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}-\frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}-\int_0^\infty\frac{8k^3b}{F(k)}e^{-a(d+z)}J_0(kr)dk,\\ \chi&=-\int_0^\infty\frac{4(2k^2-k_\beta^2)k}{F(k)}e^{-bz-ad}J_0(kr)dk,\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中

$$F(k)=(2k^2-k_\beta^2)^2-4abk^2.\tag{12}$$

三、在复平面内变换积分迴路

下面用在复平面内变换积分迴路的方法来求出 (11) 式中 $\int_0^\infty$ 积分的近似值. 首先化积分 $\int_0^\infty$ 为 $\int_{-\infty}^{+\infty}$. 将贝塞尔函数 J_0 换成汉克尔 (Hankel) 函数

$$J_0(kr)=\frac{H_0^{(1)}(kr)+H_0^{(2)}(kr)}{2},$$

$H_0^{(1)}(kr)$ 为第一类汉克尔函数，$H_0^{(2)}(kr)$ 为第二类汉克尔函数，则 (11) 式化为

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}-\frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}-\int_0^\infty\frac{4k^3b}{F(k)}e^{-a(z+d)}[H_0^{(1)}(kr)+H_0^{(2)}(kr)]dk,\\ \chi&=-\int_0^\infty\frac{2(2k^2-k_\beta^2)k}{F(k)}e^{-bz-ad}[H_0^{(1)}(kr)+H_0^{(2)}(kr)]dk.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

由汉克尔函数的性质有

$$H_n^{(1)}(-kr)=(-1)^{n+1}H_n^{(2)}(kr),\quad H_n^{(2)}(-kr)=(-1)^{n+1}H_n^{(1)}(kr).$$

由此, (13) 式可化为

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} - \frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'} + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k)dk,\\ \chi &= \int_{-\infty}^{\infty} X(k)dk,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Phi(k) &= -\frac{4k^3 b}{F(k)} e^{-a(z+d)} H_0^{(2)}(kr),\\ X(k) &= -\frac{2k(2k^2 - k_\beta^2)}{F(k)} e^{-bz-ad} H_0^{(2)}(kr).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

可见关键在于求出 (14) 式中的积分. 先设 k_α、k_β 为复数，且有负虚部，这相当于介质有吸收. 最后令虚部等于零，就得到问题的解. 把 k 也看作复数，可以看出，(14) 式中的被积函数在 k 的复平面内有四个支点，即 $k = \pm k_\alpha$，$k = \pm k_\beta$，它们使 $a = 0$ 或使 $b = 0$. 由此可知，对应的黎曼面共有四页，而选择这样的黎曼面使在它的上面 $\mathrm{Re}\, a \geqslant 0$，$\mathrm{Re}\, b \geqslant 0$，因此划定黎曼面的割线由 $\mathrm{Re}\, a = 0$ 及 $\mathrm{Re}\, b = 0$ 给出，也就是要求在割线上 $k^2 - k_\alpha^2$ 为负实数. 令

$$k = \xi + i\eta, \quad k_\alpha = s_\alpha + i\sigma_\alpha.$$

则有

$$k^2 - k_\alpha^2 = (\xi^2 - \eta^2) - (s_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2) + i2(\xi\eta - s_\alpha\sigma_\alpha).$$

即得

$$\xi\eta - s_\alpha\sigma_\alpha = 0, \tag{16}$$

$$(\xi^2 - \eta^2) - (s_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2) < 0. \tag{17}$$

割线必须满足关系式 (16)、(17). 由 (16) 可见它是一对双曲线，由 (17) 式可见割线只是双曲线的一部分 (图 10.4).

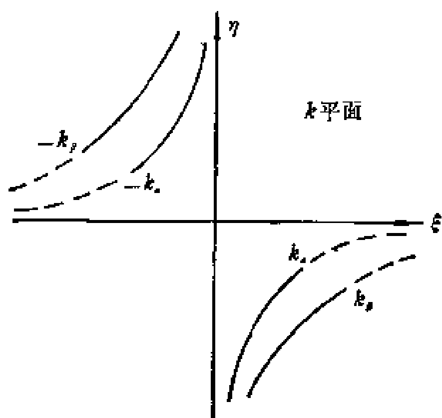


图 10.4 k 平面上的割线及黎曼面的取法

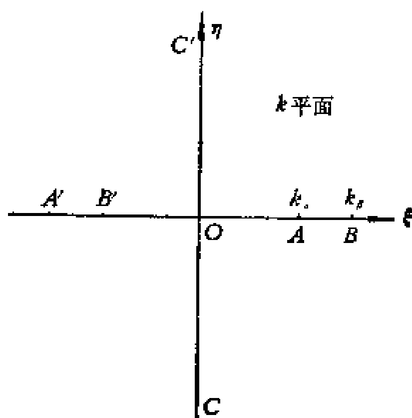


图 10.5 k_α 为实数时的割线

当 $k_\alpha \to$ 实数，即 $\sigma_\alpha \to 0$ 时，(16) 及 (17) 式化为

$$\left.\begin{aligned}&\xi\eta = 0,\\ &\xi^2 - \eta^2 < s_\alpha^2 = k_\alpha^2.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

这时割线的形状为图 10.5 中 AOC、$A'OC'$. 对通过 $k = \pm k_\beta$ 的割线亦可作类似的讨论. 而在图 10.5 中为 BOC 和 $B'OC'$.

由图 10.4 可见割线只是双曲线的一部分(图中实线部分)，在割线上分别有 $\mathrm{Re}\, a = 0$，

或 Re $b=0$. 而在双曲线的非割线部分(虚线部分)上，有 Im $a=0$ 或 Im $b=0$，它们把 k 平面的第三、四象限分成了 Im $a>0$ 部分及 Im $a<0$ 部分，或者分成了 Im $b>0$ 部分及 Im $b<0$ 部分.

在复 k 平面的第三、四象限作迴线如图 10.6 所示. 由哥西定理可知

$$\oint \Phi(k)dk=\left(\int_M^N+\int_N^H+\int_{L_a}+\int_{L_b}+\int_G^M\right)\Phi(k)dk=2\pi i\Sigma\,\text{Res} \tag{19}$$

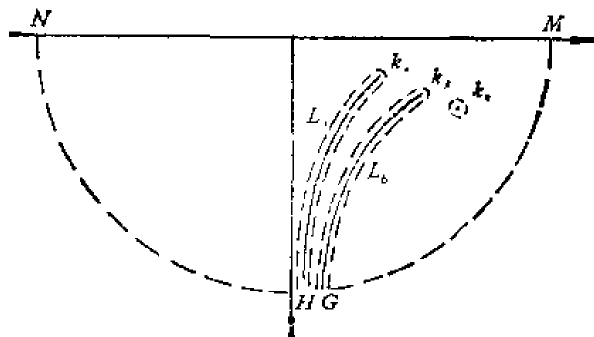


图 10.6

其中 Σ Res 为 $\Phi(k)$ 在下半平面内所有的留数之和.

由于 (14) 式中被积函数中有因子 $H_0^{(2)}(kr)$，当 k 充分大时有

$$H_0^{(2)}(kr)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{20}$$

而 $r>0$，且当 $k\to\infty$ 时

$$\frac{4k^2b}{\sqrt{k}\;F(k)}\,e^{-a(z+d)}\to 0,$$

由约当引理可知，当 $k\to\infty$ 时，即当弧 $\widehat{NH}$ 和 $\widehat{GM}$ 的半径无限增大时，

$$\int_N^H\Phi(k)dk\to 0 \quad 及 \quad \int_G^M\Phi(k)dk\to 0.$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)dk=\left(\int_{L_a}+\int_{L_b}\right)\Phi(k)dk-2\pi i\Sigma\,\text{Res} \tag{21}$$

其中

$$\int_{L_a} 和 \int_{L_b} 为沿割线的迴线的积分.$$

由 (14) 式可见为求出被积函数在 k 的下半平面内的留数之和，只须求出 $F(k)$ 在下半平面内的零点，设为 k_0 (见图 10.6)，则有

$$\phi_{\text{Res}}=-2\pi i\Sigma\,\text{Res}=8\pi i\,\frac{k_0^2b_0}{F'(k_0)}\,e^{-a_0(z+d)}H_0^{(2)}(k_0r). \tag{22}$$

对 (14) 式中的 χ 亦可作同样的计算，得

$$\chi_{\text{Res}}=4\pi i\,\frac{k_0(2k_0^2-k_\beta^2)}{F'(k_0)}\,e^{-b_0z-a_0d}H_0^{(2)}(k_0r). \tag{23}$$

在 (22)、(23) 式中

$$a_0=\sqrt{k_0^2-k_\alpha^2}, \quad b_0=\sqrt{k_0^2-k_\beta^2}.$$

当 $k_0 r\gg 1$ 时，由 $H_0^{(2)}(k_0 r)$ 的渐近式 (20) 可得

$$\phi_{\rm Res}\simeq-\frac{8\sqrt{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}k_0^{\frac{5}{2}}b_0}{F'(k_0)}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-a_0(z+d)}e^{-ik_0 r},$$

$$\chi_{\rm Res}\simeq-\frac{4\sqrt{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}k_0^{\frac{3}{2}}(2k_0^2-k_\beta^2)}{F'(k_0)}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-b_0 z-a_0 d}e^{-ik_0 r}. \tag{24}$$

(24) 式代入 (1) 式就可求出 (14) 式中分出的留数部分的位移，可证在 $z=0$ 的平面上即在自由表面上位移为一逆进椭圆，实际上它就是瑞利波。因此 (14) 式可化为

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R}-\frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}+\phi_{\rm Res}+\int_{L_a}\Phi(k)dk+\int_{L_b}\Phi(k)dk,\\ \chi&=\chi_{\rm Res}+\int_{L_a}X(k)dk+\int_{L_b}X(k)dk.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

四、用最速落径法求出沿割线的迴路积分的近似值

下面用最速落径法(或鞍点法)[45,63]来求出 (25) 式中沿割线的迴路积分 $\int_{L_a}$ 和 $\int_{L_b}$. 在附录五中介绍了最速落径法。

当 $kr\gg 1$ 时，$H_0^{(2)}(kr)$ 可以近似用 (20) 式表达，由此 (25) 式 ϕ 中的积分式

$$I_\phi=\int_{L_a+L_b}\Phi(k)dk\simeq-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r}}e^{i\frac{\pi}{4}}\int G_1(k)e^{f_1(k)r}dk, \tag{26}$$

其中

$$G_1(k)=\frac{k^2\sqrt{k}\,b}{F(k)}, \tag{27}$$

$$f_1(k)=-a\frac{d+z}{r}-ik. \tag{28}$$

鞍点 k_1 应满足下式

$$f_1'(k_1)=i\frac{k_1}{\sqrt{k_\alpha^2-k_1^2}}\frac{d+z}{r}-i=0, \tag{29}$$

也即满足

$$r=\frac{k_1}{\sqrt{k_\alpha^2-k_1^2}}(d+z)=\frac{u_1}{\sqrt{1-u_1^2}}(d+z), \tag{30}$$

其中

$$u_1=\frac{k_1}{k_\alpha}. \tag{31}$$

由 (29) 式可得

$$f_1''(k_1)=i\frac{k_\alpha^2}{(k_\alpha^2-k_1^2)^{3/2}}\frac{z+d}{r}. \tag{32}$$

由附录五中的 (13) 式可知，用通过鞍点的最速落径作为积分迴路，则可近似求得 (26) 式中的积分式

$$I_\phi \simeq -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r}} e^{i\frac{\pi}{4}} G_1(k_1) \frac{\sqrt{2\pi}}{|rf_1''(k_1)|^{1/2}} e^{rf(k_1)+i\chi}.$$

由附录五中的 (11) 式可知，$e^{i2\chi}f''(k_1)$ 为负实数，结合 (32) 式可知 $e^{i2\chi}=i$，因此有

$$\chi = \frac{\pi}{4},$$

并结合 (32) 式可得

$$I_\phi \simeq 8\frac{k_1^{\frac{5}{2}}(k_\beta^2-k_1^2)^{1/2}}{F(k_1)}\left[\frac{(k_\alpha^2-k_1^2)^{3/2}r}{k_\alpha^2(z+d)}\right]^{1/2}\frac{1}{r}e^{-i[\sqrt{k_\alpha^2-k_1^2}(z+d)+rk_1]}. \tag{33}$$

令

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \sin\theta, \\ C &= \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k_\beta}{k_\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

则可得

$$I_\phi \simeq \frac{8\sin^3\theta\cos\theta(C^2-\sin^2\theta)^{1/2}}{(2\sin^2\theta-C^2)^2+4\sin^2\theta\cos\theta(C^2-\sin^2\theta)^{1/2}}\frac{1}{r}e^{-ik_\alpha[(z+d)\cos\theta+r\sin\theta]}. \tag{35}$$

(35) 式代表震源发出的 P 波（纵波）在自由表面上反射后仍为 P 波（称为 PP 波）的位移势，因此这一项应与 $\frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}$ 项合并在一起考虑．事实上我们只是把 PP 波预先分出了一部分而用 $\frac{e^{-ik_\alpha R'}}{R'}$ 来表达它的位移势.

对 (14) 式中位移势 χ 的表达式有

$$\chi = \chi_{\text{Res}} + \int_{L_a+L_b}\chi(k)dk, \tag{36}$$

其中

$$X(k) = -\frac{2k(2k^2-k_\beta^2)}{F(k)}e^{-bz-ad}H_0^{(2)}(kr).$$

当 $kr \gg 1$，则有

$$I_\chi = -\sqrt{\frac{2}{\pi r}}e^{i\frac{\pi}{4}}\int_{L_a+L_b}G_2(k)e^{f_2(k)r}dk, \tag{37}$$

其中

$$G_2(k) = \frac{2\sqrt{k}(2k^2-k_\beta^2)}{F(k)}, \tag{38}$$

$$f_2(k) = -i\left(k+\frac{z}{r}\sqrt{k_\beta^2-k^2}+\frac{d}{r}\sqrt{k_\alpha^2-k^2}\right). \tag{39}$$

下面求鞍点 k_2，鞍点 k_2 应满足下列方程

$$f_2'(k_2) = i\frac{k_2}{\sqrt{k_\beta^2-k_2^2}}\frac{z}{r} + i\frac{d}{r}\frac{k_2}{\sqrt{k_\alpha^2-k_2^2}} - i = 0, \tag{40}$$

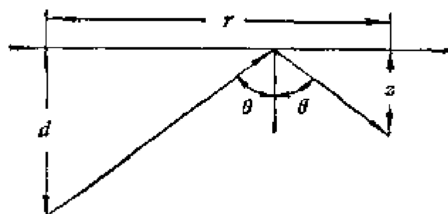


图 10.7

因此鞍点满足

$$r = \frac{k_2}{\sqrt{k_\beta^2 - k_2^2}} z + \frac{k_2}{\sqrt{k_\alpha^2 - k_2^2}} d. \tag{41}$$

如令

$$\left.\begin{aligned} &k_2 = k_\alpha u_2, \quad u_2 = \sin\theta, \\ &\sin f = \frac{\beta}{\alpha}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

则 (41) 式可化为

$$r = \frac{u_2}{\sqrt{C^2 - u_2^2}} z + \frac{u_2}{\sqrt{1 - u_2^2}} d = z\tan f + d\tan\theta. \tag{43}$$

由 (40) 式可得

$$\begin{aligned} f_2''(k_2) &= i\frac{k_\beta^2}{(k_\beta^2 - k_2^2)^{3/2}}\frac{z}{r} + i\frac{k_\alpha^2}{(k_\alpha^2 - k_2^2)^{3/2}}\frac{d}{r} \\ &= i\left(\frac{1}{k_\beta\cos^3 f}\frac{z}{r} + \frac{1}{k_\alpha\cos^3\theta}\frac{d}{r}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

连续变化 (37) 式中的积分迴路 $L_a + L_b$，使通过 $X(k)$ 的鞍点 k_2，则可用通过鞍点 k_2 的最速落径作为积分迴路，用鞍点 k_2 附近的一段最速落径的迴路积分作为积分 (37) 的近似值，利用附录五中 (13) 式可得

$$I_\chi \simeq -i\frac{4\sqrt{k_2}(2k_2^2 - k_\beta^2)}{F(k_2)|f_2''(k_2)|^{1/2}}\frac{1}{r}e^{-ir\left(k_2 + \frac{d}{r}\sqrt{k_\alpha^2 - k_2^2} + \frac{z}{r}\sqrt{k_\beta^2 - k_2^2}\right)}. \tag{45}$$

利用 (42) 式和 (44) 式可将上式表达为

$$I_\chi \simeq -\frac{i4\sqrt{\sin\theta}(2\sin^2\theta - C^2)}{[(2\sin^2\theta - C^2)^2 + 4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{C^2 - \sin^2\theta}]\left[\frac{1}{C\cos^3 f}\frac{z}{r} + \frac{1}{\cos^3\theta}\frac{d}{r}\right]^{1/2}} \cdot \frac{1}{r}e^{-i(rk_\alpha\sin\theta + dk_\alpha\cos\theta + zk_\beta\cos f)}. \tag{46}$$

(46) 式代表震源发出的 P 波在自由表面上反射后为 SV 波（称为 PS 波）的位移势，其射线路径见图 10.8.

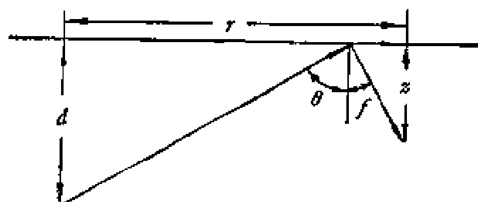


图 10.8

计算积分 $\int_{L_a + L_b}$ 有几种方法. 这里用的是最速落径法，用它可以迅速算出积分的主要部分，即算出主要的波，而略去了其它较弱的波. 直接沿割线进行计算的方法可见欧文等的著作[45]中的第二章，傅承义先生提出了另一种计算方法[64]，可以算出较弱的侧面波. 多层弹性半空间问题原则上也可以用上述方法来求解，但是层数越多，求解时越繁复.

第十一章　地震记录及震相特征

§11.1　地震仪简介

地震发生时激发出地震波．当这些地震波到达地面时，便引起地面的运动．记录这种运动的仪器称为地震仪．一般它记录的是地动位移，但也可以记录地面运动的速度或加速度．

早在公元132年我国东汉朝代的张衡就创制了地动仪．地动仪的八个方位有八龙含珠，如任一方向有地震发生，那个方向的龙所含的珠就从口中吐出，下有蟾蜍张口接着．地动仪安装的当年，“尝一龙机发，而地不觉动，京师学者咸怪其无征．后数日，驿至，果震陇西，于是皆服其妙”．现代的地震仪性能当然要好得多，并且有多种类型．总结起来，可用下列方框图表示其组成部分(图11.1)．

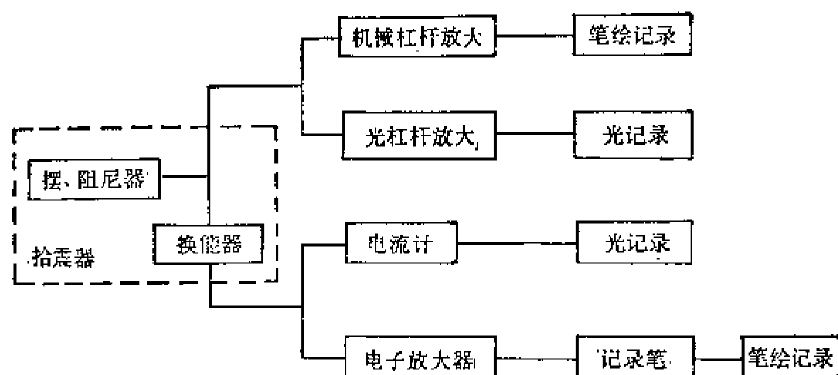


图11.1　地震仪系统方框图

地震仪由拾振器、放大器、记录器和记时器组成．拾振器通常包括摆、换能器和阻尼器．摆负责拾取地面的运动．它由惯性体(重锤)和悬挂系统组成．惯性体通过悬挂系统悬挂在摆的支架上，支架置于地面．当地面运动时，支架随地面一起运动；由于惯性体有保持原有位置不动的趋势，因而使惯性体与支架之间发生相对运动．这就是摆的基本工作原理．上述相对运动可以通过机械杠杆放大或通过光杠杆放大，再直接进行笔绘记录或光记录．也可以把这种相对运动的机械能通过换能器变成电能(例如通过线圈在磁场中的运动来实现这种变换)，使产生电动势．这种电动势可以通过适当的匹配后直接输入电流计进行光记录，或经电子放大后推动记录笔实现笔绘记录．阻尼器提供适当的阻尼，使拾振器的输出能正确地反映地动．

地动位移是一个矢量，可以通过矢量在 x, y, z 三坐标轴上的分量来表示．通过地震仪记录北南、东西、上下三个方向的地动位移分量，便可完整地表达真实的地动情况．

地震仪对不同频率的地动位移有不同的反应．以拾振换能器-积分放大器-线性记录笔系统(例如 DD-1 地震仪)为例，设地动位移为

$$X(t) = X_m \sin \omega t, \tag{1}$$

则笔绘记录的稳态解为

$$y = s_1\beta_{12}\frac{k_2}{\tau_2}\beta_{23}s_3\widetilde{U}_1\widetilde{U}_2\widetilde{U}_3X_m\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3\right) \tag{2}$$

其中

s_1. 为拾震器的电压灵敏度；

β_{12}. 为换能器-电子积分放大器的耦合分压系数；

k_2. 为电子积分放大器的无积分放大倍数；

τ_2. 为电子积分放大器的积分时间常数；

β_{23}. 为电子积分放大器-线性记录笔的耦合分压系数，一般它的值近似为1；

s_3. 为线性记录笔的直流电压灵敏度(输入单位直流电压时笔尖的偏移值)；

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{U}_1 &= \frac{1}{\sqrt{(1-u_1^2)^2 + 4D_1^2u_1^2}};\\
\widetilde{U}_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega\tau_2}\right)^2}};\\
\widetilde{U}_3 &= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{u_3^2}\right)^2 + 4\frac{D_3^2}{u_3^2}}};\\
\phi_1 &= \tan^{-1}\frac{2D_1u_1}{1-u_1^2};\\
\phi_2 &= \tan^{-1}(-\omega\tau_2);\\
\phi_3 &= \tan^{-1}\frac{2D_3u_3}{1-u_3^2};
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$\widetilde{U}_1$、$\widetilde{U}_3$. 分别是摆、线性记录笔的归一化振幅频率特性；

$\widetilde{U}_2$. 为积分放大器的归一化积分振幅频率特性；

ϕ_1、ϕ_3. 分别是摆、线性记录笔的相位频率特性；

ϕ_2. 为积分放大器的积分相位频率特性；

$u_1 = \frac{n_1}{\omega}$. 为摆的固有振动角频率 n_1 与地动角频率 ω 之比；

$D_1 = \frac{\varepsilon_1}{n_1}$. 为摆的阻尼常数，而其中 ε_1 为摆的阻尼系数；

$u_3 = \frac{n_3}{\omega}$. 为线性记录笔的固有振动角频率 n_3 与地动角频率 ω 之比；

$D_3 = \frac{\varepsilon_3}{n_3}$. 为线性记录笔的阻尼常数，而其中 ε_3 为线性记录笔的阻尼系数；

因此，地震仪的稳态放大率为

$$A_{INS}(\omega) = \frac{s_1\beta_{12}k_2\beta_{23}s_3}{\tau_2}\widetilde{U}_1\widetilde{U}_2\widetilde{U}_3,$$

地震仪的归一化振幅频率特性为

$$\widetilde{U} = \widetilde{U}_1\widetilde{U}_2\widetilde{U}_3;$$

而其相位频率特性为

$$\phi_{INS}(\omega) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \frac{\pi}{2}.$$

DD-1 型地震仪就是这种类型的仪器. 其归一化振幅频率特性 $\widetilde{U}$ 随地动周期 T_ω 的变化表示在图 11.2 a 中.

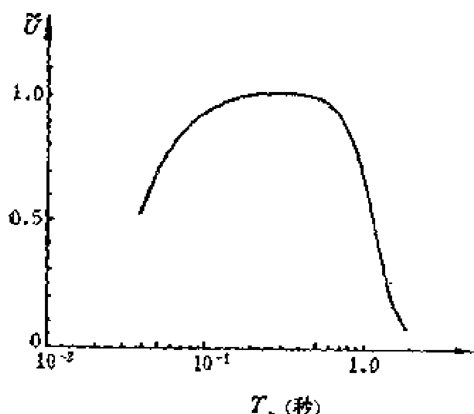


图 11.2 (a) DD-1 型地震仪振幅频率特性(归一化)

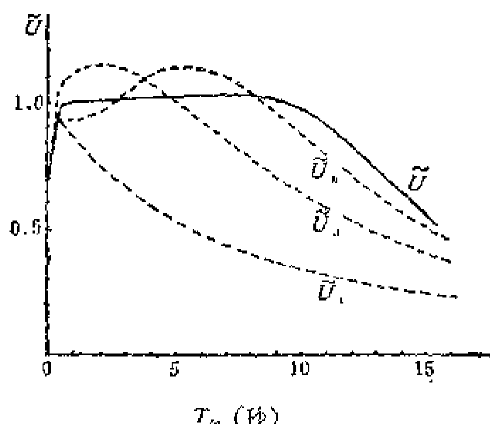


图 11.2 (b) 基式仪的稳态振幅频率特性(实线 $\widetilde{U}$) 和暂态振幅频率特性 (虚线 $\widetilde{U}_I\widetilde{U}_{II}\widetilde{U}_{III}$)

拾震器-电流计-光记录地震仪以基式仪为例,其稳态放大率为

$$A_{INS}(\omega) = \frac{2A_0}{l_0}\sqrt{\frac{J_1}{J_2}}\sqrt{\frac{D_1T_2}{D_2T_1}}\sigma^2 \frac{2\dfrac{D_2}{T_2}}{\sqrt{T_\omega^{-2} + a + bT_\omega^2 + cT_\omega^4 + dT_\omega^6}}, \tag{4}$$

其归一化振幅频率特性为

$$\widetilde{U} = \frac{A_{INS}(\omega)}{A_{INS}(\omega)_{\max}}; \tag{5}$$

而相位频率特性(相位响应)为

$$\phi_{INS}(\omega) = \tan^{-1}\frac{sT_\omega^4 - pT_\omega^2 + 1}{qT_\omega^3 - mT_\omega}. \tag{6}$$

以上三个式中

A_0. 光杠杆长度; l_0. 摆的折合摆长;

J_1. 摆的转动惯量; J_2. 电流计的转动惯量;

T_1. 摆的固有周期; T_2. 电流计的固有周期;

D_1. 摆的阻尼常数; D_2. 电流计的阻尼常数;

σ^2. 摆与电流计的耦合系数;

$$a = m^2 - 2p,$$

$$b = p^2 - 2mq + 2s,$$

$$c = q^2 - 2ps,$$

$$d = s^2,$$

$$m = 2\left(\frac{D_1}{T_1} + \frac{D_2}{T_2}\right),$$

$$p = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{4D_1D_2}{T_1T_2}(1 - \sigma^2),$$

$$q = 2\left(\frac{D_1}{T_1T_2^2} + \frac{D_2}{T_2T_1^2}\right),$$

$$s=\frac{1}{T_1^2T_2^2}.$$

图 11.2 *b* 中的实线为基式仪归一化振幅频率特性 $\widetilde{U}$。

地震仪振幅频率特性曲线上幅度超过最大幅值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍的频率范围称为地震仪的通频带. 地震仪的通频带在低频端受到摆的固有振动周期不容易做得很大的限制. 而在高频端受到记录笔的固有振动频率不能做得很高的限制. 由图 11.2 *a*、*b* 可知，目前我们常用的 *DD*-1 型短周期地震仪的通频带约在 0.1—1 秒的量级范围，中长周期基式地震仪的通频带在 1—10 秒的量级范围，而 *DK*-1 型宽带地震仪的通频带在 0.1—10 秒的量级范围. 由于通频带的范围不同，因而同一地震在不同仪器的记录图上的记录特征不同(图 11.3)，这在分析地震记录时必须注意.

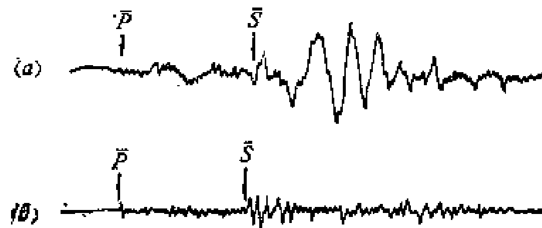


图 11.3 频率特性不同的地震仪记录同一个地震
(*a*) 中长周期地震仪的记录图 (*b*) 短周期地震仪的记录图

上面讲的是地震仪稳态频率特性. 除此之外，地震仪还有暂态频率特性或初动特性. 地震记录由静止状态变成稳态要有一个过程，暂态特性则反映了这个过程. 地震仪的暂态特性在很大程度上是受到摆的暂态特性的影响. 设地面由静止开始做正弦振动，即地动位移为

$$X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ X_m\sin\omega t & t\geqslant 0\end{cases} \tag{7}$$

令 l_0 为摆的折合摆长，摆的重心到转动轴的连线上距转动轴为 l_0 的点称为摆的振动中心. 令 x_c 为摆的振动中心的位移，且设阻尼常数 $D_1<1$，则有

$$x_c=Ae^{-\varepsilon_1 t}\sin(\nu_1 t+\delta)-\widetilde{U}_1X_m\sin(\omega t+\phi_1) \tag{8}$$

其中 $\widetilde{U}_1$、ϕ_1 见 (3) 式，$\nu_1=\sqrt{n_1^2-\varepsilon_1^2}$，这儿 n_1 和 ε_1 仍分别表示摆的固有角频率和阻尼系数. 而 A 和 δ 是取决于初值条件的常数：

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{u_1}{\sqrt{1-D_1^2}}\widetilde{U}_1X_m\\ \delta&=\tan^{-1}\frac{2D_1\sqrt{1-D_1^2}}{1-u_1^2-2D_1^2}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

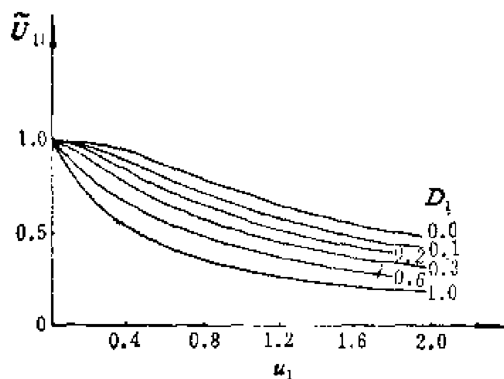


图 11.4

图 11.4 给出了当地动位移为 (7) 式时，x_c 的第一个极值 $\widetilde{U}_{11}$ 的归一化振幅随 u_1 及 D_1 的变化情况. 地震仪总的暂态频率特性虽主要受摆的暂态特性影响，但放大器、记录笔等部分的暂态特性也都起作用. 不同类型的地震仪的暂态特性也不同. 图 11.2 *b* 中的虚线是

基式仪暂态振幅频率特性曲线，$\widetilde{U}_{I}$，$\widetilde{U}_{II}$，$\widetilde{U}_{III}$ 分别对应于起始三个振动的极值．从图上看到，暂态振幅频率特性曲线与稳态振幅频率特性曲线（图中的实线 $\widetilde{U}$）有很大差别，尤其是 $\widetilde{U}_{I}$ 最为明显．因此，求地动位移的初动振幅时，要特别注意，应尽可能使用暂态特性曲线而不要使用稳态特性曲线．

上面简单叙述了地震仪工作原理．详细情况可参阅有关的专门著作．

地震仪本身现在已发展得比较完善了．近年来，地震仪系统的研究和发展着重在以下几个方面：

1. 拾振器周期的延长

除了采用精密设计、制造的悬挂系统外，目前还使用了电子反馈的方法来延长拾振器的周期并稳定其零点位置．特别是要求拾振器本身做得比较小时，电子反馈的方法显示了它极大的优越性．为了提高换能效率，在长周期地震仪中常采用电容换能器，它输出的电信号经过放大后通过低通滤波器（时间常数可达数百秒乃至数千秒）反馈回摆中去（图11.5）．当摆的零点漂走时，其输出的电信号就通过低通滤波器反馈送入反馈换能器，使摆的零点校正到接近于原有平衡位置．如零点的漂移进一步增大而即将超出反馈换能器的作用范围时，就启动机械装置自动调整零点．通过上述办法解决了长周期地震仪中最困难的零点漂移问题，从而使摆的周期可以做得比较长．美国的登月长周期地震仪便采用了这种系统．

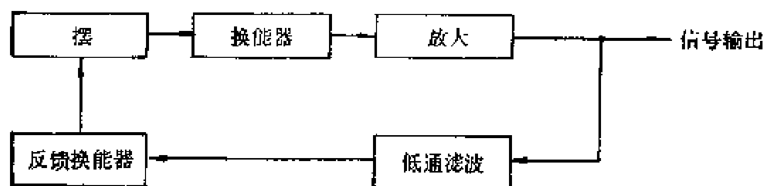


图 11.5

2. 信噪比的提高

可以在互相垂直的两条直线上等距离的布置拾振器（称为台阵），将各拾振器的信号集中到资料处理中心，各拾振器上记到的地震信号之间具有一定的相关性，如台阵有足够大的尺度，则各拾振器输出的一些干扰信号（噪声）可看作是随机的，因此如把各拾振器的输出通过一定的方式叠加，便可适当地增大地震信号而压制了干扰，从而提高了信噪比．

台阵布置的方式不只是这一种，可以是多种多样的，例如也可以以一点为中心向四周以一定的花样布置拾振器．令 n 为拾振器的个数，若噪音是随机的，则可以证明，通过台阵可以将信噪比提高到 $\sqrt{n}$ 倍．

3. 信号的遥测

利用近代的遥测技术，可将拾振器输出的电信号放大后经过频率调制（FM）或脉冲编码调制（PCM）等方式，将记录到的多路地震信号通过一个传输通道（有线或无线）传输到数十、数百乃至数千公里之外，以便将各地的地震信号集中到资料处理中心来集中处

理.

4. 资料的自动处理

由于近代电子计算机的发展，已使地震资料的自动处理变成现实. 在处理之前，首先要通过遥测手段把各台站所记到的地震信号变成电信号输送到资料处理中心，并且要把这些地震信号数字化后，再送入资料处理系统. 这个系统又可分为下列各个部分：① 延时系统；②地震鉴别系统；③资料处理系统；④信号贮存系统. 其方框图见图 11.6. 各路地震数字信号同时进入延时系统和地震鉴别系统，当地震鉴别系统鉴别出地震信号时，则立即启动处于等待状态的资料处理系统和磁带贮存器，对延时系统输出的地震信号进行资料自动处理和信号贮存，资料处理的结果也输入贮存系统. 延时系统的时间延迟的长短取决于鉴别系统鉴别出地震信号所需时间，一般为数十秒. 延时系统由硬件构成，如输入的是地震数字信号，则可用大规模集成电路做成的移位寄存器构成延时系统. 利用通用的电子计算机配上适当的软件便可构成鉴别系统和资料处理系统. 贮存系统则使用磁带机.

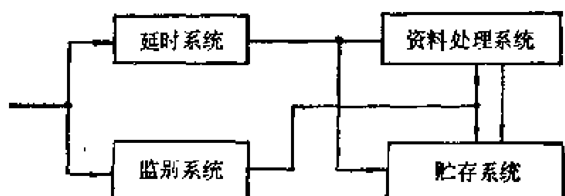


图 11.6

§ 11.2 地震记录特征和震相出现规律

地震释放的应变能，其中的一部分以地震波的形式在地球介质中传播. 当它到达地震台时，地震仪把地面振动分解成北南、东西、上下三个分量放大记录下来，这就是地震图.

地震图的形态较复杂. 其中有一些显著的振动，与震源所发出的不同性质（如 P 与 S）或性质相同但传播路径不同（如 P 和 PP）的地震波相对应，叫做震相. 震相在本质上就是地震波.

地震图上的主要震相可以分为三类：纵波类、横波类和面波类. 每一类中的具体震相，随距离都有变化.

不同震相的辨认，主要依据它们的不同特征. 这些特征可以分为两类. 一类是运动学特征，即震相的走时（或到时），它依赖于传播路径和传播速度. 另一类是动力学特征，即震相的振动方向、振幅、周期、相位等，它与震源性质、传播介质特性、记录仪器性能等有关. 因此可以说，震相以它的运动学和动力学特征，带给我们有关震源和地球介质的许多信息. 这对研究地球内部构造和研究地震成因、地震预报都有重要意义.

由于地球的分层结构和曲率影响，不同震中距离范围内所能观测到的震相种类不同. 同时，在传播过程中能量的耗散，使某些震相振幅微弱而淹没于其它震相中. 或者在某些

距离上，几个同时到达的震相重叠，难以一一区分．因此，并不是从地震图上都能识别出理论上应当存在的全部震相．而且，在复杂的地球介质、传播途径、台址地基、仪器性能和震源性质的影响下，就是一定震相的记录形态也是有变化的．但是，经过人们的长期实践，发现一些主要震相的出现还是有规律的，下面对此作简要的叙述．需强调指出，以下所提到的记录特征，近震是指 62、DD-1 型短周期仪器记录，远震是基式仪记录．

一、浅震记录特征和震相出现规律

浅震，一般指震源在地壳内的地震．习惯上又把深度小于 60 公里的地震叫做浅震．

第一段：$\Delta < 10°$

此为近震范围，记录震相基本上都在地壳中传播．整个记录延续时间短，一般不超过 5 分钟．震相周期短，震相相隔时间短，相互叠加，整个形态显得拥挤．

当 $\Delta < 1°$ 时，通常叫做地方震．其主要震相为直达波 $\bar{P}$、$\bar{S}$．大约在 70 公里(具体数值因地壳厚度和震源深度而异)之后，$\bar{P}$ 后面有比它强的莫霍界面上的反射波 P_{11}，在 $\bar{S}$ 之后有 S_{11}．在此距离之前，P_{11}、S_{11} 的振幅相对来说比较小，而被淹没了(图 11.7，11.8)．

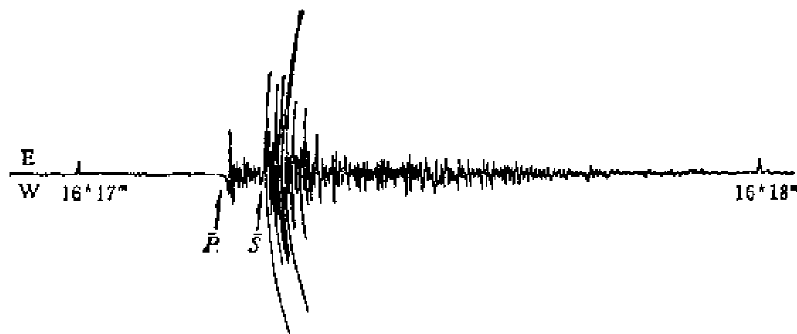


图 11.7 1973.3.12. 安徽霍山地震 $M = 2$ 漫水河台记录 $\bar{S} - \bar{P} = 3.4$ 秒

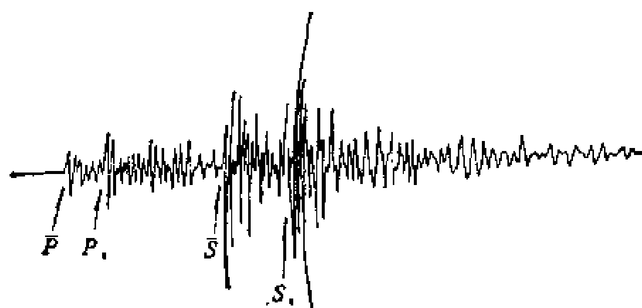


图 11.8 1973.5.21. 山西应县地震东冶台记录 $\bar{S} - \bar{P} = 13.4$ 秒

约在 1°(具体数值因地壳结构和震源深度而异)附近，莫霍界面首波 P_n、S_n 开始出现．但在地震图上能够清楚地看到它们，却是在 $\Delta_1 \simeq 1.5°$(具体数值因地壳结构和震源深度而异)以后．因为在 $\Delta > \Delta_1$ 之后，地震图上初至波已由直达波 $\bar{P}$ 变成首波 P_n，在横波波段的初至相也由 $\bar{S}$ 变成 S_n．在 Δ_1 之前，测定地震基本参数使用 $\bar{P}$、$\bar{S}$；而在此之后，则主要使用 P_n、S_n．因此，在整个近震范围内，人们又常把 $\Delta < \Delta_1$ 的地震称作地方震(如前所述，一般称 $\Delta < 1°$ 为地方震)；而把 $\Delta > \Delta_1$ 的称为近震，其震相出现规律一般为 P_n，

表 11.1

震相	速度	周期	频散	记录形态	振动轨迹	传播途径	哪些地区的地震在我国地震台上出现该震相	观测距离	可能的形成机制
PL（漏能式面波）	与 P 波速度几乎相同	10″—30″	正频散	波列形态，衰减较快	入射面内的前进椭圆	与面波类似，沿地表传播	我国台湾省、日本琉球地区的地震，在我国大陆上沿海地区的台站上可记到该震相	大约为 381—2810 公里	在入射角小于全反射角时，P 波在地壳中多次反射而形成。每次反射都有一部分能量由折射 S 波带走，故称为漏能式面波
π_g	6.1 公里/秒	1″—6″		是一种振幅小、起始平缓，一般大约为 3—4 个周期的波列。在纵波发育的分向上记得较好	与 P 波相同	在花岗岩层中传播	欧亚大陆内部的地震在我国台站上可以观测到该震相	在 5°—40° 内，该震相时有时无，与地壳结构有关	纵波在花岗岩层中的导波
L_I	3.79 公里/秒	<5″		水平分向的地震图上较强，振幅弱小，但随震中距增大并不很快衰减		在玄武岩层中传播	我国台湾省地震和我国大陆内地震在我国大陆台站上有时能观测到该震相		玄武岩层中的 SH 型导波

L_{g_1} L_{g_2}	3.5 公里/秒 3.4 公里/秒	1″—5″	正频散	L_{g_2}出现在L_{g_1}前约 10″—15″，震级小时，L_{g_1}不出现．L_{g_1} 起始平缓．L_{g_1}，L_{g_2}在水平分向上叠加在 Q 波的前几个周期上，垂直向出现在 M_2 的后半部或尾部，但在 R_{mx} 之前．在垂直向上初至清晰，脉冲较大		在花岗岩层中传播	大陆架和大陆内部的地震（我国台湾省、日本南部琉球群岛、菲律宾东北部、苏联西伯利亚和贝加尔湖、蒙古、……）在我国大陆台站上都能记到 L_g．但当震中与台站之间的海面路径超过 150 公里时，L_g 不出现	大约 30° 之内	几种观点： ①地壳中低速层中的导波； ②乐甫波的高阶型； ③体波在地壳中高速夹层内多次反射而成[19]
M_2 (Sezawa 波)	3.5—4.2 公里/秒	8″—15″ 4″—11″	正频散	持续10—15个周期的圆滑纺锤状波列，三个分向上都清楚	入射面内的逆进椭圆		来自中国大陆外的浅震（$h<60$ 公里）（主要是我国台湾、日本南部琉球群岛、菲律宾的地震），在我国沿海台站上记 M_2 很好，但西藏、新疆台站记不到	同 L_g	一阶瑞利波
R_g (Airy)	3.1 公里/秒左右	8″—12″	反频散	强脉冲	入射面内的逆进椭圆	在花岗岩层中传播	同 L_g	同 L_g	正频散的 L_g 波与反频散的高阶瑞利波相汇合而成．由于两者周期相近，在同相位时，产生共振，成为强脉冲

$\bar{P}$, S_n, $\bar{S}$(图 11.9). 我国西北地区，在 $\Delta_1 < \Delta < 3°—4°$ 以前，常见到震相出现次序为 P_n、$\bar{P}$、P_{11}, S_n、$\bar{S}$、S_{11}，而且往往 P_{11}、S_{11} 分别比 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 更强些.

在康腊德界面清晰的地区，如果震源在地壳上层，则可以出现 P^*、S^*. 但在我国不少地区，P^*、S^* 不明显或不出现.

实际上在 6° 以后，已进入由上地幔低速层造成的纵、横波影区. 这时 P_n 或 P(8° 以后已是地幔折射波)很弱，S_n 或 S 有时不出现. 在通过大陆型地壳的地震记录上突出的震相是短周期面波 L_{g_1}、L_{g_2}、R_g 等，在通过大陆架地壳时，除 L_{g_1}、L_{g_2}、R_g 之外，还有 M_2 出现(图 11.10). 我国台湾地震在我国大陆地震台的记录上，这些震相是很显著的. 在影区内，有时还能观测到 PL、π_g、L_i 等震相，它们的记录特征可以参见表 11.1 中的有关部分.

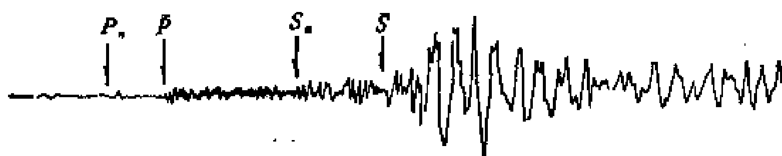


图 11.9 1972 年 9 月 30 日四川乾宁地震 $M = 5.8$ 西安台基式仪记录 $\Delta = 745$ 公里

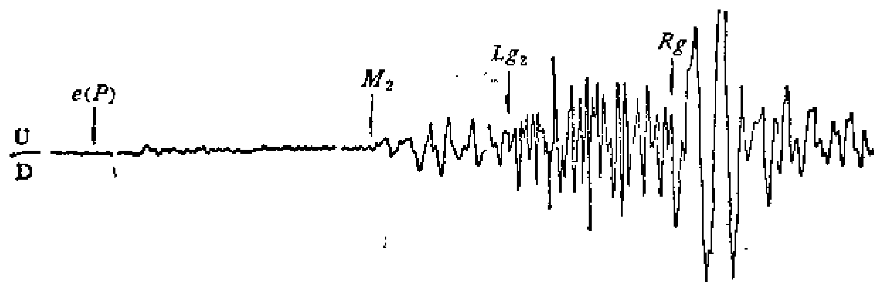


图 11.10 1972.5.5. 台湾地震 $M = 5.6$ 武汉台基式仪记录 $\Delta = 9°$

综上所述，在 10° 范围内出现的主要震相类型是 $\bar{P}$、$\bar{S}$, P_n、S_n，还有 P_{11}、S_{11}. 一般看来，就振幅而言，直达波的比绕射波的强，反射波的情况复杂些；就周期而言，绕射波的比直达波的要大，而反射波的周期比直达波的略大；就纵波的出射角而言，则 P_n 的大于 P_{11} 的，P_{11} 的又大于 $\bar{P}$ 的. 此外，上述短周期面波在 Δ 较大之后在图上也占有重要地位.

第二段：$10° < \Delta < 105°$

此为远震范围. 主要震相是地幔折射波和面波. 随着距离增大，各震相逐渐拉开，可以辨认的震相较多；震相周期较长；整个记录延续时间较长，可达 1.5 小时.

在浅远震记录图上，随着震中距的增大，乐甫和瑞利波占重要地位. 乐甫波只在水平分向记录图上出现；瑞利波质点振动轨迹是入射面内逆进椭圆，在三个分向上都有，垂直分向上强而清晰. 乐甫波和瑞利波都有明显的正频散性. 在图纸分析工作中，一般记 L_Q 或 Q 为乐甫波，记 L_R 或 R 为瑞利波. 乐甫波和瑞利波的初至相的速度分别为 4.4 公里/秒和 4.0 公里/秒. 同时，常以 Q_m 和 R_m 分别记乐甫波和瑞利波的最大振幅，它们的传播速度分别为 3.2 公里/秒和 2.9 公里/秒，这是由 $\Delta < 20°$ 的观测资料得到的数值.

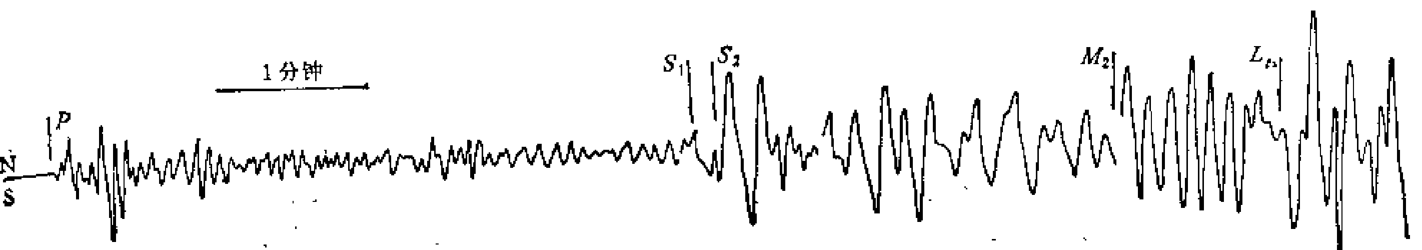


图 11.11　1972.9.23.巴士海峡地震（$M = 6.5$）
高台台基式仪记录 $\Delta = 24.7°$

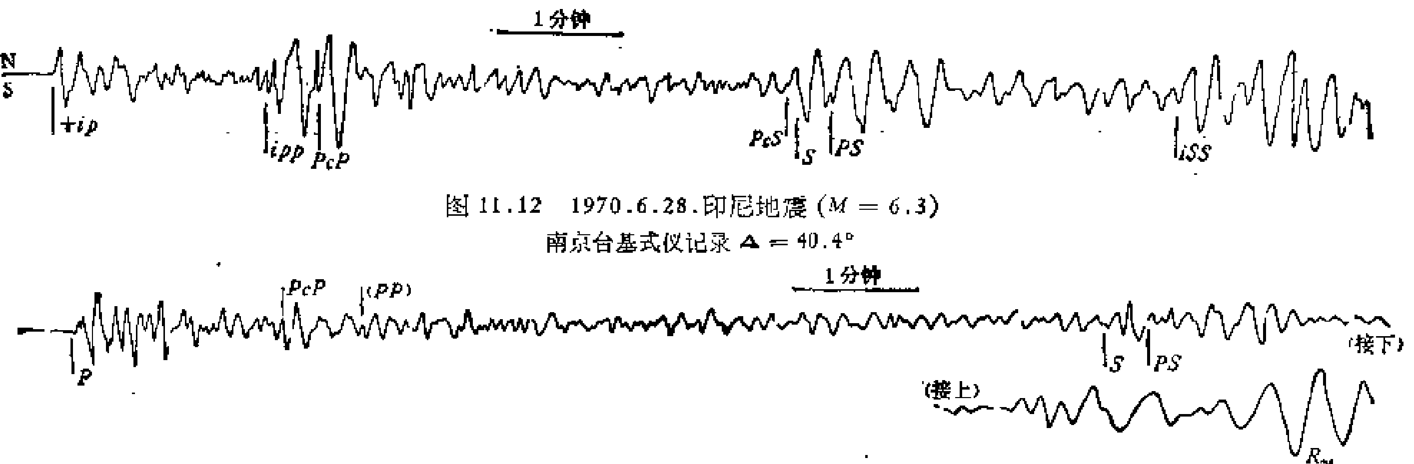


图 11.12　1970.6.28.印尼地震（$M = 6.3$）
南京台基式仪记录 $\Delta = 40.4°$

图 11.13　1972.9.5.新赫布里底群岛地震（$M = 6.5$）
南京台基式仪记录 $\Delta = 62.9°$

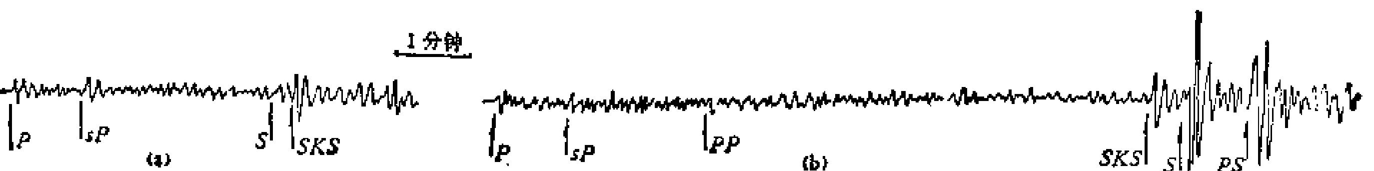


图 11.14　1961.3.20.东加群岛地震（$M = 6.5 \sim 6.8$　$h = 175$ 公里）
(a) 佘山台基式仪记录 $\Delta = 78.8°$　(b) 成都台基式仪记录 $\Delta = 91.5°$

U 15ʰ59ᵐ
D
ep'
1分钟
e(PKIKP)
PP
16ʰ09ᵐ
E 16ʰ
W
SKS
SKKS
S

图 11.15　1972.3.7.105° 附近记录图 ($M = 6.5$)
乌鲁木齐台基式仪记录 $\Delta = 105°$

1分钟
U
D
e(P')
20ʰ31ᵐ
PKIKP
PP
SKP
E
W 20ʰ31ᵐ
PP
PKS

图 11.16　1962.5.11.墨西哥地震 ($M = 7$)
拉萨台基式仪记录 $\Delta = 131.4°$

U
D
PKIKP
PKP_1
1分钟

图 11.17　1962.7.26.中美洲地震 ($M = 7.5$)
昆明台基式仪记录 $\Delta = 146.8°$

U
D
PKP_1
PKP_2
1分钟
SKP
PP
e
PPP
(接下)
(接上)
SKKS
SKKKS
SKSP

图 11.18　1969.4.26.智利地震 ($M = 6.1$)
兰州台基式仪记录 $\Delta = 172°$

PKP_1
$pPKP_1$
$pPKP_2$
1分钟
U
D
PKP_2
PP
pPP
PcPPKP
PPP
pPPP
SKKS
SKKKS

图 11.19　1962.8.3.智利地震 ($M = 7$ $h = 140$ 公里)
广州台基式仪记录 $\Delta = 179.8°$

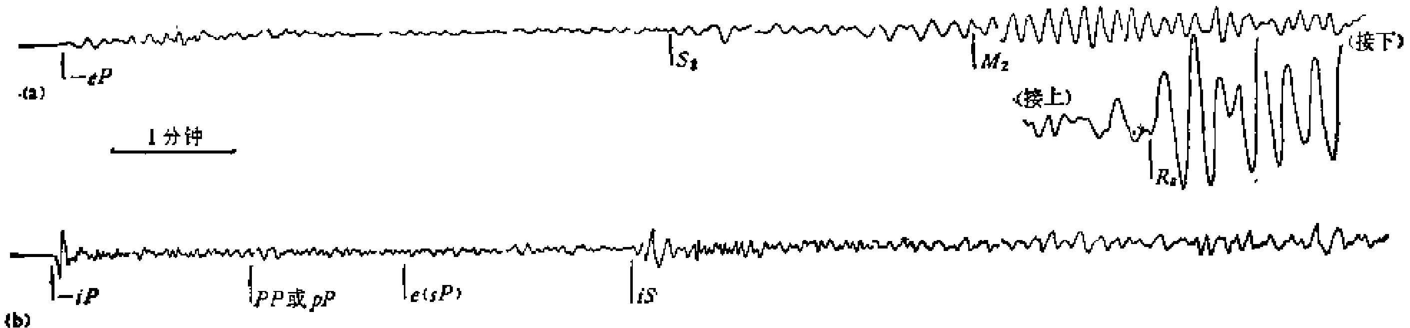


图 11.20　浅源、深源地震记录特征对比

a　1972.6.21.日本地震 $M = 5.9$ 浅源　高台台基式仪 $\Delta = 27.9°$

b　1972.8.21.鄂霍次克海地震 $M \doteq 6$, $h = 600$ 公里　兰州台基式仪 $\Delta = 34°$

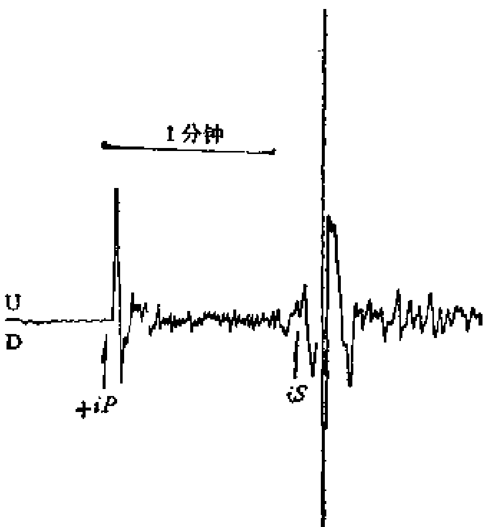


图11.21　1969.4.10.我国东北深震（$M = 5\sim5.5$, $h = 570$ 公里）长春台基式仪记录 $\Delta = 4.2°$

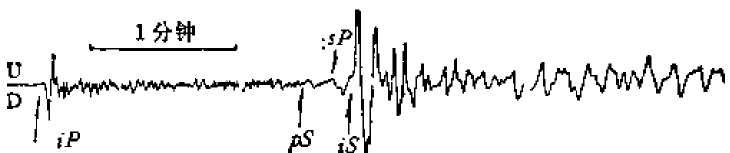


图11.22　1969.4.10.我国东北深震（$M = 5\sim5.5$, $h = 570$ 公里）北京台基式 $\Delta = 11.4°$

在 $10^\circ < \Delta < 105^\circ$ 范围内，浅震记录特征可以分以下三小段来叙述：

① 在 16° 之前，仍在 P、S 影区内，记录特征如前所述．我国国内和边境上的许多地震对于我国大部分基准台站，正处于这段距离上．

② 在 $16^\circ < \Delta < 30^\circ$ 范围，震相出现次序为 P、PP、S、SS、Q、R 等．如果震源在大陆型地壳内，大陆台网仍可记到清楚的 L_g、R_g．若震源在大陆架地壳内，可记到清楚的 M_2．在这段距离上，P、S 振幅都较大；但在上地幔复杂结构的影响下，往往 P、S 都有几次振动，S 的到时不易认准(图 11.11)．

③ 从 30° 直到 105°，主要震相是 P、PP、PcP、PcS、SKS、S、SS、Q、R 等．面波很发育．P、S 通常也都清楚，而且尽管其振幅随 Δ 增大而减小，但其波形(主要是波的周期)几乎不变．

此外，PS、PPS 也常被记到．在 55°—90° 能在短周期地震仪记录图上看到清楚的 PKPPKP，而在 76° 附近为最强．95° 以后能记到 PKKP．

有几处震相交错的地方，需要注意：

在 39°—42°，PcS 由在 S 之后变为在 S 之前 20 秒左右，S 常受其干扰(图 11.12)．

$\Delta < 45^\circ$ 时，PcP 在 PP 之后 (图 11.12)；而当 $\Delta > 45^\circ$，已在 PP 之前(图 11.13)．

$\Delta = 83^\circ$ 附近，S 与 SKS 几乎同时到达．$\Delta > 83^\circ$，SKS 在 S 之前，S 常受 SKS 干扰(图 11.14)．

第三段：$105^\circ < \Delta < 180^\circ$

此为极远震范围．地核穿透纵波 PKP 等成为主要震相，它们一般起始较尖锐，周期较小．已经没有地幔折射 S 震相．面波仍很发育；在 180° 附近，振幅更大，但一般分不出 Q、R 了．PP 通常记得很好．各震相间隔很远，记录延续达 1.5 小时以上．

① $105^\circ < \Delta < 130^\circ$

出现震相 P′、PKIKP、PP、SKS、SKKS、Q_m、R_m 等．

外核界面绕射波 P′，周期大，象脉动，仅强震时可能记录到．内核穿透波 PKIKP 约在 110° 后出现，周期较短，振幅较弱，由于其前面的 P′ 很少出现，所以它经常是初至波．相比之下，PP 成为突出震相，它在 120° 附近最强．有时还能记到 PS、PPS．

② $130^\circ < \Delta < 142^\circ$

情况大致与上段相仿，不同点在于 P′ 已不存在，PKIKP 变成清晰突出的初至波，PP 反而弱了(这种现象延伸到 150° 左右)．另外，PKS 为一突出震相 (图 11.16)，它在 131° 附近最强．

③ $142^\circ < \Delta < 180^\circ$

出现震相为 PKIKP、PKP_1、PKP_2、PKS、PP、PPP、SKKS、SKKKS、SS、R 等．

外核穿透波在 142° 附近振幅达最大值，此后随距离增大而分成 PKP_1 和 PKP_2 两支．PKP_1 延伸到 168°，PKP_2 到 190°．在图上，PKP_1 和 PKIKP 经常不易区分出来，人们有时把地震记录的初动记作 PKP_1，而不再细分它是真正的 PKP_1 还是 PKIKP (图 11.17、11.18)．

Δ 大于 150° 以后，PP 又变得清楚突出了．PcPPKP 和 PcSPKP 在垂直分向较突出(图 11.19)．

在 180° 左右，PKP_1、PKP_2、PP、SS 等都特别的大．深震亦然 (图 11.19)．

二、深震震相记录特征

深震的震源位于上地幔中．目前观测到的最大震源深度约700公里．习惯上称60—300公里深的地震为中源地震，称300—700公里深的为深源地震．深震震相出现规律与浅震的基本相同，但也有几点重要的区别：

① 震相起始尖锐，往往初动就达振幅最大值，震相初动周期小，出射角大(图11.20).

② 面波不发育．当深度大于300公里时，面波甚至不出现(图11.20).

③ 近震仅出现 P、S，而没有 $\bar{P}$、$\bar{S}$、P^*、S^*、P_n、S_n、P_{11}、S_{11} 等震相 (图11.21).

④ 震源愈深，P、S 原先 6°—16° 范围的影区就愈小．当深于300公里，即震源处于上地幔低速层之下时，P、S 无此影区 (图11.22).

⑤ 当深度处在大约50到250公里之间，即震源在低速层之内时，该层中的导波 P_a、S_a 可能记得较好．

⑥ 随着震源深度增大，PcS 和 S、SKS 和 S 走时曲线交汇距离会提前．

⑦ 各种核面反射波 PcP、ScP、ScS 等经常清晰突出，形成尖锐的脉冲(图11.23).

⑧ 出现深震震相：

当 $\Delta > 20°$ 时，出现震中附近地表反射转换波 pP、sP、sS、pPP 等 (图11.23).

当 $\Delta > 105°$ 时，出现 $pPKP$ 或 $pPKP_1$、$pPKP_2$ 等 (图11.19).

一般震源愈深时，深震震相愈清晰突出．

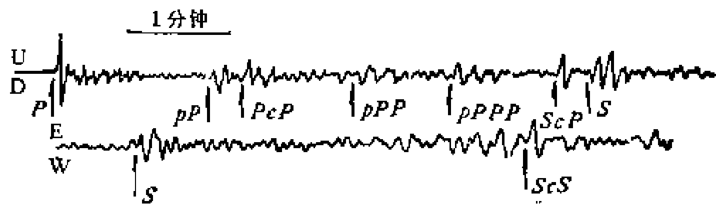


图11.23　1959.7.20 爪哇海地震 (h = 540 公里)
南京台基式仪记录 $\Delta = 37.8°$

§ 11.3　识别震相的方法

前面介绍了各种震中距出现震相的一般规律．但从地震图上并不能直接知道震中距离．那么怎样识别震相呢？由图上，所能直接得到的主要是各震相之间的到时差，以及它们在相互对比之中所显示的形态(振幅、周期、振动方向等)差异．我们也就是从这些方面来识别它们．

一、依据运动学特征识别震相

首先统观记录全貌，根据记录形态和延续时间，大致判断是近震还是远震，或是极远震；是浅震还是深震．这就能粗略估计出震中距在哪一段范围和初至波的类型 (是 $\bar{P}$ 或是 P_n，还是 P 或 $PKP(PKIKP)$)．特别是在浅震情况下，用面波最大振幅的到时 L_M 与地震图初至波的到时 $T_初$ 的差值，也能粗估震中距和初至波的性质．例如，若由地震图测得 $L_M - T_初 = 31$ 分，那么由表11.2查得Δ在80°附近．由此可知是属于远震范围，初至波

是P．面波具有频散性，常呈正弦状波列，又在浅震图的后半部分占显著地位，是容易辨别的，因此，使用比较方便．

表11.2 L_M — 乐甫波或瑞利波的最大振幅

$L_M - T_{初}$(分钟)	16	24	32	42	51	61	71.5	(95)
$\Delta°$	40	60	80	100	120	140	160	180

然后，参考该震中距范围内震相出现的规律，进一步肯定初至波的性质．并找出起始确切的其它基本震相：近震和远震经常是找出S波，极远震是找出PP．由$S-P$或PP—PKP查走时表求确切的震中距Δ，并查在此Δ处其它震相与P或PKP的到时差，与图上的实际情况对比，识别出其他各震相．在影区时，可以用L_g、R_g与P的到时差来查出Δ．

二、依据动力学特征识别震相

这种识别震相的方法也很重要，特别是在几个震相的到时相近的情况下．

1. 依据振幅的大小

在处理近震时，往往由$\bar{S}$相对于$\bar{P}$的大得多的振幅，就能识别它．

当震中距离很小或很大时，射线出射角大，P波的垂直分量比水平分量大，而S波的是水平分量大．这也适用于反射波和反射转换波，例如PP在垂直分向上发育，而PS在水平向上发育．由此，能大致判断震相是纵波类型还是横波类型．

2. 依据周期的大小

通常总是S周期比P的大，面波的又比S的大．PP周期与P的相近，而SP的与S相近．根据周期的显著不同，即使振幅无明显变化时也能识别出一些震相．

3. 依据出射角的不同

例如初至波是P还是PKP，是区分远震、极远震的关键．除根据走时特征之外，还可从出射角来作鉴别：P的出射角小于85°，而PKP的则大于85°，在图上PKP垂直分向的初动振幅很大，而在两水平向上却很小．

4. 依据振动方式的不同

有时振动方式可成为区分某些震相的可靠判据．比如，在83°附近，SKS与S几乎同时到达．但SKS的两水平分量的合成方向与P的两水平分量的合成方向一致，而S一般不能满足这一点．这是因为SKS是SV型的，而S通常含有SV、SH两个分量．再参考SKS周期比S小的特点，就能将两者区分开来．

在PcS和S交错的40°左右，也用这方法区别它们：PcS是SV型的，S有SV、SH两个分量；PcS周期接近于P的，比S的小．

5. 依据初动方向的不同

例如，在一般情况下，无论震源深浅，只要 $\Delta > 30°$，pP 与 P 的垂直向初动方向是相反的；只要 $\Delta \geqslant 40°$，PP 也与 P 的垂直向初动方向相反，而 PPP 与 P 的相同．依此可以鉴别震相：若一震相被怀疑为 PPP，但垂直向初动方向却与 P 的相反，则 PPP 的可能性不大．

三、多台对比

在分析图纸时，多台对比识别震相很重要．

(1) 由图 11.24 可知，当震源较深时，在震中附近 F 点反射一次到达观测点的深震震相 pP 与从震源直接到观测点的震相 P 的时差，可以表示成：

$$pP - P \simeq \frac{OF}{v} + \frac{FB}{v}$$

$$= \frac{OF}{v} + \frac{OF\cos(180° - 2e)}{v}$$

$$= \frac{2OF}{v}\sin^2 e \simeq \frac{2\cdot h}{v}\sin e$$

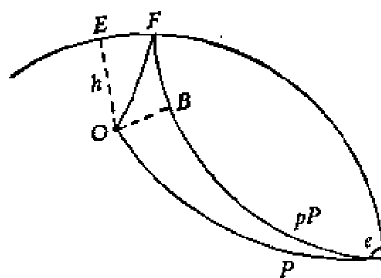


图 11.24

由于都是在震中附近反射，e 的变化很小，因此该时差随观测点震中距的变化不大，而主要随深度变化．

对于同一个深震，不同台站上的 $(pP - P)$ 时差值应相近．同样，在极远震，$(pPKP - PKP)$ 时差值相近．而且，在同一台上有：

$$pPKP_1 - PKP_1 \simeq pPKP_2 - PKP_2 \simeq pPP - PP,$$

$$sPKP_1 - PKP_1 \simeq sPKP_2 - PKP_2 \simeq sPP - PP.$$

由此，通过多台对比，就不难确认深震震相．

(2) 近震走时曲线在 $\Delta \gg h$ 时可视为直线．将认为是同名震相的走时 t 和 Δ，点在 Δ-t 直角坐标系中，或将震相与 P 的到时差 $(T_i - T_p)$ 和 P 的到时 T_p 点到图上，若是条直线，可表明它们是同名震相；偏离直线太远的点就有疑问，须重新对该台的震相分析工作进行审查(图 11.25)．

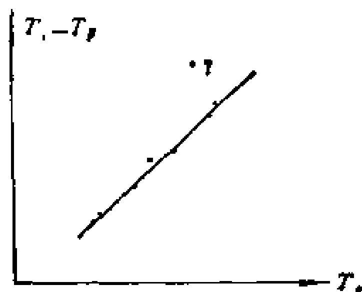


图 11.25

(3) 相位对比法常用于鉴定远震同名震相．远震震相的形态随距离变化不大，将各台的记录描在同一纸上，相互对比，便于确定它们．

四、同一地区地震的记录要多作比较

对同一地区地震的记录震相特征要多作归纳和比较，掌握其形态概貌，避免将偶然出现的一些次要波形当作重要震相来分析．同时也要注意新震相的出现．

§11.4 干扰问题

地震图上常记录有非天然地震的振动．因此，将地震从这些干扰中识别出来，实际上是图纸分析工作的第一步．

地震图上常见有一类脉动和二类脉动．前者是周期为3—9秒的正弦型振动，起因于气旋和海浪等因素．后者由台址附近的持续性机械振动等因素引起，周期多在0.1秒以下．它们以及偶然出现的人动、车动等干扰，都因为形态简单而很容易和地震区别开来．

在地震图上较难辨别的是以下两种干扰：

一、塌陷

由矿井塌陷引起的振动可见图(11.26)，形态上象地震，但波形较简单，衰减很快．只有在局部范围内能观测到．垮岩、塌方的波形也类似．

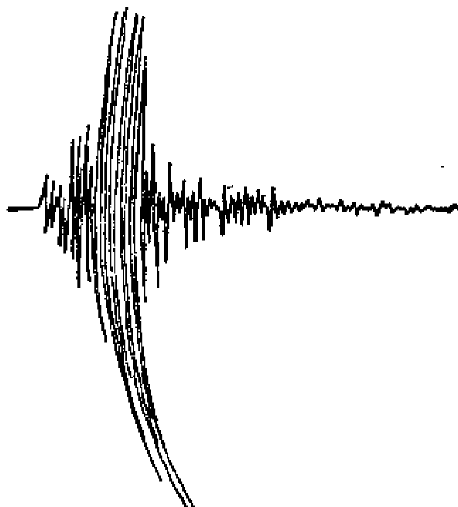


图11.26 煤矿塌陷

二、爆破

爆破的波形和地震非常相似，很难区分它们．核爆破的鉴别问题，已成为一个专门研究课题．

(1) 震中距离在数百公里之内时，爆破有几个方面区别于地震．

理论上，在半无限均匀介质中，球对称的爆破源引起的质点初动都是离源方向，垂直向初动向上为正号．在实际地球介质中，情况不和理论完全一致，有时有少数初动符号是负号，但分布是不规则的．可是，地震是断层错动造成的，正负号分布成四象限．因此，由初动符号可以区分爆破和地震．

由于爆破源的对称性，理论上将不产生S波．实际上S波是有的，但比较弱．这使在十公里左右之内的爆破记录常呈脉冲型，纵波很发育（图11.27，28）．而且统计地看，在数百公里之内，一般爆破S、P振幅比值A_P/A_S都比地震的要大（图11.29）[18]．

同时，由于爆破源比地震浅得多，爆破震相的视速度比地震波的视速度小得多[19]．而

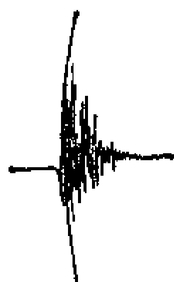
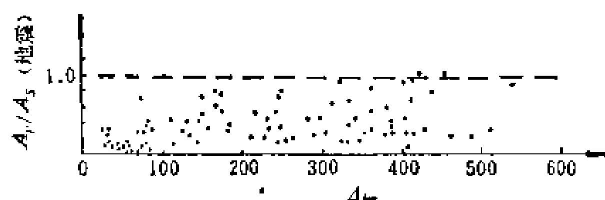


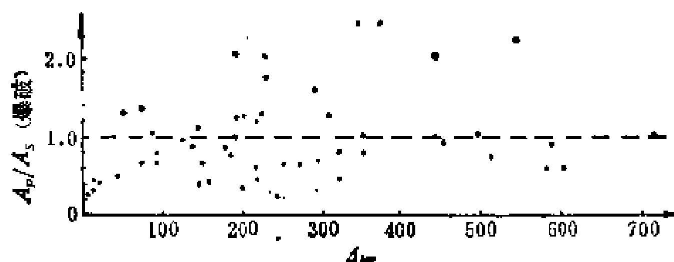
图11.27 数公里的爆破



图 11.28 岳西台水中爆破记录 Δ = 3 公里，滚筒转速 240 毫米/分



(a) 地震



(b) 爆破

图 11.29 地震和爆破的纵横波振幅比的差别(根据[18]的图略作变动)

且爆破波比地震波穿透地层较浅，经过疏松表层时高频成分被强烈吸收，结果使爆破震相的周期一般比地震的大些．同时，爆破记录的持续时间比地震的要短些．

另外，当震中距离较小时，爆破的面波比地震的面波要相对强些．因此，对地震来说，常是 $M_L > M_S$（M_L. 近震震级，一般在体波 S 上测量；M_S. 面波震级；参见 § 13.2）．而对爆破来说，却常有 $M_L < M_S$[18]．

(2) 当震中距离大于 25°、体波震级 m（见 § 13.2）大于 5 时，地震和核爆破的鉴别主要从以下方面来进行．

这时震中距离已很大，爆破源和地震源的波都穿过较深地层而到达观测点，传播介质的差异已经减弱，而源的差异性却表现了出来．爆破源体积小，发动时间短；而地震源体积大，破裂过程较长，因此爆破震相的周期比地震的要小些，图 11.30 表示出了这种差异．

同时，据观测，这时爆破源的面波反而比浅地震的面波弱些．由于地震的震源比爆破源深，震源尺度也比爆破源大，破裂时间长，这都使得地震所激发的面波周期比爆破源所激发的面波周期长，而长波吸收衰减得慢，传播得远．所以，体波震级为同一 m 值的爆破和浅地震，而面波震级却为 $M_{爆} < M_{地}$．这在惠达姆（Whitham）的图上很明显（图

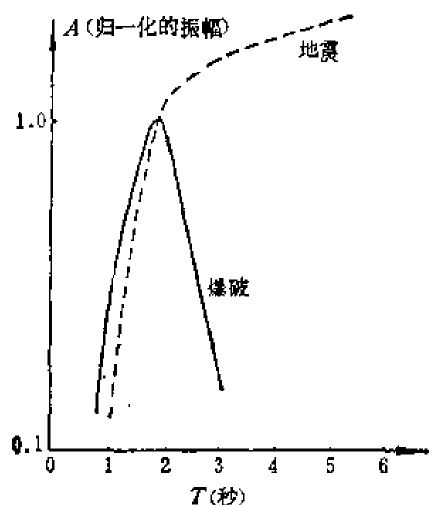


图 11.30 P 波振幅与周期关系

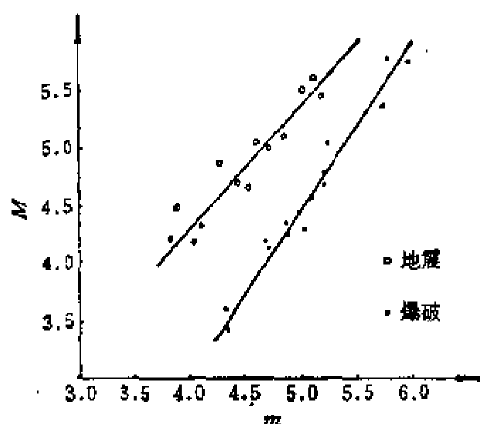


图 11.31 用 $M:m$ 法区分地震和爆破(惠达姆)

11.31).

利用图 11.30 和图 11.31 所显示出的爆破和地震的差别,可以区分开它们.

(3) 有时光靠记录特征还不好判断,特别是震中距在几百公里到 25° 之间这段范围内的时候.因此,还须参考.

① 深度大于 50 公里者,肯定是地震而不是爆破.

② 核爆破试验常在几个基地重复.

③ 某一地区工业爆破的起爆时间是有规律的.通过调查核实,可以把工业爆破鉴别出来.

第十二章　测定地震发震时刻和震源位置

§12.1　测定近震发震时刻和震源位置

在近震范围内，地球曲率可以忽略，在测定震源位置时可以直接在比例尺比较大的地图上作图. 但由于各地区地壳结构、速度分布有差异，要求使用本地区的走时表或用不依赖走时表的测定方法. 测定方法很多，地球物理研究所编的《近震分析》一书中有详细介绍. 在此只简单提几个当前使用较多的方法，即①不知道波的传播速度也没有走时表时使用的和達法、高桥法和计算法；②已知波的速度或有走时表时使用的石川法、交切法、双曲线法、量板法；③方位角法.

一、和 達 法

1. 发震时刻

设所要求的发震时刻为 T_0，在震源距离为 D 的观测点上 $\bar{P}$，$\bar{S}$ 的到时为 $T_{\bar{P}}$、$T_{\bar{S}}$，传播速度为 $v_{\bar{P}}$、$v_{\bar{S}}$，于是有

$$D = v_{\bar{P}}(T_{\bar{P}} - T_0),$$
$$D = v_{\bar{S}}(T_{\bar{S}} - T_0).$$

上两式相减得

$$T_{\bar{S}} - T_{\bar{P}} = D\,\frac{v_{\bar{P}} - v_{\bar{S}}}{v_{\bar{P}} v_{\bar{S}}}.$$

即

$$D = v_{\phi}\Delta t,$$

式中

$$v_{\phi} = \frac{v_{\bar{P}} v_{\bar{S}}}{v_{\bar{P}} - v_{\bar{S}}}$$

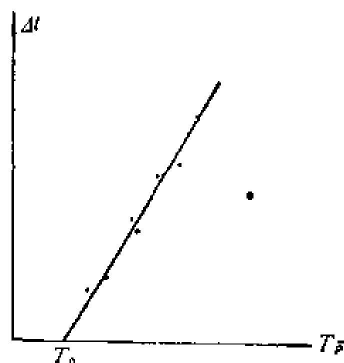


图 12.1

称为虚波速度，$\Delta t = T_{\bar{S}} - T_{\bar{P}}$. 于是可以得到

$$T_{\bar{P}} = T_0 + \frac{D}{v_{\bar{P}}} = T_0 + \frac{v_{\bar{S}}}{v_{\bar{P}} - v_{\bar{S}}}\Delta t = T_0 + \frac{\Delta t}{\gamma - 1}, \tag{1}$$

式中 $\gamma = v_{\bar{P}}/v_{\bar{S}}$. (1)式说明 $T_{\bar{P}}$ 和 Δt 成直线关系，将各观测点的 $(T_{\bar{P}}, \Delta t)$ 值点在 $T_{\bar{P}} \sim \Delta t$ 平面上，这些数据点的拟合直线在 $T_{\bar{P}}$ 轴上的截距即 T_0（图 12.1）. 这个求发震时刻的方法通常称为和達直线法.

另外，在 (1) 式中令

$$\begin{cases} x = T_0 \\ y = \dfrac{v_{\bar{S}}}{v_{\bar{P}} - v_{\bar{S}}}, \end{cases}$$

得到

$$y = \frac{T_{\bar{P}}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t}\,x,$$

这一直线在 x、y 轴的截距分别为:

$$x_0 = T_p,$$
$$y_0 = \frac{T_p}{\Delta t}.$$

由一个台站的观测值 $\left(T_p, \frac{T_p}{\Delta t}\right)$, 可以在 $x \sim y$ 平面上作出一条直线;由另外一台站的观测值再作出一条直线. 两直线的交点在 x 轴上的坐标即发震时刻 T_0(图 12.2). 这个求发震时刻的方法叫萨瓦林斯基法.

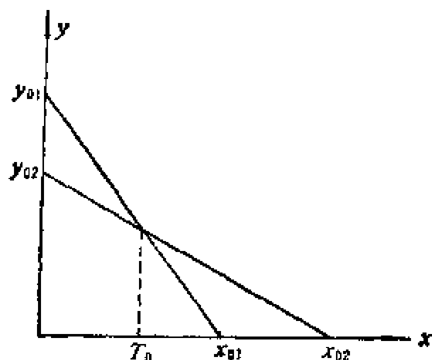


图 12.2

2. 震源位置

对于台 i 和台 j 分别写出

$$D_i = v_\phi \Delta t_i,$$
$$D_j = v_\phi \Delta t_j.$$

设 $D_i < D_j$, 则

$$\frac{D_i}{D_j} = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_j} = m_{ij} < 1.$$

取直角坐标系 x、y、z, 其中 z 轴是铅直方向, x、y 轴在地平面上. 记 i 和 j 台的坐标为 $(x_i, y_i, 0)$ 和 $(x_j, y_j, 0)$, 震源坐标为 (x, y, z). 由关系式

$$D_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2},$$
$$D_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + z^2},$$

得出

$$\frac{D_i^2}{D_j^2} = \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + z^2} = m_{ij}^2.$$

以两台之间的距离

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

代入上式,整理得到

$$\left(x - \frac{x_i - x_j m_{ij}^2}{1 - m_{ij}^2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_i - y_j m_{ij}^2}{1 - m_{ij}^2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{m_{ij} d_{ij}}{1 - m_{ij}^2}\right)^2.$$

这是震源坐标方程,震源在这样一个下半球面上: 球半径为

$$R = \frac{m_{ij} d_{ij}}{1 - m_{ij}^2},$$

球心坐标为

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_i - x_j m_{ij}^2}{1 - m_{ij}^2}, \\ y_0 = \dfrac{y_i - y_j m_{ij}^2}{1 - m_{ij}^2}, \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

由于球心在地平面上,球与地平面的交线是圆心在 (x_0, y_0) 点、半径为

$$R = \frac{m_{ij}d_{ij}}{1 - m_{ij}^2}$$

的圆，称为和達圆。

用另外两个台站得出第二个半球面；这两个半球面的交线(震源轨迹)在地平面上的投影(震中轨迹)是相应的两个和達圆的公共弦，震中就在其上。再用其它几对台站作出几条公共弦。这些弦的交点或交汇区的中心即震中 E。

实际工作中取台 i 为坐标原点，使 x 轴通过台 j，并取由台 S_i 指向 S_j 为正方向，这样就有

$$x_i = y_i = 0, \quad x_j = d_i, \quad y_j = 0.$$

把它们代入 (2) 式，得

$$x_0 = -\frac{d_{ij}m_{ij}^2}{1 - m_{ij}^2}, \quad y_0 = 0,$$

即和達圆圆心在负 x 轴上离开台 S_i 的距离为

$$l = \frac{d_{ij}m_{ij}^2}{1 - m_{ij}^2}.$$

这样，作图就简便了 (图 12.3)。

连接震中 E 和最小的和達圆的圆心，过 E 点作该圆的与这一连线相垂直的弦，弦的长度的一半就是震源深度 h。这由图 12.4 中直角三角形 OEC 和 CEB 全等立即就可得到。

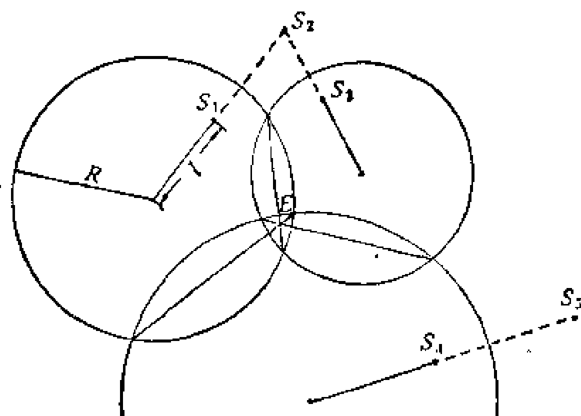


图 12.3

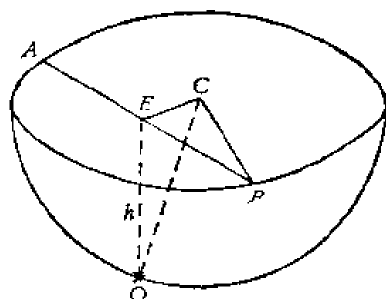


图 12.4

量取由震中到台站的距离 Δ，以公式

$$v_\phi = \frac{\sqrt{h^2 + \Delta^2}}{\Delta t} \tag{3}$$

计算 v_ϕ，取平均值作为该地区的虚波速度.

和達法是处理地方震的经典作图法，必须有四个以上的台站有清晰可靠的 $\bar{S}$、$\bar{P}$ 记录时才能使用。在选择台站时，应避免使 $m_{ij} \approx 1$。因为这会使 l、R 趋于无穷大，无法作图。由此可见，当震中在台网的中心，使各台震中距几乎相同时，和達法反而无能为力。

二、高 桥 法

高桥法在一定程度上能克服和達法的困难.

如图 12.5 所示，Q是台站 S_1, S_2, S_3 所组成的三角形的外心．取Q为直角坐标系 xyz 的原点，三个台的坐标分别为 $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$, $(x_3, y_3, 0)$, 震源的坐标为 (x, y, h). 则震源到三个台的震源距的平方分别为：

$$D_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + h^2 = v_\phi^2 \Delta t_1^2,$$
$$D_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + h^2 = v_\phi^2 \Delta t_2^2,$$
$$D_3^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + h^2 = v_\phi^2 \Delta t_3^2.$$

展开：

$$(x^2 + y^2 + h^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2(xx_1 + yy_1) = v_\phi^2 \Delta t_1^2, \tag{4}$$
$$(x^2 + y^2 + h^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(xx_2 + yy_2) = v_\phi^2 \Delta t_2^2, \tag{5}$$
$$(x^2 + y^2 + h^2) + (x_3^2 + y_3^2) - 2(xx_3 + yy_3) = v_\phi^2 \Delta t_3^2. \tag{6}$$

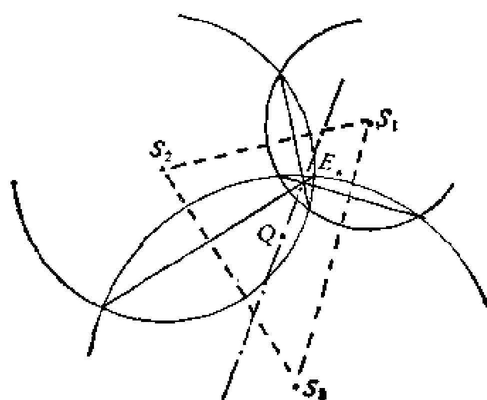


图 12.5

由于Q是 $\Delta S_1S_2S_3$ 的外心，所以

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2.$$

因此 (5) 式减 (4) 式和 (6) 式减 (4) 式分别得：

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y = -\frac{1}{2} v_\phi^2(\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2),$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y = -\frac{1}{2} v_\phi^2(\Delta t_3^2 - \Delta t_1^2).$$

上两式相除得：

$$\frac{(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y}{(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y} = \frac{\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2}{\Delta t_3^2 - \Delta t_1^2} = K.$$

于是有

$$[(x_2 - x_1) - K(x_3 - x_1)]x + [(y_2 - y_1) - K(y_3 - y_1)]y = 0. \tag{7}$$

可见震中的坐标 (x, y) 的轨迹是一条过坐标原点 (即 $\Delta S_1S_2S_3$ 的外心) 的直线．我们在上述演算中，v_ϕ 是被消去了的，也即 (7) 式与 v_ϕ 值无关．实际上，如果我们虚拟一个速度 v_{ϕ_1}, 由 S_1, S_2, S_3 三台用石川法 (见方法五) 可得一虚拟震源，它在上述坐标系的坐标为 $(x_*、y_*、h_*)$, 重复上面的演算过程，必得到：

$$[(x_2 - x_1) - K(x_3 - x_1)]x_* + [(y_2 - y_1) - K(y_3 - y_1)]y_* = 0$$

此式说明，虚拟震中的坐标 $(x_*、y_*)$ 满足 (7) 式，也即虚拟震中在 (7) 式所表示的震中轨迹线上．因此，作出该震中轨迹直线就变得非常简单：

假定一个 v_{ϕ_1} 值，由 S_1、S_2、S_3 台用石川法得一虚拟震中 E_*, E_* 点与 $\Delta S_1S_2S_3$ 的外心 Q 点的连线即为所求．用另外三个台，例如 S_1、S_2、S_4, 又可得一震中轨迹直线，两直线的交点即震中．

其次，注意图 12.6, Q 为 $\Delta S_1S_2S_3$ 的外心，直线 QE_* 是震中轨迹，E_* 即上述虚拟震中．设 E 是真正震中，它当然在 QE_* 直线上．过 Q、E、E_* 分别作 S_1、S_2 的垂线，垂足分别为 Q'、E'、E'_*. 则：

$$\frac{QE}{QE_*} = \frac{Q'E'}{Q'E'_*} = \frac{S_1Q' - S_1E'}{S_1Q' - S_1E'_*}, \tag{8}$$

而

$$S_1E^2 = S_1E'^2 + EE'^2 = v_\phi^2 \Delta t_1^2 - h^2,$$

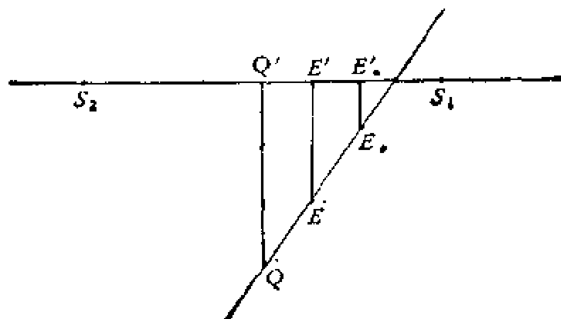


图 12.6

$$S_2E^2 = S_2E'^2 + EE'^2 = v_\phi^2\Delta t_2^2 - h^2.$$

两式相减得：

$$S_2E'^2 - S_1E'^2 = v_\phi^2(\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2),$$

而

$$S_2E' + S_1E' = d_{12}, \text{（台 } S_1, S_2 \text{ 之间距离）},$$

$$S_2E' - S_1E' = \frac{v_\phi^2(\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2)}{d_{12}},$$

故得

$$S_1E' = \frac{d_{12}}{2} - \frac{v_\phi^2(\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2)}{2d_{12}},$$

同理得

$$S_1E'_* = \frac{d_{12}}{2} - \frac{v_{\phi_1}^2(\Delta t_2^2 - \Delta t_1^2)}{2d_{12}}.$$

又

$$S_1Q' = \frac{d_{12}}{2},$$

将 S_1E', $S_1E'_*$, S_1Q' 代入 (8) 式，得：

$$\frac{QE}{QE_*} = \frac{v_\phi^2}{v_{\phi_1}^2}, \tag{9}$$

即真正震中和虚拟震中到外心的距离之比等于虚波速度与虚拟的虚波速度的平方之比。由于 QE, QE_* 可由图上量出，v_{ϕ_1} 是自设的，故 v_ϕ 由 (9) 式可求.

根据上述原理，由高桥法求震源位置、虚波速度的步骤为：

(1) 设有四个以上台站的 Δt_i 值可靠. 任取三个台为一组，找出其外心 Q，假设一虚波速度 v_{ϕ_1}（常取 $v_{\phi_1} = 10$ 公里/秒，便于计算）用石川法定一虚拟震中 E_*. 连结 Q、E_* 的直线为一条震中轨迹.

(2) 另取三台为一组，如法炮制又得一条震中轨迹. 各条震中轨迹直线的交点（二条）或交汇小区域的中心（三条以上）即为震中 E.

(3) 量出 QE、QE_* 的长度，由 $v_\phi = v_{\phi_1}\sqrt{\frac{QE}{QE_*}}$ 计算虚波速度，按不同组分别求出后取平均值.

(4) 取近台 S，以 S 为心，以 $D = v_\phi\Delta t$ 为半径作圆，过震中 E 作与 ES 垂直的弦，弦的一半为深度. 或量出近台 S 的震中距 Δ，以 $h = \sqrt{v_\phi^2\Delta t^2 - \Delta^2}$ 计算深度.

高桥法虽能弥补和達法的不足，但须先求 $v_中$ 才能求出深度.

高桥法也和和達法一样只适用于处理地方震.

三、半几何法

实际工作中，有时碰到大震时近台记录限幅现象，有时是台上只有垂直向地震仪，两种情况下 S 波的到时都往往量不准，而只有 $\bar{P}$ 到时可靠，这时常用半几何作图法求震源位置和发震时刻.

直达波 $\bar{P}$ 时距方程为

$$\Delta^2 = v_{\bar{p}}^2(T - T_0)^2 - h^2 \ (T.\ \bar{P} \text{ 到时；} T_0.\ \text{发震时刻})$$

若有五个台记到 $\bar{P}$ 由它们的时距方程，对于台 1, 2, 3 得到公式:

$$\Delta_2^2 - \Delta_1^2 = v_{\bar{p}}^2(T_2 - T_1)(T_2 + T_1 - 2T_0),$$

$$\Delta_3^2 - \Delta_2^2 = v_{\bar{p}}^2(T_3 - T_2)(T_3 + T_2 - 2T_0).$$

可以得出

$$\frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2}{T_2 - T_1} = v_{\bar{p}}^2(T_2 + T_1 - 2T_0), \tag{10}$$

$$\frac{\Delta_3^2 - \Delta_2^2}{T_3 - T_2} = v_{\bar{p}}^2(T_3 + T_2 - 2T_0). \tag{11}$$

两式相减消去 T_0:

$$\frac{\Delta_3^2 - \Delta_2^2}{T_3 - T_2} - \frac{\Delta_2^2 - \Delta_1^2}{T_2 - T_1} = v_{\bar{p}}^2(T_3 - T_1).$$

整理得

$$A'\Delta_1^2 - B'\Delta_2^2 + C'\Delta_3^2 = v_{\bar{p}}^2. \tag{12}$$

其中

$$A' = \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_3 - T_1)},$$

$$B' = \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_3 - T_2)},$$

$$C' = \frac{1}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}.$$

对于另外三个台，例如 2, 3, 4 台，同样得到:

$$A''\Delta_2^2 - B''\Delta_3^2 + C''\Delta_4^2 = V^2.$$

其中

$$A'' = \frac{1}{(T_3 - T_2)(T_4 - T_2)},$$

$$B'' = \frac{1}{(T_3 - T_2)(T_4 - T_3)},$$

$$C'' = \frac{1}{(T_4 - T_2)(T_4 - T_3)}.$$

因此

$$A'\Delta_1^2 - B'\Delta_2^2 + C'\Delta_3^2 = A''\Delta_2^2 - B''\Delta_3^2 + C''\Delta_4^2.$$

整理后得到:

$$A\Delta_1^2 - B\Delta_2^2 + C\Delta_3^2 - D\Delta_4^2 = 0.$$

其中

$$A = \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_3 - T_1)(T_4 - T_1)},$$

$$B = \frac{1}{(T_2 - T_1)(T_3 - T_2)(T_4 - T_2)},$$

$$C = \frac{1}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)(T_4 - T_3)},$$

$$D = \frac{1}{(T_4 - T_1)(T_4 - T_2)(T_4 - T_3)}.$$

在地平面上取直角坐标系,台站和震中的坐标分别记为 $(x_i、y_i)$、$(x、y)$,以

$$\Delta_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

代入上式,并用关系式 $A - B + C - D = 0$ 来化简整理得到:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{13}$$

其中

$$\alpha = -2Ax_1 + 2Bx_2 - 2Cx_3 + 2Dx_4,$$
$$\beta = -2Ay_1 + 2By_2 - 2Cy_3 + 2Dy_4,$$
$$\gamma = Ax_1^2 - Bx_2^2 + Cx_3^2 - Dx_4^2 + Ay_1^2 - By_2^2 + Cy_3^2 - Dy_4^2$$

是常数. 可见满足四个台 P 到时的震中轨迹是条直线. 因此可以比较简便地求得震源位置、$\bar{P}$ 波速度和发震时刻:

由(13)式,当 $x = 0$ 时,$y_0 = -\frac{\gamma}{\beta}$;当 $y = 0$ 时,$x_0 = -\frac{\gamma}{\alpha}$. 在坐标轴上点出 x_0、y_0,它们的连线即震中轨迹. 利用另外四个台(例如 1, 2, 3, 5)的资料,再求一条轨迹线. 两条线的交点即震中.

求得震中之后,由图上量取 Δ_i,或由公式

$$\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2$$

算出 Δ_i. 而由(10)、(11)式消去 $v_{\bar{P}}^2$,即得

$$\frac{(\Delta_2^2 - \Delta_1^2)(T_3 - T_2)}{(\Delta_3^2 - \Delta_2^2)(T_2 - T_1)} = \frac{T_2 + T_1 - 2T_0}{T_3 + T_2 - 2T_0}.$$

以 T_1、T_2、T_3 和刚算出的 Δ_1、Δ_2、Δ_3 代入上式,可求得发震时刻 T_0.

T_0 求得之后,再代回(10)式可求出 $v_{\bar{P}}$. 同时,由公式

$$h^2 = v_{\bar{P}}^2(T_{\bar{P}} - T_0)^2 - \Delta^2$$

可算出震源深度.

四、计 算 法

随着地震台网的加密,和地震研究工作对地震参数的精度要求的提高,图解法已逐渐不能适应工作要求. 而另一方面,电子计算机的应用,却能在极短时间内处理大量台站的观测数据. 在这种情况下,用计算法求地震参数就越来越重要了.

1. 已知 $\bar{P}$ 的到时 $T_{\bar{P}}$

① 记第 k 个台站的坐标为 $(x_k, y_k, 0)$，$\bar{P}$ 到时为 $T_{\bar{P}_k}$. 设待求的震源坐标为 (x, y, h)，$\bar{P}$ 传播速度为 $v_{\bar{P}}$，发震时刻为 T_0. 则 $\bar{P}$ 的走时方程为

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + h^2 = (T_{\bar{P}_k} - T_0)^2 v_{\bar{P}}^2, \tag{14}$$

其中

$$k = 1, \cdots, n, \quad n \text{ 为台站数目,不得少于 } 5.$$

② 线性化，将方程组 (14) 展开整理之后得到

$$a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + a_{k4}\xi_4 + a_{k5}\xi_5 + b_k = 0, \quad k = 1, \cdots, n. \tag{15}$$

式中常数

$$\left.\begin{aligned} a_{k1} &= 1, \\ a_{k2} &= -2x_k, \\ a_{k3} &= -2y_k, \\ a_{k4} &= -T_{\bar{P}_k}^2, \\ a_{k5} &= 2T_{\bar{P}_k}, \\ b_k &= x_k^2 + y_k^2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

未知数

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= x^2 + y^2 + h^2 - T_0^2 v_{\bar{P}}^2, \\ \xi_2 &= x, \\ \xi_3 &= y, \\ \xi_4 &= v_{\bar{P}}^2, \\ \xi_5 &= T_0 v_{\bar{P}}^2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

至此，已把 (14) 化成线性方程组 (15) 了.

③ 正规化，方程组(15)有 n 个方程，而未知数仅 5 个. 设想解得了这 5 个未知数，把它们代回到 (15) 式时，由于存在着观测误差，等式的右端一般不会为零，而是有个很小的偏差值 e:

$$a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + a_{k4}\xi_4 + a_{k5}\xi_5 + b_k = e_k, \quad k = 1, \cdots, n. \tag{18}$$

根据最小二乘法，我们认为当解出的 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4、ξ_5 的值在能使得各台偏差值的平方和达到最小时，就是最佳值. 也即使

$$R = \sum_{k=1}^{n} e_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + a_{k4}\xi_4 + a_{k5}\xi_5 + b_k)^2 \tag{19}$$

达到最小. 为此，则要求

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_i} = 0, \quad (i = 1, \cdots, 5) \tag{20}$$

将 (19) 式代入 (20) 式得到

$$2\sum_{k=1}^{n} (a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + a_{k4}\xi_4 + a_{k5}\xi_5 + b_k)a_{ki} = 0, \quad i = 1, \cdots, 5$$

上式整理后写成

$$a'_{j1}\xi_1 + a'_{j2}\xi_2 + a'_{j3}\xi_3 + a'_{j4}\xi_4 + a'_{j5}\xi_5 + b'_j = 0, \quad j = 1, \cdots, 5$$

或简写成

$$\sum_{i=1}^{5} a'_{ji}\xi_i + b'_j = 0, \quad j = 1, \cdots, 5 \tag{21}$$

方程组 (21) 中的系数

$$\begin{aligned} a'_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}, \\ b'_j &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}b_k, \end{aligned} \quad (i, j = 1, \cdots, 5) \tag{22}$$

(21) 式中的方程个数和未知数个数相等,为正规方程组.

当方程个数多于未知数个数时,一般都采用这一办法来实现正规化. 在误差理论中常把 (18) 式称为观测方程或条件方程. 有时我们不列出 (18) 式,而直接令 R 等于方程组 (15) 式左端的平方和. R 称为目标函数.

④ 求地震参数,一般用高斯消元法解线性方程组 (21) 得出 $\xi_i(i = 1, \cdots, 5)$. 然后将它们代回 (17) 式得到地震震源坐标 (x, y, h), 发震时间 T_0 和 $\bar{P}$ 速度 $v_{\bar{P}}$:

$$\begin{aligned} x &= \xi_2, \\ y &= \xi_3, \\ v_{\bar{P}} &= \sqrt{\xi_4}, \\ T_0 &= \xi_5/\xi_4, \\ h &= \sqrt{\xi_1 + \xi_5^2/\xi_4 - \xi_2^2 - \xi_3^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

(当根号里的值为负数时,不计算 h)

⑤ 估计观测精度,观测精度可以用到时的标准误差 μ 来表示:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (T'_{\bar{P}_k} - T_{\bar{P}_k})^2}{n-5}}, \tag{24}$$

式中

$$T'_{\bar{P}_k} = \frac{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + h^2}}{v_{\bar{P}}} + T_0$$

是计算到时,而 $T_{\bar{P}_k}$ 是观测到时. 当 $n = 5$ 时,则不估算 μ. 进一步评定每个参数的精度的方法可参见远震修定震中部分.

从由观测资料求系数 a'_{ji}、b'_j 建立方程组 (21),到解方程求出地震参数和估算 μ, 都由计算机完成. 在实际工作中还有把 $v_{\bar{P}}$ 作为给定值、优选值以及进一步修定震中等许多计算方法[19].

2. 已知 $\bar{S}$、$\bar{P}$ 的到时差

仍记到时差 $\Delta t = T_{\bar{S}} - T_{\bar{P}}$. 这时也可以不用和达法、高桥法而用计算法求出震源位置 (x, y, h) 和虚波速度 v_ϕ. 走时方程可以写成

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + h^2 = v_\phi^2 \Delta t^2, \tag{25}$$

$k = 1, \cdots, n$. (n 为台站数目,不得少于 4)

将上式展开整理之后化成线性方程组

$$a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + a_{k4}\xi_4 + b_k = 0, \quad k = 1, \cdots, n \tag{26}$$

式中常数

$$\begin{cases} a_{k1}=1, \\ a_{k2}=-2x_k, \\ a_{k3}=-2y_k, \\ a_{k4}=-\Delta t^2, \\ b_k=x_k^2+y_k^2. \end{cases} \tag{27}$$

未知数

$$\begin{cases} \xi_1=x^2+y^2+h^2, \\ \xi_2=x, \\ \xi_3=y, \\ \xi_4=v_\phi^2. \end{cases} \tag{28}$$

把方程组 (26) 正规化，求出 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4，再代回 (28) 式求出 x, y, h, v_ϕ:

$$\begin{cases} x=\xi_2 \\ y=\xi_3 \\ v_\phi=\sqrt{\xi_4} \\ h=\sqrt{\xi_1-\xi_2^2-\xi_3^2} \end{cases}$$

五、石川法(弦法)

对一个地区的许多地震使用和達法、高桥法、计算法进行测量之后，就积累了该地区的虚波速度、$\bar{P}$ 波速度资料. 这时可以使用石川法来定震源位置.

设已知当地的虚波速度 v_ϕ，并且至少有三个台记录到清楚可靠的 $\bar{P}$、$\bar{S}$，那么对于台 S_1 有

$$D_1=v_\phi(T_{\bar{S}_1}-T_{\bar{P}_1})=v_\phi\Delta t_1,$$

即震源在以 S_1 为球心以震源距 D_1 为半径的下半球面上. 用台 S_2 资料也得一个半球面. 两个半球面的交线是震源轨迹线，它在地面上的投影就是震中轨迹线，正是以台 S_1、S_2 为圆心以相应的震源距 D_1、D_2 为半径的两个相交圆的公共弦. 再用第三个台的资料画出另一条弦，两条弦的交点即震中(图 12.7).

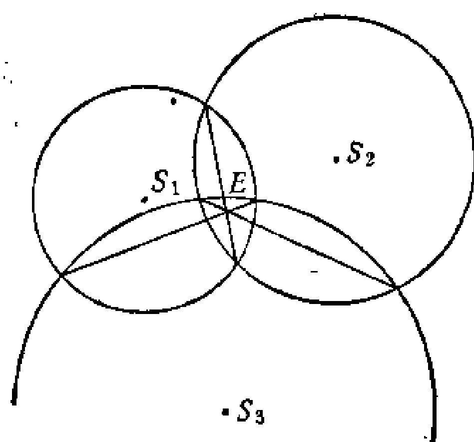


图 12.7

过震中作与震中和台站连线相垂直的弦，弦长度的一半即震源深度.

如果已知 v_P 和 T_0，用 $D=v_P(T_P-T_0)$ 作图亦可.

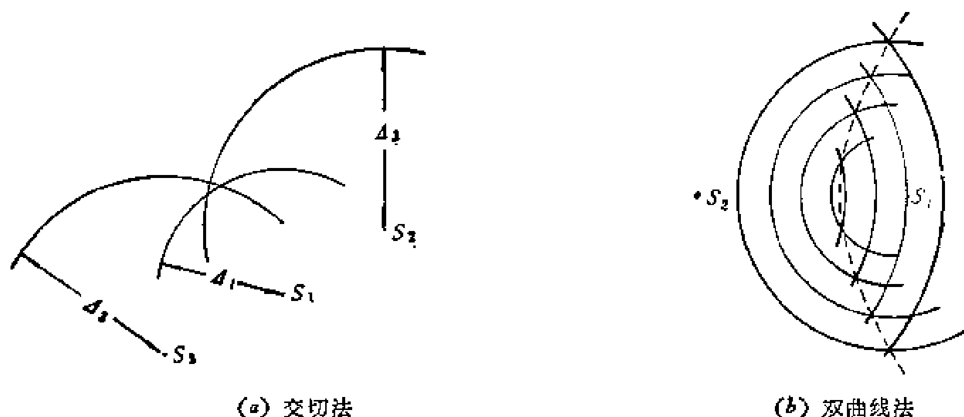
石川法适用于处理地方震.

六、交 切 法

用和達法、高桥法、计算法处理地震之后，观测点的震中距 Δ 和震相的走时 t 就知道了. 处理了许多地震之后，就有很多对 (Δ, t) 数据，于是可以编制走时表(见第十四章). 有了本地区走时表就可以用交切法处理地震.

由 $\bar{S}$、$\bar{P}$ 或 S_n、P_n 的到时差查走时表得出震中距 Δ 和 $\bar{P}$（或 P_n）的走时 t_P，则发震时刻 $T_0 = T_P - t_P$，多台取平均值即可．同时，以台站为圆心以 Δ 为半径画弧，这就是一条震中轨迹线．用三个以上台的资料找出几条弧的交点或交汇小区的中心，这就是震中(图 12.8(*a*))．如果有各种不同震源深度的走时表，那么可以用 $\bar{S}$、$\bar{P}$ 或 S_n、P_n 的到时差查出不同深度下对应的 Δ 值．用同一深度下的各台 Δ 画弧交切，看哪种深度下各弧交切范围小，就取它为震中．相应的深度值就取作震源深度．

交切法对地方震和近震都适用．



(*a*) 交切法　　(*b*) 双曲线法

图 12.8

七、双 曲 线 法

已知 P_n 的视速度 $\bar{V}_{P_n}$ 和至少三个台的到时 T，则每两个台的震中距离之差是一常数：

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \bar{V}_{P_n}(T_2 - T_1)$$

到两台的距离之差为一常数的点轨迹是双曲线，它有两支，只要取其中与到时较早的那个台相距较近的那条就行．由另外两台，再作一双曲线．两条以上双曲线的交点即震中．作一条双曲线的步骤为：

(1) 设台 S_1 的震中距离为 Δ_1，以 S_1 为中心 Δ_1 为半径作圆．

(2) 以 S_2 为中心，以 $\Delta_2 = \Delta_1 + \bar{V}_{P_n}(T_2 - T_1)$ 为半径作圆；两圆相交于两点．

(3) 改变 Δ_1，重复以上过程，又得两交点．

(4) 连结各交点得一条双曲线(图 12.8(*b*))．

八、等时量板法

处理一个台网内的大量地震时，用等时量板法能提高工作效率．

设介质各向均匀同性，则地震波的波阵面是球面．在某一时刻，球面半径为 $D = V_\phi(T_{\bar{S}} - T_{\bar{P}})$，与地面的交线是以震中为中心以 Δ 为半径的圆．以不同的

$$\Delta t = T_{\bar{S}} - T_{\bar{P}}$$

值查某一深度的走时表求 Δ，以 Δ 为半径作同心圆，标上 Δt 值，这就是一张深度为 h 的等时量板(图 12.9)．

对于某次地震，把各台的 $\bar{S}$、$\bar{P}$ 到时差 Δt_i 标在透明的台站分布图上，将它覆盖在量

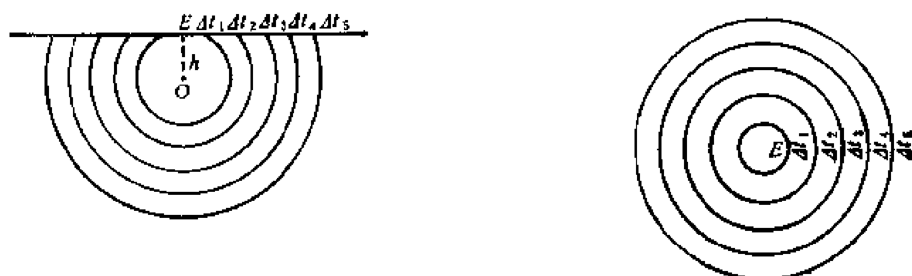


图 12.9

板上(要求两者比例尺相同),使各台分别落在与 Δt_i 值相等的圆上，此时量板中心在台站分布图上的位置即震中，量板的深度即震源深度. 如果老是符合得不好，可改用其它深度的量板. 近震可用 $(S_n - P_n)$ 制成的量板.

九、方 位 角 法

地震台的震中方位角，是过地震台的子午线与台站到震中的连线之间的夹角 α，规定按顺时针方向计算. α 角由 $\bar{P}$ 波的初动方向和初动位移来测定.

1. 由 P 波初动方向确定震中方位

P 波质点振动方向与波射线重合. 来自台站东南方向的地震，若 $\bar{P}$ 初动是离源方向，则台上三个分向的初动方向分别是向上、向北、向西；若初动是向源方向，则为向下、向南、向东. 因此由 P 的三个初动方向可反推地震来自台站的哪个方向(见下表).

震中在台站的什么方向	东　北	东　南	西　南	西　北
P 波三个初动方向	西 + 南	+	+	+
	−	−	−	−

表中"+"号表示垂直分量初动向上，
"−"号表示垂直分量初动向下.
箭头表示两个水平分量的初动方向.

2. 由 P 波初动位移测定震中方位角

量出 P 波在东西、南北分向的初动振幅及其相应周期，查出相应的暂态放大率，换算成地动位移 $A_{东西}$、$A_{南北}$，计算 $\tan\alpha' = \dfrac{A_{东西}}{A_{南北}}$，求出 α'. 当震中在台站东北方向时，震中方位角 $\alpha = \alpha'$；在东南方向时，取 $\alpha = 180° - \alpha'$；若在西南，$\alpha = 180° + \alpha'$；若在西北，$\alpha = 360° - \alpha'$. 用 α 直接在地图上作出方位线，这就是一条震中轨迹线.

3. 测定震中

作出几个台站的震中方位线，它们的交点即震中. 当地震较大，区域台网各台 $\bar{S}$ 波由

于限幅不好辨认，而 $\bar{P}$ 波观测到时可靠的台站又少于 5 个，致使上述其它方法不好使用时，只要有两个以上台站的 $\bar{P}$ 波初动方向和振幅是可靠的，就可以用这种多台方位角法来定震中.

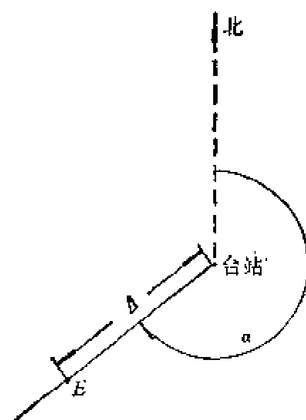


图 12.10

有时为了速报震中，在不得已的情况下，也可以用单台方位角来定震中. 这时纵横波到时差必须可靠. 以该时差查走时表得 Δ. 再以 Δ 为半径以台站为圆心画弧与方位线相交，交点即震中 (图 12.10).

方位角法在处理地方震和近震时都可以用. 但是这时误差很大. 由于地壳结构复杂，往往引起方位角异常，至使震中位置偏离较大. 因此方位角法在近震分析中不如在远震分析中使用广泛.

§ 12.2 测定远震发震时刻和震源位置

一、发 震 时 刻

由基本震相的到时差，如 $S-P$, $PP-P$ 或 $PP-PKP$ 等，查 J-B 远震走时表求出 P 或 PKP 的走时，从到时减去走时，就得发震时刻 T_0.

二、震源深度和震中距

当地震图上出现深震震相 pP、$_sP$、$pPKP$、sS 时，可由基本震相到时差 ($S-P$ 或 $PP-PKP$、$PP-P$) 查浅震走时表得一粗略震中距 Δ'. 以 Δ' 和 $pP-P$ (或 $sP-P$, $pPKP-PKP$ 等) 查表 12.1 得出深度 h. 然后在深度为 h 的走时表中由基本震相到时差查出准确震中距离 Δ, Δ 以度计算.

另外，还可以用时差交点法定深度和震中距.

已知 $S-P$、$ScS-P$ 等波的到时差为 δt_1、δt_2，它们是 Δ, h 的函数. 在 Δ、h 直角座标系中，画出 δt_1 和 δt_2 曲线族(给定一个 δt 值，查不同深度走时表，得 $(h_1、\Delta_1)$, (h_2, Δ_2), …，点到图上诸点连起来就是一条参数为 δt 的曲线). 在地震图上量得 $S-P$、$ScS-P$,

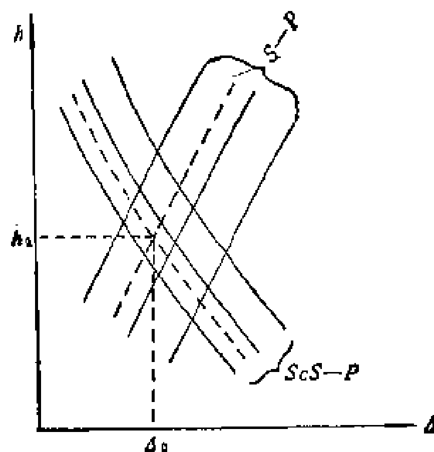


图 12.11

表 12.1　pP — P

Δ°	h/R 0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
19			25										
20			27										
21			30	39									
22	9	20	31	41	50								
23	9	21	32	42	51								
24	9	21	32	42	52	61							
25	9	21	32	43	53	62	70						
28								81					
29								82					
30	10	22	34	45	56	66	75	83	90				
34	10	22	34	46	57	67	77	86	93	100			
35	10	22	34	46	58	68	78	86	94	100			
37	10	22	35	47	58	69	78	87	95	102	107		
40	10	23	35	47	58	69	80	89	97	104	110		
45	10	23	36	48	60	71	81	91	99	107	114	119	124
50	10	23	36	49	61	72	83	93	102	110	118	124	130
55	10	21	37	50	63	74	85	96	105	114	122	129	136
60	10	24	38	51	64	76	88	98	108	117	126	134	141
65	10	24	38	52	65	78	89	100	111	120	129	138	146
70	10	25	39	53	66	79	91	102	113	123	132	141	150
75	10	25	39	53	66	80	92	104	115	125	135	144	153
80	10	25	40	54	67	81	94	105	117	127	137	147	156
85	10	26	40	51	68	82	95	107	118	129	139	149	159
90	10	26	41	55	69	82	96	108	120	131	141	152	162
95	11	26	41	55	69	83	96	108	120	131	142	152	162
100	11	26	41	55	69	83	96	108	120	131	142	153	163

h/R 是剥去地壳之后的震源深度和地球半径之比。

在曲线族内分别找出所对应的曲线，其交点的座标就是深度 h 和震中距离 Δ（图 12.11）。

三、震 中 位 置

用远台资料测定震中，地球曲率不容忽略．为将球面问题化到平面上来作图处理，就需引进一些投影方法。

1. 方位角法

在这儿，地震台的震中方位角 α 的定义和求法与近震一样．所不同的是不能直接在平面图上画方位角．

（1）计算法

地震台 S 的经纬度（λ_s、φ_s）和震中方位角 α 为已知，震中距 Δ 由基本震相到时差查表得出．设待求的震中 E 经纬度为 λ_e、φ_e．它们在地球表面上的关系见图 12.12．由球面三角公式

$$
\begin{cases}
\cos(90^\circ - \varphi_e) = \cos(90^\circ - \varphi_s)\cos\Delta \\
\qquad + \sin(90^\circ - \varphi_s)\sin\Delta\cos\alpha, \\
\dfrac{\sin(90^\circ - \varphi_e)}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\Delta}{\sin(\lambda_e - \lambda_s)},
\end{cases}
$$

得

$$
\begin{cases}
\sin\varphi_e = \sin\varphi_s\cos\Delta + \cos\varphi_s\sin\Delta\cos\alpha \\
\sin(\lambda_e - \lambda_s) = \sin\Delta\lambda = \dfrac{\sin\Delta\sin\alpha}{\cos\varphi_e}.
\end{cases} \quad (1)
$$

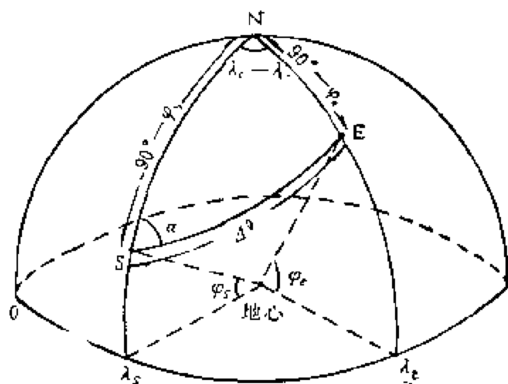


图 12.12

于是 φ_e、λ_e 可算出。

（2）乌尔夫网上作图法

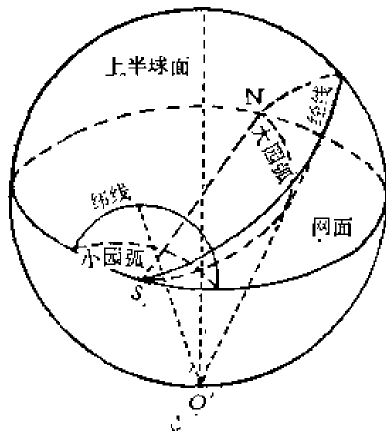


图 12.13

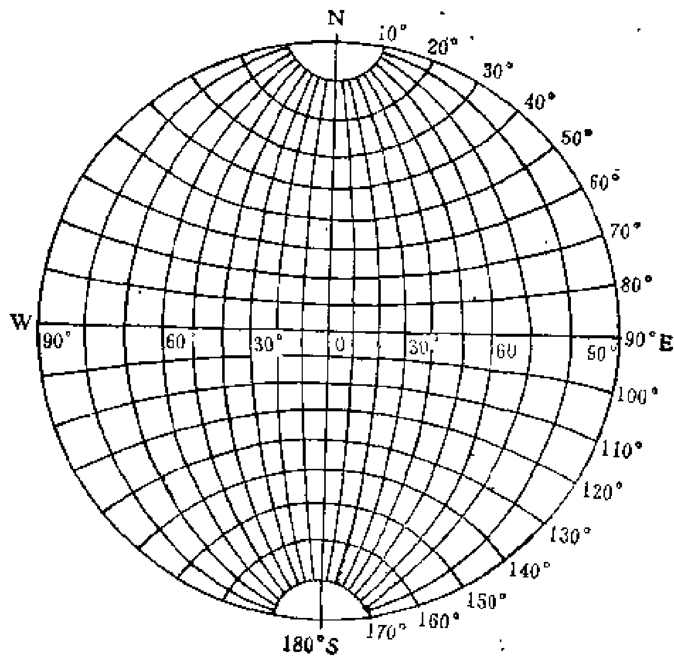


图 12.14 乌尔夫网

沿经线大圆把地球剖成两半，取其中半个地球的天顶(由地心向剖面所作垂线与球面的交点)为投影极点 O'，把另外半个球面上的经线、纬线投影到剖面上．结果经线在剖面上成了过北极 N、南极 S 点的大圆弧，纬线是圆心在 NS 连线上的小圆弧(图 12.13)．这张投影图(12.14)就叫乌尔夫网．

乌尔夫网的用处很多．在不同的场合可以令网上的大、小圆弧代表不同的意义．当我们用它来定地震震中时，是把网的边圆作为地球大圆，边圆上的 N、S 点为地球北、南极．NOS 连线为纵轴，横轴 EOW 是地球赤道大圆的投影，纵横轴的交点 O 为网心．OE、OW 和 ON、OS 都分别按投影关系分成 90°．经度可沿横轴 EOW 读出，南北纬度分别沿纵轴的 OS、ON 段读出．由于方位角 α 是过台站的子午面与过震中、台站、地心的大圆面之间的夹角，应该在横轴上量取．震中距 Δ 应该沿网上的大圆弧来量取．为了操作方便，将乌尔夫网贴在硬板上，上面覆盖一个能以网心为轴自由转动的透明圆盘．圆盘边缘上有一标记线 G．操作方法如下：

当 $\alpha \leqslant 180°$ 时，

(i) 转动圆盘使 G 线与网上 N 点重合．令经线 $\widehat{NWS}$ 为台站经度线 λ_s，在其上据台站纬度 φ_s 点出台站位置 M (图 12.15 A)．

(ii) 转动圆盘使 M 与 N 重合，即把台站通过坐标变换变为北极．此时 G 落在网边 $\widehat{NES}$ 上．由 $\widehat{NES}$ 弧沿横轴向着网心 O 数出 α 角度得 C 点．从 M 点沿过 M、C 的经线向下数 Δ 度，得 E_{pc} 点(图 12.16 A)．

(iii) 将圆盘转回使 G 仍与 N 重合，即台站恢复原位．这时 E_{pc} 所在位置就是所求的

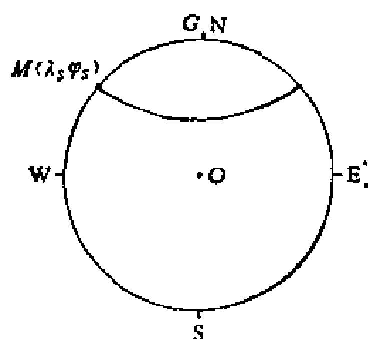


图 12.15 A

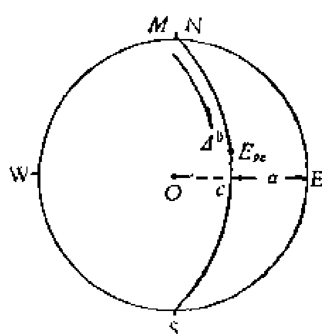


图 12.16 A

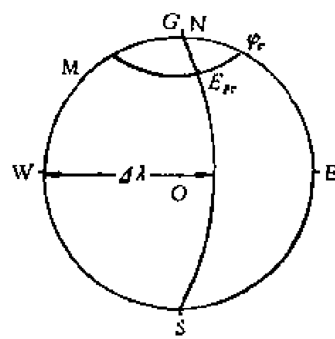


图 12.17 A

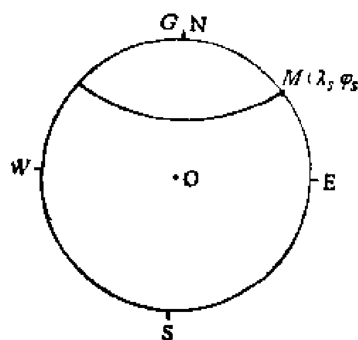


图 12.15 B

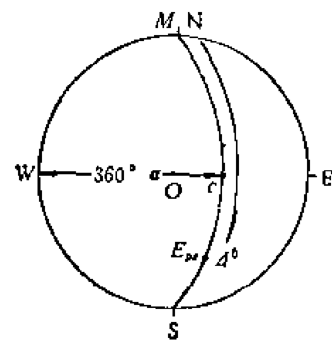


图 12.16 B

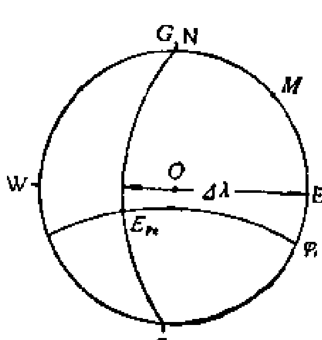


图 12.17 B

震中位置．震中纬度 φ_e 可由 E_{pc} 所在的纬线读出，震中经度 $\lambda_e = \lambda_s + \Delta\lambda$． $\Delta\lambda$ 为 E_{pc} 所在经线与台站经线之间的经度差（图 12.17 A）．当得到的 λ_e 大于 180° 时，注意将它换算成西经数值．

当 $\alpha > 180°$ 时，

这时令 $\widehat{NES}$ 为台站经度线，其它步骤同上．但须注意（参见图 12.15B, 12.16B, 12.17 B）：

(i) 方位角由 $\widehat{NWS}$ 弧沿横轴向着网心 O 用 $(360° - \alpha)$ 数出．

(ii) 震中经度由 $\lambda_e = \lambda_s - \Delta\lambda$ 计算，若 λ_e 为负，则为西经数值．

用方位角法测定震中误差较大．这主要由 α 和 Δ 的误差造成，α 误差由初动振幅测量误差和仪器放大倍数误差引起，在较好情况下，α 误差为 ±3°．Δ 误差主要由 S 震相到时的测量误差造成，在较好情况下，S 准到半个周期，最坏可达 ±1—2 个周期，引起震中距 Δ 误差约为 ±(1/2°—1°)，加上乌尔夫网上作图误差，震中位置的最大误差可达 ±4°．

2. 交切法

有三个以上台站的震中距 Δ，可用交切法定震中，但须在球极平面投影图上进行．

球极平面投影，是以地球的南极（或北极）为投影点，将北半球（或南半球）投影到赤道平面上．投影图的中心即北极（或南极）．纬线成同心圆，经线为由中心向外辐射的直线（图 12.18）．实际应用的图网，是将地球半径 R_0 分成 100 等分画出同心圆和直线而成．

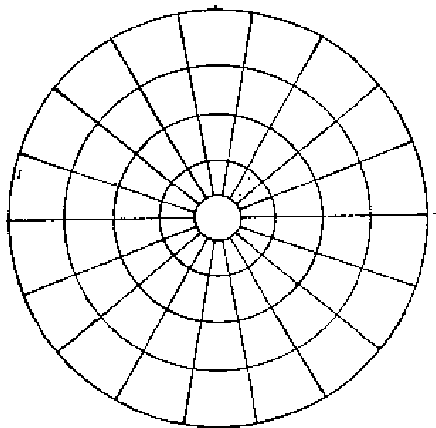


图 12.18

球极平面投影的特点是，球面上的圆投影后仍为圆，角度投影后无畸变．

台站 C 记录到震中距为 Δ 的一个地震，震中应在以台为心以 Δ 为半径的圆上，该圆投影后仍为圆，即震中的投影在投影圆上．以三个以上台站的资料作出几个投影圆，其交点即震中投影，再反推它在球面上的经纬度即可．投影圆的画法如下：

图 12.19 中 $\widehat{NACB}$ 是过台站 C 的经线，$\widehat{AC} = \widehat{CB} = \Delta$． A'，B' 是 A，B 在赤道平面上的投影，$A'B'$ 是球面上以 C 为中心以 Δ 为半径的圆在赤道平面上的投影圆的直径．设投影圆的圆心为 M，半径为 r，M 点到球心 O 的距离为 d，则

$$\begin{cases} d = \dfrac{1}{2}(OB' + OA'), \\ r = \dfrac{1}{2}(OB' - OA'). \end{cases} \tag{2}$$

以

$$\begin{cases} OB' = R_0 \tan \angle NSB = R_0 \tan \frac{1}{2}(90° - \varphi_s + \Delta), \\ OA' = R_0 \tan \angle NSA = R_0 \tan \frac{1}{2}(90° - \varphi_s - \Delta). \end{cases}$$

图 12.19

代入 (2) 式，并用半角公式、和差公式变换整理得到 d、r 的计算公式为

$$\begin{cases} d = \dfrac{R_0 \cos \varphi_s}{\sin \varphi_s + \cos \Delta}, \\ r = \dfrac{R_0 \sin \Delta}{\sin \varphi_s + \cos \Delta}. \end{cases} \tag{3}$$

在图网上找出台站的经线，在该线上由网心 O 量取 d，得 M 点. 以 M 为中心，以 r 为半径画圆弧. 几条弧的交点即震中的投影点 E' (图 12.20). 连结 OE' 到网边读出震中经度 λ_e; 由 $\tan \beta = \dfrac{OE'}{R_0}$ 计算 β，由 $\beta = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi_e)$ 计算震中纬度 φ_e.

图 12.20

图 12.21

我国在北半球. 以网面代表北半球的投影时，若 E' 落在网内，则 φ_e 为正数，震中在北半球；若 E' 落在网外，则 φ_e 为负数，震中在南半球 (图 12.21).

当 $\Delta > 100°$ 时，可以用台站的对蹠点的震中距 $\Delta' = 180° - \Delta$ 和对蹠点的经纬度来求 d、r 和作图. 这时网面代表南半球的投影，若 E' 落在网内则 φ_e 为南纬；当落在网外时 φ_e 为北纬.

3. 波阵面法

用短周期地震仪装备的区域台网，所记录的远震波形虽然失真，但一般 P 波到时却可靠. 当震中距离 Δ 大大超过各台间距时，经过台网范围的波阵面可视为平面. 这时用波阵面法可定出震中.

如图 (12.22)，波阵面与地面的交线是一直线，在 T_1 时刻它到达台 S_1，再过 1 秒后，

它到达 S_1 与其它台之间，与各台和 S_1 的连线分别交于 A、B、C、D 各点。如果能作出直线 $ABCD$，那么由 S_1 向它所作垂线就指向震中，于是 S_1 的震中方位角 α 可以量出。有了方位角 α 和震中距离 Δ，就能定出震中，具体作法是：

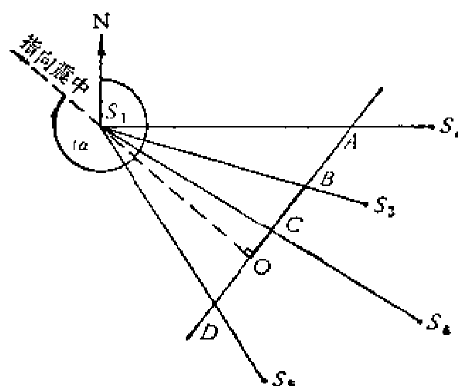


图 12.22

① 在平面图上量取台 S_1、S_2 的间距 d_{12}，计算两台 P 波到时差 Δt_{12}，则两台之间平均视速度 $\bar{v}=\dfrac{d_{12}}{\Delta t_{12}}$（公里/秒）。波前沿 S_1S_2 在 1 秒内推进 $S_1A=\bar{v}$ 公里，由此定出 A 点。同样，可用 S_1 与另外各台的资料定出 B、C、D 各点，连接 A、B、C、D 为一直线。

② 由 S_1 向此直线作垂线 S_1O，量出它与过 S_1 的子午线的夹角 α，这就是震中方位角。

③ 在 S_1O 段上，波的平均视速度 $\bar{v}=\dfrac{S_1O(\text{公里})}{1(\text{秒})}$，将它看作也是 S_1 处的视速度，由表 12.2 查出 S_1 的震中距 Δ。

④ 用 α、Δ 在乌尔夫网上定震中。

表 12.2　浅震 P 波视速度 $\bar{v}$ 与震中距离 Δ 的关系

$\bar{v}$	$\Delta°$	$\bar{v}$	$\Delta°$	$\bar{v}$	$\Delta°$	$\bar{v}$	$\Delta°$
7.7	1	11.6	24	14.1	47	18.2	70
7.8	2	11.8	25	14.4	48	18.5	71
7.8	3	12.1	26	14.4	49	18.8	72
7.8	4	12.2	27	14.6	50	19.2	73
7.8	5	12.3	28	14.6	51	19.2	74
7.8	6	12.3	29	14.8	52	19.5	75
7.9	7	12.6	30	15.0	53	19.8	76
7.9	8	12.6	31	15.2	54	19.8	77
8.1	9	12.8	32	15.4	55	20.2	78
8.1	10	12.8	33	15.4	56	20.6	79
8.2	11	12.9	34	15.9	57	21.0	80
8.3	12	13.1	35	15.9	58	21.4	81
8.4	13	13.2	36	16.1	59	21.4	82
8.5	14	13.2	37	16.3	60	22.2	83
8.6	15	13.2	38	16.3	61	22.2	84
8.8	16	13.4	39	16.8	62	22.4	85
8.9	17	13.6	40	16.8	63	22.6	86
9.0	18	13.6	41	17.1	64	23.1	87
9.7	19	13.6	42	17.3	65	23.1	88
10.7	20	13.7	43	17.3	66	23.6	89
11.0	21	13.7	44	17.6	67		
11.2	22	14.1	45	17.9	68		
11.4	23	14.1	46	18.2	69		

4. 修定震中和发震时刻

用上述办法测定震中和发震时刻的精度都不很高．为了提高精度，需要对初定震中进行修正．修正的方法有多种，这儿介绍最小二乘法．其已知条件为：

① 台站经纬度 (φ_s, λ_s)；

② 各台 P 波到时 T_P；

③ 初定震中 (φ_e, λ_e) 和发震时刻 T_0；

并认为当修定后的震中和发震时刻给出的 P 波走时与 J-B 走时表或 1968 年 P 波走时表给出的走时之差的平方和为最小时，就是最佳值．

(1) 残差方程组的建立

由图 (12.12)，台站到初定震中的距离 Δ 可表示为：

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(90^\circ - \varphi_s)\cos(90^\circ - \varphi_e) + \sin(90^\circ - \varphi_s)\sin(90^\circ - \varphi_e)\cos(\lambda_e - \lambda_s) \\ &= \sin\varphi_s \sin\varphi_e + \cos\varphi_s \cos\varphi_e \cos(\lambda_e - \lambda_s),\end{aligned} \tag{4}$$

注意这儿 φ_s，φ_e 都是地心纬度．地心纬度是地球椭球体的中心到观测点的连线和赤道面的夹角，而地理纬度是观测点重力线的切线与赤道面的夹角．由地理纬度 $\varphi_{理}$ 换算成地心纬度 $\varphi_{心}$ 的公式为

$$\varphi_{心} = \varphi_{理} - 11.7\sin 2\varphi_{理}. \tag{5}$$

由 (4) 式计算 Δ，查走时表得 P 波走时 t_P．同时，由 T_P 减 T_O 得 P 波走时 t_{OP}．t_P 与 t_{OP} 的差值记为 F，即

$$F = t_P - t_{OP},$$

F 称为残差．它也就是由于初定参数 λ_e，φ_e，T_O 的不准(已经假定走时表是准确的)而造成的 P 波走时误差 dt．而根据误差传播定理有

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \lambda_e}\delta\lambda_e + \frac{\partial t}{\partial \varphi_e}\delta\varphi_e + \frac{\partial t}{\partial T_0}\delta T_0, \tag{6}$$

因此

$$\frac{\partial t}{\partial \lambda_e}\delta\lambda_e + \frac{\partial t}{\partial \varphi_e}\delta\varphi_e + \frac{\partial t}{\partial T_0}\delta T_0 - F = 0, \tag{7}$$

而

$$\frac{\partial t}{\partial T_0} = 1,$$

$$\frac{\partial t}{\partial \lambda_e} = \frac{\partial t}{\partial \Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_e},$$

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi_e} = \frac{\partial t}{\partial \Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_e},$$

其中 $\frac{\partial t}{\partial \Delta}$ 可由 P 波走时曲线的斜率或走时表的尾差求得．而对 (4) 式微商可以求得

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_e} = \frac{\sin\varphi_e \cos\varphi_s \cos(\lambda_e - \lambda_s) - \sin\varphi_s \cos\varphi_e}{\sin\Delta},$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_e} = \frac{\cos\varphi_s \cos\varphi_e \sin(\lambda_e - \lambda_s)}{\sin\Delta}.$$

因此，(7) 式中的系数已知，$\delta\lambda_e$、$\delta\varphi_e$、δT_0 是待求的震中位置和 T_0 的修正值。为了书写方便和前面用的公式一致起见，引入记号

$$a_1 = \frac{\partial t}{\partial \lambda_e}, \quad a_2 = \frac{\partial t}{\partial \varphi_e}, \quad a_3 = \frac{\partial t}{\partial T_0}, \quad b = -F,$$

$$\delta\lambda_e = \xi_1, \quad \delta\varphi_e = \xi_2, \quad \delta T_0 = \xi_3.$$

把 (7) 式写成为

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + b = 0, \tag{8}$$

上式常称为 P 波走时残差方程. 有 n 个台站就有 n 个残差方程，我们还是像前面已经作过的那样，把它们简记为

$$a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + b_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

(2) 正规化和解方程组

和以前曾做过的一样，为使从方程组 (9) 解出的 ξ_1、ξ_2、ξ_3 能成为在最小二乘意义下的最佳值，我们取

$$R = \sum_{k=1}^{n} (a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + b_k)^2$$

令

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_3} = 0.$$

就得到三个方程，经整理之后可写作

$$\begin{cases} a'_{11}\xi_1 + a'_{12}\xi_2 + a'_{13}\xi_3 + b'_1 = 0, \\ a'_{21}\xi_1 + a'_{22}\xi_2 + a'_{23}\xi_3 + b'_2 = 0, \\ a'_{31}\xi_1 + a'_{32}\xi_2 + a'_{33}\xi_3 + b'_3 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a'_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}, \\ b'_j &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}b_k. \end{aligned}\right\} (j, i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

方程组 (10) 是正规方程. 解出 ξ_1, ξ_2, ξ_3，也就是求得了震中位置和发震时刻的修正值 $\delta\lambda_e$, $\delta\varphi_e$, δT_0.

(3) 误差评定

将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 的值代回 (9) 式，得到差值 e_k，

$$e_k = a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + a_{k3}\xi_3 + b_k, \quad k = 1, \cdots, n \tag{12}$$

则由修定后的震中位置、发震时刻仍不够准确而造成的 P 波走时的标准误差为：

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} e_k^2}{n-3}}, \tag{13}$$

而震中位置、发震时刻的标准误差为：

$$\begin{cases} \mu_{\xi_1} = \sqrt{Q_{11}}\,\mu, \\ \mu_{\xi_2} = \sqrt{Q_{22}}\,\mu, \\ \mu_{\xi_3} = \sqrt{Q_{33}}\,\mu, \end{cases} \tag{14}$$

这儿 Q_{11}、Q_{22}、Q_{33} 分别是 ξ_1、ξ_2、ξ_3 的权倒数(或自乘权系数)。根据高斯求权倒数法[20]，解以下三个三元一次方程组就可以求得它们:

$$\begin{cases} a'_{11}Q_{11} + a'_{12}Q_{12} + a'_{13}Q_{13} = 1, \\ a'_{21}Q_{11} + a'_{22}Q_{12} + a'_{23}Q_{13} = 0, \\ a'_{31}Q_{11} + a'_{32}Q_{12} + a'_{33}Q_{13} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} a'_{11}Q_{21} + a'_{12}Q_{22} + a'_{13}Q_{23} = 0, \\ a'_{21}Q_{21} + a'_{22}Q_{22} + a'_{23}Q_{23} = 1, \\ a'_{31}Q_{21} + a'_{32}Q_{22} + a'_{33}Q_{23} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a'_{11}Q_{31} + a'_{12}Q_{32} + a'_{13}Q_{33} = 0, \\ a'_{21}Q_{31} + a'_{22}Q_{32} + a'_{23}Q_{33} = 0, \\ a'_{31}Q_{31} + a'_{32}Q_{32} + a'_{33}Q_{33} = 1, \end{cases} \tag{17}$$

式中 $Q_{12} = Q_{21}$, $Q_{13} = Q_{31}$, $Q_{23} = Q_{32}$ 是一些非自乘权系数，在这儿并不感兴趣。因此，在解方程组 (15) 时，只要求出 Q_{11} 即可。同样，解 (16)、(17) 时也只要解出 Q_{22}、Q_{33} 就行了。

将求得的 Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} 代入 (14)，算出 μ_{ξ_1}, μ_{ξ_2}, μ_{ξ_3}，这就是修定后的参数的误差.修定后的参数可以表示成为:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_e &= \lambda_e + \xi_1 \pm \mu_{\xi_1}, \\ \tilde{\varphi}_e &= \varphi_e - \xi_2 \pm \mu_{\xi_2}, \\ \widetilde{T}_0 &= T_0 + \xi_3 \pm \mu_{\xi_3}. \end{aligned}$$

如果认为这样的误差还太大，可以把 $\tilde{\lambda}_e$, $\tilde{\varphi}_e$, $\widetilde{T}_0$ 作为初定值再重复上述修正过程，直到满意为止。这就是迭代法.

由已知资料求出 a'_{ji}, b'_j 建立方程组 (10)，到解线性方程组 (10)、(15)、(16)、(17) 求出 ξ_1, ξ_2, ξ_3, Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} 和计算误差，都由计算机完成.

以上修定地震参数是从建立走时残差方程着手的。有人研究改用从建立震中距离的残差方程来进行，使计算过程更为简便、迅速。据说，这时计算会加快十倍左右。

第十三章　地震强度及其测定方法

目前常用来表示地震强弱的量有以下几个.

1. 地震的能量

地震把震前积累在岩石中的应变能 $W_{总}$ 中的 ΔW 部分释放了出来，$\Delta W = W_{总} - W_0$，W_0 是剩余应变能.

ΔW 以这样几种形式释放出来：使断层错动的机械功，摩擦热能，弹性波能量 E，其它形式的物理化学能等等. ΔW 的大小表示了地震的强弱. 目前，ΔW 有一些估计办法(见 § 15.4)，但要精确地求出 ΔW 还有一些困难. 并且，目前仅地震波能量 E 可由地震图上近似求出，其它形式的几部分能量还没有很恰当的测定方法；因而各部分的比例也还不大清楚. 由于地震的破坏作用主要是地震波所引起的，所以地震的强度主要决定于 E，但须指出，E 只是 ΔW 的一部分. 若不特别说明，通常所谓的"地震能量"即是指"地震波能量"，而不是所释放的总能量.

2. 地震的震级

通常定义震级 $M \propto \lg\left(\dfrac{A}{T}\right)$. A 是观测点某种地震波动造成的地动位移的最大振幅，T 是其相应周期. $\left(\dfrac{A}{T}\right)$ 正比于该周期为 T 的波的平均能流密度. 通常认为当地震在约定的震中距离处该周期波的能流密度越大时，对全空间求和后所得出的地震波总能量 E 也越大. 而一般有 $E \propto \Delta W$. 所以通常 M 越大时，地震释放的总能量也越大，即震级基本上反映了地震本身的大小.

3. 地震矩

地震矩 $m_0 = \mu S \Delta u$. 这里 μ 是剪切模量，S 是断层面面积，Δu 是断层的平均错距. 地震矩是用双力偶震源模型中每一个单力偶的等效力偶矩，这在 § 9.4 中已经证明. 在断层作剪切错动时，一盘断层面上的介质相对于原先位置的错距为 $+\dfrac{\Delta u}{2}$；该盘介质发生剪切应变的介质厚度或应变所达到的距离范围为 ξ（在断层面法线方向上），那么作为一种粗略的近似，可以认为剪切应变为 $+\dfrac{\Delta u/2}{\xi}$，相应的剪切应力为 $+\mu\dfrac{\Delta u/2}{\xi}$，剪切力或地震释放的应力降为 $+\mu\dfrac{\Delta u/2}{\xi}S$. 同样，与另一盘相对应的是 $-\mu\dfrac{\Delta u/2}{\xi}$，$-\mu\dfrac{\Delta u/2}{\xi}S$. 即两边的剪切力值相等而方向相反，两力之间的距离为 2ξ. 因此断层错动力矩为

$$m_0 = \mu\frac{\Delta u/2}{\xi}S \times 2\xi.$$

其数值即为 $m_0 = \mu \Delta u S$. 地震越大时，往往断层面积 S 和错距 Δu 也愈大，因而 m_0 越大.

所以地震矩反映了地震本身的大小，是表示震源断层错动规模的一个物理量。

4. 烈度

烈度是指地震对地面上人和物的影响及破坏程度。这种影响和破坏在震中区最强烈，所以以震中烈度 I_0 表示一个地震的强度。一般来说，地震越大则 I_0 愈高。但是，I_0 也受地表地质条件、震源深度的影响较大，因此还不能完全本质地反映地震的大小，它是个半定量半定性的量。

地震波能量 E、震级 M、烈度 I_0 之间的经验关系为

$$\lg E = 1.5M + 11.8 \quad (E，尔格)$$

$$M = 1 + \frac{2}{3} I_0 \quad (深度约十几公里的浅震)$$

和

$$M = 0.67I_0 + 1.7\lg h - 1.4 \quad (震源深度 h 以公里为单位，适用于浅震)$$

关于地震矩 m_0 与震级 M 之间的关系，目前人们还正在积累资料。一般各人得到的经验公式的形式都为

$$\lg m_0 = aM + b$$

但对于不同地区或不同震级范围内的地震，式中常数 a，b 的值都不太一致。怀斯（M. Wyss）和布龙（J. N. Brune）[69] 在 1968 年曾给出

$$\lg m_0 = 1.7M_L + 15.1 \quad (3 < M_L < 6).$$

而布龙和恩泽（G. Engen）在 1969 年给出

$$\lg m_0 = M + 19.2 \quad (6 < M < 7).$$

陈培善在 1977 年综合国内外发表的资料得到

$$\lg m_0 = 1.5M + 16 \quad (-1 < M < 8.6)$$

上式震级范围很大，与观测数据相比，在微震段斜率 1.5 偏大，而在 7 级以上大震范围则偏小。

地震烈度的评定方法前已述及。地震矩 m_0 的求法在后面第十五章介绍。本章只介绍地震波能量 E 和地震震级 M 的测定方法。

§13.1 测定地震波能量

一、由地震图求通过观测点的弹性波能量 ε

设平面简谐波

$$u(t) = \tilde{A}\cos\omega\left(t - \frac{D}{v}\right)$$

在理想弹性介质中以速度 v 传播。那么，在单位时间里，通过垂直于射线的单位面积的能量的数值为

$$W = \rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2 v,$$

W 即能流密度，它在一个周期内的平均值 $\overline{W}$ 为：

$$\overline{W}=\frac{1}{2}\rho\omega^2\widetilde{A}^2v=2\pi^2\rho\left(\frac{\widetilde{A}}{T}\right)^2v.$$

实际通过观测点的是一列振幅、周期都随时间变化的波，v 也随震相而变．将波列分成 n 个时间间隔 $\Delta t_i(i=1,2,\cdots,n)$，每一小段内的 $\widetilde{A}$，T 近似为常数，可用上式求能量；各段能量之和就是通过观测点的总能量 ε：

$$\varepsilon=2\pi^2\rho\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\widetilde{A}}{T}\right)_i^2\Delta t_i v_i,\tag{1}$$

式中 $\widetilde{A}$ 是波的入射位移振幅．由地震图求 $\widetilde{A}$ 的方法如下：

1. 由地震图求地动位移

测量地震图上同一时刻三个分向上的记录振幅和周期，根据周期查相应的放大倍数，换算成地动位移的三个分量：$A_{南北}$、$A_{东西}$、$A_{上下}$．

对于 P 波，其地动位移的水平分量和垂直分量分别为

$$A_{P水平}=\sqrt{A_{P东西}^2+A_{P南北}^2},$$

$$A_{P垂直}=A_{P上下}.$$

对于 S 波，一般具有 SV、SH 两个分量，这两个分量的地动位移和入射位移的关系不同，所以通常需要先由地震图上得出的 S 波地动位移的 $A_{S南北}$，$A_{S东西}$，$A_{S上下}$ 三个分量来分解出 SV，SH 分量．分解的方法表示在图 13.1 中．s_1 代表台站，台站和震中的连线 s_1E 由 $A_{P南北}$，$A_{P东西}$ 合成而得到．S 波的水平分量

$$A_{S水平}=\sqrt{A_{S南北}^2+A_{S东西}^2},$$

它包含有两个分量：

① A_{SH}，它只有水平向，与入射面垂直，因而与 s_1E 垂直；

② $A_{SV水平}$，它在入射面内，与 s_1E 直线相一致．

因此，只要将 $A_{S水平}$ 向 s_1E 直线和它的垂线 s_1F 上分别投影就得到 $A_{SV水平}$ 和 A_{SH}．而由于 SH 只有水平分量，所以

$$A_{S垂直}=A_{S上下}=A_{SV垂直},$$

于是求得

$$A_{SV}=\sqrt{A_{SV水平}^2+A_{SV垂直}^2}.$$

这样，就把 S 波地动位移分解成 SV、SH 两部分了．

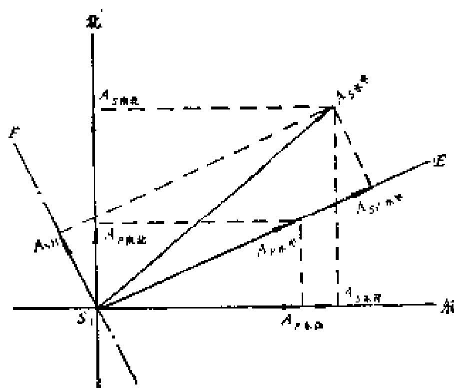


图　13.1

2. 由地动位移求入射位移

地震波入射到地面时，将产生反射波和反射转换波．所以地动位移是入射波、反射波、反射转换波位移的迭加．

(1) P 波入射

位移振幅为 $\widetilde{A}_P$ 的 P 波以入射角 i_P 入射到地面时，在入射面内将产生反射 P 波和反射转换波 SV，设它们的位移振幅分别为 A'_P 和 A'_{SV}，入射角为 i_P 和 i_S（图 5.1），则

$$A_{P垂直} = -\tilde{A}_P\cos i_P + A'_P\cos i_P + A'_{SV}\sin i_S,$$

$$A_{P水平} = \tilde{A}_P\sin i_P + A'_P\sin i_P - A'_{SV}\cos i_S.$$

得

$$\frac{A_{P垂直}}{\tilde{A}_P} = \left(\frac{A'_P}{\tilde{A}_P} - 1\right)\cos i_P + \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_P}\sin i_S = k_1, \tag{2}$$

$$\frac{A_{P水平}}{\tilde{A}_P} = \left(\frac{A'_P}{\tilde{A}_P} + 1\right)\sin i_P - \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_P}\cos i_S = k_2. \tag{3}$$

式中 $\frac{A'_P}{\tilde{A}_P}$, $\frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_P}$ 是反射 P 和 SV 波的位移反射系数，分别为

$$\frac{A'_P}{\tilde{A}_P} = \frac{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S - \alpha^2\cos^2 2i_S}{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S + \alpha^2\cos^2 2i_S},$$

$$\frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_P} = \frac{-2\alpha\beta\sin 2i_P\cos 2i_S}{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S + \alpha^2\cos^2 2i_S}.$$

(α, β 为纵、横波波速)

由地震图求得 P 波视入射角 $\bar{i}_P$ 之后再求出 i_P、i_S 的方法已在 § 5.2 中叙述过. 总之(2)、(3)式右端 k_1, k_2 能算出，$A_{P水平}$, $A_{P垂直}$ 也已得到，所以入射位移 A_P 可由下列两式中任何一式求出:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A}_P &= \frac{A_{P垂直}}{\left(\frac{A'_P}{\tilde{A}_P} - 1\right)\cos i_P + \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_P}\sin i_S} = \frac{A_{P垂直}}{k_1}, \\ &\text{或} \\ \tilde{A}_P &= \frac{A_{P水平}}{\left(\frac{A'_P}{\tilde{A}_P} + 1\right)\sin i_P - \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_P}\cos i_S} = \frac{A_{P水平}}{k_2}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(2) SV 波入射

设入射波位移振幅为 $\tilde{A}_{SV}$，入射角为 i_S；在入射面内产生反射 SV、P 的位移振幅为 A'_{SV}, A'_P，反射角为 i_S, i_P (图 5.2)，则

$$A_{SV垂直} = \tilde{A}_{SV}\sin i_S + A'_{SV}\sin i_S + A'_P\cos i_P,$$

$$A_{SV水平} = \tilde{A}_{SV}\cos i_S - A'_{SV}\cos i_S + A'_P\sin i_P.$$

得

$$\left.\begin{aligned}\tilde{A}_{SV} &= \frac{A_{SV垂直}}{\left(1 + \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_{SV}}\right)\sin i_S + \frac{A'_P}{\tilde{A}_{SV}}\cos i_P} = \frac{A_{SV垂直}}{k_3}, \\ &\text{或} \\ \tilde{A}_{SV} &= \frac{A_{SV水平}}{\left(1 - \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_{SV}}\right)\cos i_S + \frac{A'_P}{\tilde{A}_{SV}}\sin i_P} = \frac{A_{SV水平}}{k_4},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中

$$\frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_{SV}} = \frac{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S - \alpha^2\cos^2 2i_S}{\beta^2\sin 2i_P\sin 2i_S + \alpha^2\cos^2 2i_S},$$

$$\frac{A'_P}{\tilde{A}_{SV}} = \frac{2\alpha\beta \sin 2i_S \cos 2i_S}{\beta^2 \sin 2i_P \sin 2i_S + \alpha^2 \cos^2 2i_S},$$

$$k_3 = \left(1 + \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_{SV}}\right) \sin i_S + \frac{A'_P}{\tilde{A}_{SV}} \cos i_P,$$

$$k_4 = \left(1 - \frac{A'_{SV}}{\tilde{A}_{SV}}\right) \cos i_S + \frac{A'_P}{\tilde{A}_{SV}} \sin i_P.$$

这时的 i_S、i_P 也可用 § 5.2 中的知识求得，因而 k_3, k_4 可求，于是由 (5) 式中任一式得到 $\tilde{A}_{SV}$.

(3) *SH* 波入射

这时只产生反射 *SH* 波，且入射 *SH* 波位移振幅

$$\tilde{A}_{SH} = \frac{A_{SH}}{2}.$$

得出 $\tilde{A}_{SV}$、$\tilde{A}_{SH}$ 之后，可以求出 *S* 波入射位移振幅

$$\tilde{A}_S = \sqrt{\tilde{A}^2_{SV} + \tilde{A}^2_{SH}}.$$

求出 $\tilde{A}_P$、$\tilde{A}_S$ 之后代入 (1) 式可算出 ε.

但是，除了求 k 值计算很烦琐之外，作矢量合成也很麻烦. 因此，在实际工作中为了方便而又不失一定的精确性，往往在求 $\tilde{A}$ 和计算 ε 时再作一些简化. 例如，实际上，对于 *SH* 波总是有

$$\frac{A_{SH}}{\tilde{A}_{SH}} = 2.$$

而对于 *SV* 和 *P* 波，当入射角小于 70° 时，根据观测一般有[21]

$$\frac{A_{SV}}{\tilde{A}_{SV}} = 1.8\text{—}2.3,$$

$$\frac{A_P}{\tilde{A}_P} = 1.8\text{—}2.3.$$

所以可以认为

$$\frac{A}{\tilde{A}} \simeq 2.$$

即无论是哪种波，入射位移振幅近似为地动位移的一半. 其次，可以用地震图上振幅最大的那个分向上的地动位移 $A_j^{\max}$(j = 东西、南北、上下分向) 来近似表示地动位移的总振幅 A，观测得到它们之间的经验关系为

$$A \simeq \sqrt{2}\, A_j^{\max}.$$

于是，可以取

$$\tilde{A} \simeq \frac{A}{2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} A_j^{\max}$$

代入 (1) 式，得到计算 ε 的简化公式

$$\varepsilon = \pi^2\rho \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{A_j^{\max}}{T}\right)_i^2 v_i \Delta t_i \tag{6}$$

二、计算由震源发射出的弹性波的能量 E

由 ε 求弹性波的能量 E 的公式需分别几种情况来谈.

1. 用直达波 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 进行测定时的计算公式

在测定近震弹性波能量时，由 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 用 (1) 式算出通过观测点垂直于射线的单位面积的能量 ε. 这时射线为直线，波阵面为球面. 假定震源均匀地向周围发射能量，那么在整个半径为 D (震源距) 的球面上通过的能量为 $4\pi D^2\varepsilon$. 考虑到能量在传播时由于介质吸收而损耗了 $e^{\gamma D}$ 倍 (γ—衰减系数)，所以震源实际向四周发射的地震波能量为：

$$E = 4\pi D^2 \varepsilon e^{\gamma D} = 8\pi^3 \rho D^2 e^{\gamma D} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tilde{A}}{T}\right)_i^2 \Delta t_i v_i \tag{7}$$

2. 由地幔折射波 P、S 进行测定时的计算公式

P, S 的射线是弯曲的. 因此，需先将观测点算出的 ε 逆推到震源球面上，再计算总能量 E. 所谓震源球就是以震源为中心以震源深度 h 为半径的参考球，射线在球内的那一段可近似视为直线.

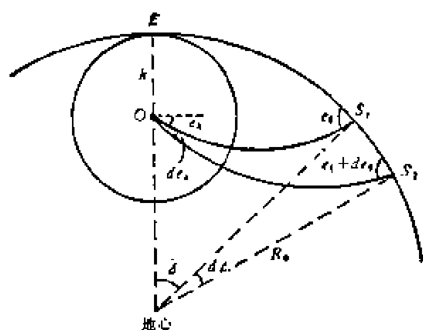


图 13.2

图 13.2 画出两条相邻射线 OS_1, OS_2, 其震中距离分别为 Δ、$\Delta + d\Delta$, 出射角分别为 e_0, $e_0 + de_0$. 它们之间所夹的环带面积为：

$$2\pi \cdot R_0 \sin\Delta \cdot R_0 d\Delta,\ (R_0\text{—地球半径})$$

把它投影到与射线垂直的方向上是

$$2\pi \cdot R_0 \sin\Delta \cdot R_0 d\Delta \cdot \sin e_0,$$

因此从这个面积上通过的能量为

$$E' = 2\pi R_0^2 d\Delta \sin\Delta \sin e_0 \varepsilon.$$

设在震源处射线与铅直线 OE 的夹角的余角分别为 e_h, $e_h + de_h$, 则射线在震源球面上所夹的环带面积为 $2\pi \cdot h\cos e_h \cdot h de_h$, 其上通过的能量

$$E'' = 2\pi h^2 \cos e_h de_h \cdot \frac{E}{4\pi h^2},$$

式中 E 是震源发射出的地震波能量. 显然 E' 是由 E'' "传播过去的，途中损耗了 $e^{\gamma s}$ 倍 (s-射线路径). 所以 $E'' e^{-\gamma s} = E'$, 将 ε 的表示式 (1) 代入，整理得

$$E = 8\pi^2 \rho \frac{R_0^2 \sin\Delta \sin e_0}{\cos e_h \dfrac{de_h}{d\Delta}} e^{\gamma s} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tilde{A}}{T}\right)_i^2 \Delta t_i v_i. \tag{8}$$

3. 用面波进行测定时的计算公式

对于面波占显著优势的浅远震，一般测定面波的能量来作为地震波的能量.

杰弗瑞斯推导出沿半无限空间的表面传播的瑞利波的能量主要集中在厚度 $H = 1.12\lambda$ (λ—— 瑞利波长) 的表面地层中.

在观测点可计算出瑞利波通过单位面积的能量 ε, 那么在通过震中距 Δ 处的厚度为

H的环带里的能量为

$$2\pi R_0 \cdot \sin\Delta \cdot H \cdot \varepsilon.$$

它是由瑞利波的能量 E 经过介质吸收损耗而得到的，即

$$2\pi R_0 \sin\Delta \cdot H\varepsilon = Ee^{-\gamma\Delta}.$$

所以

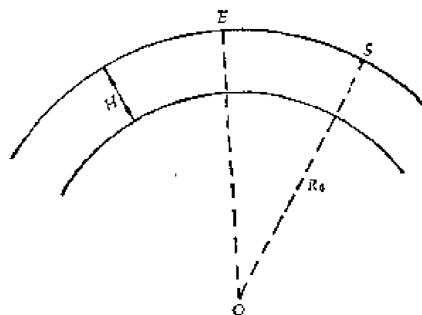


图 13.3

$$E = 4\pi^3\rho R_0 \sin\Delta e^{\gamma\Delta} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tilde{A}}{T}\right)_i^2 \Delta t_i v_i H_i$$

$$= 4.48\pi^3\rho R_0 \sin\Delta e^{\gamma\Delta} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\tilde{A}}{T}\right)_i^2 \Delta t_i v_i. \qquad (9)$$

我们已经看到，尽管 (7)、(8)、(9) 式是在简化条件下得出的近似公式，测定地震波能量的计算也已经是很繁杂的了. 这是在实际工作中经常地直接地用地震波能量标度地震强弱的困难.

§ 13.2 测 定 震 级

一、里克特 (G. F. Richter)-古登堡 (B. Gutenberg) 震级体系

1. 近震震级 M_L

里克特首先提出用地震波的最大振幅来标度近震的大小[70].

设第一个地震在各台的最大记录振幅为 $B_1, B_2 \cdots B_n$; 第二个地震在各台的最大记录振幅为 $B'_1, B'_2 \cdots B'_n$; 其中 $B = \frac{B_{东西} + B_{南北}}{2}$, 是南北和东西向的最大振幅 $B_{东西}$, $B_{南北}$ (它们不必是同一时刻的，也不同是在什么震相上取到的，但是根据近震震相记录特征，最大振幅 $B_{南北}$, $B_{东西}$ 通常总是在 S 波上取到.) 的算术平均值，以毫米为单位. 里克特从观测中发现有

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2} = \cdots = \frac{B'_n}{B_n} = C\ (\text{常数})$$

同样对第三个地震有

$$\frac{B''_1}{B_1} = \frac{B''_2}{B_2} = \cdots = \frac{B''_n}{B_n} = D\ (\text{常数})$$

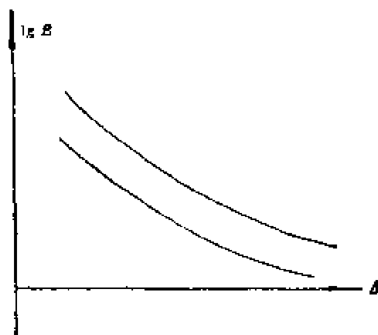


图 13.4

取对数:

$$\lg B'_1 - \lg B_1 = \lg B'_2 - \lg B_2 = \cdots$$
$$= \lg B'_n - \lg B_n = \lg C = c$$
$$\lg B''_1 - \lg B_1 = \lg B''_2 - \lg B_2 = \cdots$$
$$= \lg B''_n - \lg B_n = \lg D = d$$

可见第二、三个地震的大小由常数 c、d 反映了出来. 取一个地震为标准，称为零级地震，它的振幅记作 B_*，于是另一个地震与它的振幅对数之差，就定义为该地震的震级，以 M_L 来标记，即

$$M_L = \lg B - \lg B_* \qquad (1)$$

当初里克特是把在震中距离为 100 公里处，由伍德-安德生地震仪(静态放大率 2800，周期 0.8 秒，阻尼系数 0.8，频率特性见表 13.1 a)观测到两水平分量最大记录振幅的算术平均值为 1 微米的地震取作零级地震. 当然零级地震的能量并不为零，而是约为 10^{12} 尔格. 零级地震的 $\lg B_*$ 随震中距的变化已列在表 13.1 b 中.

2. 面波震级 M

在浅远震记录上，面波是主要震相，它的波散性使人容易辨认，振幅大，便于测量. 因此古登堡把震级推广到远震，用面波水平向最大地动位移来测定，记作 M 或 M_S，公式为

$$M = \lg A - \lg B_* \tag{2}$$

式中 A—周期为 20 秒的面波最大水平地动位移，是两水平分量的矢量和，以微米为单位. 而

$$-\lg B_* = \begin{cases} 1.818 + 1.656 \lg \Delta^\circ \quad (15^\circ \leqslant \Delta \leqslant 130^\circ) & (3) \\ 5.04 + \frac{1}{2}\left[48.25\,\gamma(\Delta^\circ - 90^\circ) + \lg \sin\Delta^\circ + \frac{1}{3}(\lg \Delta^\circ - 1.954)\right] \\ \qquad (130^\circ < \Delta < 180^\circ) & (4) \end{cases}$$

(3) 式是根据观测资料得出的经验关系. (4) 式是半经验半理论公式，其中的 γ 是面波吸收系数，对于周期为 20 秒的面波，取 $\gamma \simeq 0.0003$ (1/公里).

3. 体波震级 m

强远震的面波记录有时限幅，深远震的面波很弱甚至不出现. 所以仅有用面波测定

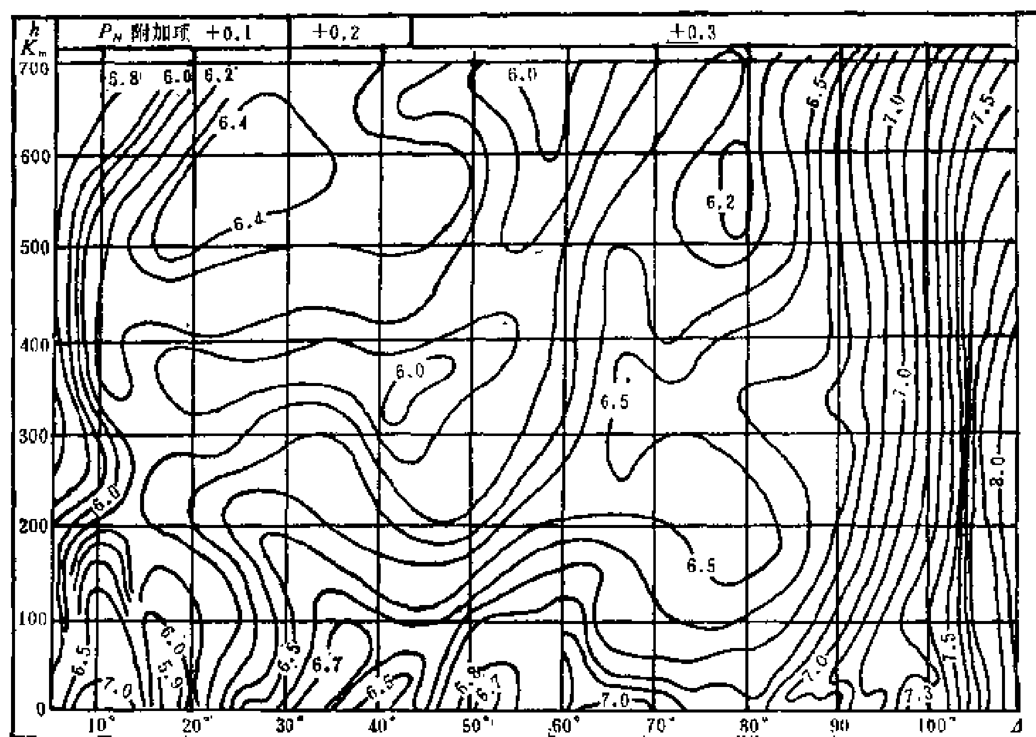


图 13.5 P_Z 的 Q 值

表 13.1a 伍-安地震仪频率特性

周期 T（秒）	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
放大率 V	2786	2745	2669	2557	2395	2199	1972	1750	1538	1350
T	1.2	1.4	1.8	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
V	1033	807	516	424	278	190	144	111	88	71

（两水平向频率特性相同）

表 13.1б 零级地震 $\lg B_*$ 值

Δ(公里)	$-\lg B_*$	Δ	$-\lg B_*$	Δ	$-\lg B_*$
0	1.4	110—120	3.1	350—370	4.3
10	1.5	130—140	3.2	380—390	4.4
20	1.7	150—160	3.3	400—420	4.5
25	1.9	170—180	3.4	430—460	4.6
30	2.1	190—200	3.5	470—500	4.7
35	2.3	210—220	3.6	510—550	4.8
40	2.4	230—240	3.7	560—590	4.9
45	2.5	250—260	3.8	600	5.1
50	2.6	270—280	3.9	700	5.2
60—70	2.8	290—300	4.0	800	5.4
75—85	2.9	310—320	4.1	900	5.5
90—100	3.0	330—340	4.2	1000	5.7

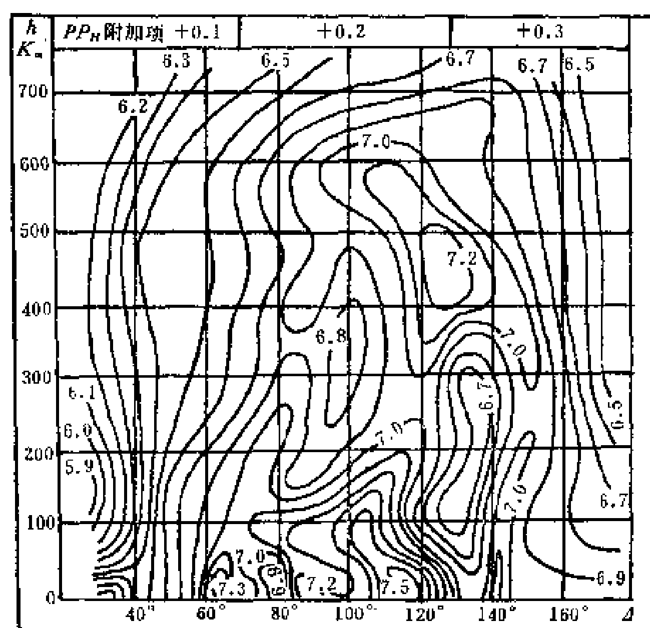


图 13.6 PP_Z 的 Q 值

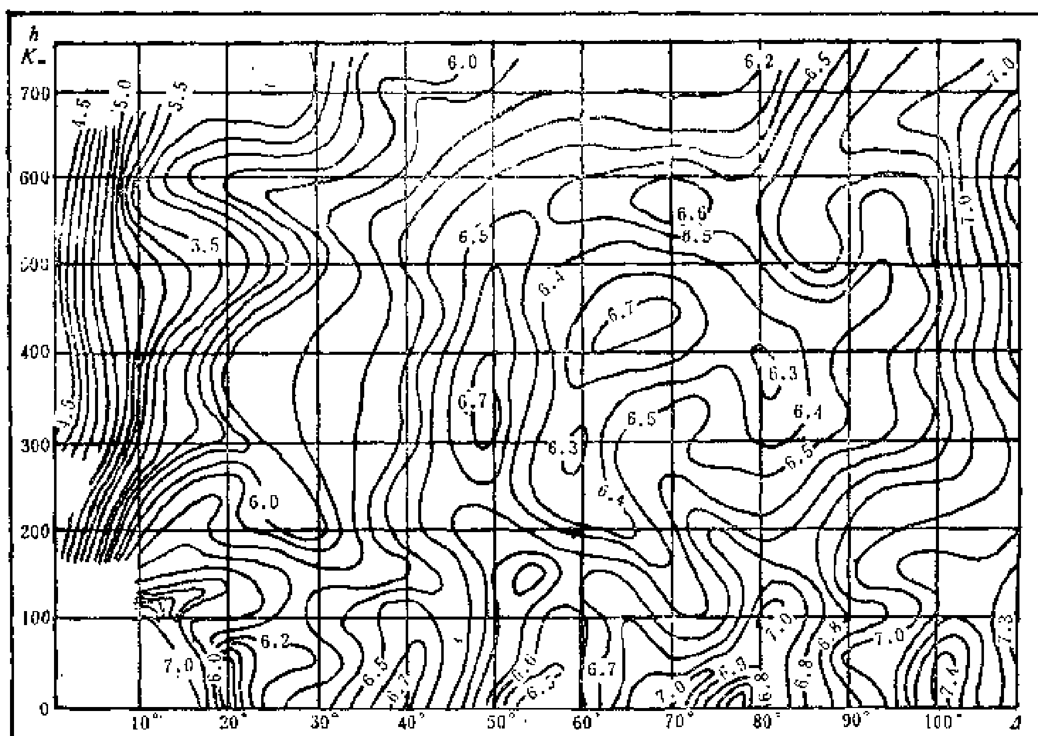


图 13.7 S_H 的 Q 值

远震震级的方法还不够，古登堡又将震级推广到用体波来测定，记作 m，公式为

$$m = \lg\left(\frac{A}{T}\right)_{\max} + Q + S \tag{5}$$

式中 A. 体波的最大地动位移．它可以是 P 和 PP 的垂直向（P_Z, PP_Z）或水平向（P_H, PP_H）最大地动位移，也可以是 S 波的水平向（S_H）最大地动位移，以微米计；T 是相应周期，以秒计．

Q. 标定函数，已分别给出 P_Z、P_H、PP_Z、PP_H、S_H 的 Q 图表．对于浅震，可查表 13.2；当震源有一定深度时，可查图 13.5，13.6，13.7，其中图 13.5，13.6 中的 Q 值是对 P_Z, PP_Z 给出的，若用 P_H, PP_H 测 m，须在查出的 Q 值上加上图的上端标出的数值．Q 是对传播距离、介质吸收所作的补偿．

S. 台站校正值．

4. M_L、M、m 之间的关系

古登堡在推广震级时，本希望对同一地震测得的震级 M_L、M、m 数值相等．但实践表明，它们并不相等．它们之间的经验换算公式为：

$$\begin{aligned} M &= 1.59m - 4.0 \\ M &= 1.27(M_L - 1) - 0.016M_L^2 \end{aligned} \tag{6}$$

二、我国对震级体系的引用、发展和一些规定

1. 我国测定近震震级 M_L 的公式

我国不用伍德-安德生地震仪观测，不能直接用（1）式计算近震震级．但如果将地震

表 13.2 浅 震 的 Q 值

$\Delta°$	P_Z	P_H	PP_Z	PP_H	S_H	$\Delta°$	P_Z	P_H	PP_Z	PP_H	S_H
16	5.9	6.0			7.2	50	6.7	7.0	6.7	6.8	6.6
17	5.9	6.0			6.8	51	6.7	7.0	6.7	6.8	6.5
18	5.9	6.0			6.2	52	6.7	7.0	6.7	6.8	6.5
19	6.0	6.1			5.8	53	6.7	7.0	6.7	6.8	6.6
20	6.0	6.1			5.8	54	6.8	7.1	6.8	6.9	6.6
21	6.1	6.2			5.8	55	6.8	7.1	6.9	7.0	6.6
22	6.2	6.3			6.2	56	6.8	7.1	6.9	7.0	6.6
23	6.3	6.4			6.2	57	6.8	7.1	6.9	7.0	6.6
24	6.3	6.5			6.2	58	6.8	7.1	7.0	7.1	6.6
25	6.5	6.6			6.2	59	6.8	7.1	7.0	7.2	6.6
26	6.4	6.6			6.2	60	6.8	7.1	7.1	7.3	6.6
27	6.5	6.7			6.3	61	6.9	7.2	7.2	7.4	6.7
28	6.6	6.7			6.3	62	7.0	7.3	7.3	7.4	6.7
29	6.6	6.7			6.3	63	6.9	7.3	7.3	7.4	6.7
30	6.6	6.8	6.7	6.8	6.3	64	7.0	7.3	7.3	7.5	6.8
31	6.7	6.9	6.7	6.8	6.3	65	7.0	7.4	7.3	7.5	6.9
32	6.7	6.9	6.8	6.9	6.4	66	7.0	7.4	7.3	7.4	6.9
33	6.7	6.9	6.8	6.9	6.4	67	7.0	7.4	7.2	7.4	6.9
34	6.7	6.9	6.8	6.9	6.5	68	7.0	7.4	7.1	7.3	6.9
35	6.7	6.9	6.8	6.9	6.6	69	7.0	7.4	7.0	7.2	6.9
36	6.6	6.8	6.7	6.8	6.6	70	6.9	7.3	7.0	7.2	6.9
37	6.5	6.7	6.7	6.8	6.6	71	6.9	7.3	7.1	7.3	7.0
38	6.5	6.7	6.7	6.8	6.6	72	6.9	7.3	7.1	7.3	7.0
39	6.4	6.6	6.6	6.7	6.7	73	6.9	7.2	7.1	7.3	6.9
40	6.4	6.6	6.6	6.7	6.7	74	6.8	7.1	7.0	7.2	6.8
41	6.5	6.7	6.5	6.6	6.6	75	6.8	7.1	6.9	7.1	6.8
42	6.5	6.7	6.5	6.6	6.5	76	6.9	7.2	6.9	7.1	6.8
43	6.5	6.7	6.6	6.7	6.5	77	6.9	7.2	6.9	7.1	6.8
44	6.5	6.7	6.7	6.8	6.5	78	6.9	7.3	6.9	7.1	6.9
45	6.7	6.9	6.7	6.8	6.5	79	6.8	7.2	6.9	7.1	6.8
46	6.8	7.1	6.7	6.8	6.6	80	6.7	7.1	6.9	7.1	6.7
47	6.9	7.2	6.7	6.8	6.6	81	6.8	7.2	7.0	7.2	6.8
48	6.9	7.2	6.7	6.8	6.7	82	6.9	7.2	7.1	7.3	6.9
49	6.8	7.1	6.7	6.8	6.7	83	7.0	7.4	7.2	7.4	6.9

续 表

Δ°	P_Z	P_H	PP_Z	PP_H	S_H	Δ°	P_Z	P_H	PP_Z	PP_H	S_H
84	7.0	7.4	7.3	7.5	6.9	112	8.2	8.6	7.4	7.6	
85	7.0	7.4	7.3	7.5	6.8	114	8.6	9.0	7.5	7.7	
86	6.9	7.3	7.3	7.5	6.7	116	8.8		7.5	7.7	
87	7.0	7.3	7.2	7.4	6.8	118	9.0		7.5	7.7	
88	7.1	7.5	7.2	7.4	6.8	120			7.5	7.7	
89	7.0	7.4	7.2	7.4	6.8	122			7.4	7.6	
90	7.0	7.3	7.2	7.4	6.8	124			7.3	7.5	
91	7.1	7.5	7.2	7.4	6.9	126			7.2	7.4	
92	7.1	7.4	7.2	7.4	6.9	128			7.1	7.4	
93	7.2	7.5	7.2	7.4	6.9	130			7.0	7.3	
94	7.1	7.4	7.2	7.4	7.0	132			7.0	7.3	
95	7.2	7.6	7.2	7.4	7.0	134			6.9	7.2	
96	7.3	7.6	7.2	7.4	7.1	136			6.9	7.2	
97	7.4	7.8	7.2	7.4	7.2	138			7.0	7.3	
98	7.5	7.8	7.2	7.4	7.3	140			7.1	7.4	
99	7.5	7.8	7.2	7.4	7.3	142			7.1	7.4	
100	7.4	7.7	7.2	7.4	7.4	144			7.0	7.3	
101	7.3	7.6	7.2	7.4	7.4	146			6.9	7.2	
102	7.4	7.7	7.2	7.4	7.4	148			6.9	7.2	
103	7.5	7.9	7.2	7.4	7.3	150			6.9	7.2	
104	7.6	7.9	7.3	7.5	7.3	152			6.9	7.2	
105	7.7	8.1	7.3	7.5	7.2	154			6.9	7.2	
106	7.8	8.2	7.4	7.6	7.2	156			6.9	7.2	
107	7.9	8.3	7.4	7.6	7.2	158			6.9	7.2	
108	7.9	8.3	7.4	7.6	7.2	160			6.9	7.2	
109	8.0	8.4	7.4	7.6	7.2	170			6.9	7.2	
110	8.1	8.5	7.4	7.6	7.2						

最大记录振幅换算成地动位移，又把里克特的零级地震的 B_* 也换算成地动位移，那么仍可以它为标准来标度地震的震级。为此，把这时的震级公式写成：

$$M_L = \lg A_\mu + R(\Delta) \tag{7}$$

其中 $A_\mu = \frac{A_{东西} + A_{南北}}{2}$ 是两水平向最大地动位移（不必同一时刻同一震相）的算术平均值，以微米计；

$R(\Delta)$. 为待定的震级标定函数.

令这样测得的震级与原先里克特以记录振幅测出的相同，即

$$\lg A_\mu + R(\Delta) = \lg B - \lg B_*,$$

得

$$R(\Delta) = \lg B - \lg A_\mu - \lg B_*,$$

而

$$B = \frac{A_\mu \cdot V_{W-A}}{1000},$$

所以

$$R(\Delta) = \lg V_{W-A} - \lg B_* - 3.$$

式中 V_{W-A} 是伍-安仪对我们仪器测到的地动位移 A_μ 的动态放大率。由于同一种仪器在不同距离测出的 A_μ 的周期不同，不同仪器在同一地点测得 A_μ 的周期也不同，因而 V_{W-A} 不同，所以 $R(\Delta)$ 的值不仅随震中距离 Δ 而变，而且因仪器不同而有差异。表 13.3 给出的是我国常用的基式仪和 62 型、64 型地震仪的 $R(\Delta)$ 值。

实际在测定 M_L 时，应加台基校正值 S（以北京白家疃地震台为准）：

$$M_L = \lg A_\mu + R(\Delta) + S. \tag{8}$$

表 13.4 给出了几个台的 S 值。严格说来，还应加上一项震源深度校正值。

表 13.3 测定 M_L 的标定函数 $R(\Delta)$ 表

$\Delta_{公里}$	基式 $R_2(\Delta)$	62、64 型 $R_1(\Delta)$	$\Delta_{公里}$	基式 $R_2(\Delta)$	62、64 型 $R_1(\Delta)$	$\Delta_{公里}$	基式 $R_2(\Delta)$	62、64 型 $R_1(\Delta)$
0–5	1.8	1.8	110	3.5	3.5	350—370	4.3	4.5
10	1.9	1.9	120	3.5	3.5	380—390	4.3	4.6
15	2.0	2.0	130—140	3.5	3.6	400—420	4.4	4.7
20	2.1	2.1	150—160	3.6	3.7	430—460	4.4	4.75
25	2.3	2.3	170—180	3.7	3.8	470—500	4.5	4.8
30	2.5	2.5	190—200	3.7	3.9	510—600	4.5	4.9
35	2.7	2.7	210—220	3.8	4.0	610—650	4.6	5.0
40	2.8	2.8	230—240	3.9	4.1	700	4.7	5.1
45	2.9	2.9	250—260	3.9	4.1	750	4.7	5.2
50	3.0	3.0	270—280	4.0	4.2	800	4.7	5.2
55	3.1	3.1	290—300	4.1	4.3	850	4.8	5.2
60—70	3.2	3.2	310—320	4.1	4.4	900	4.8	5.2
75—85	3.3	3.3	330	4.2	4.5	1000		5.3
90—100	3.4	3.4	340	4.2	4.5			

表 13.4 测定 M_L 的台站校正值

台名 \ S \ $\Delta°$	1°—3°	3°—5°	5°—8°	8°—10°
佘 山	+0.34	+0.32	+0.28	+0.25
南 京	−0.02	0.00	+0.01	+0.03
广 州	+0.18	+0.17	+0.16	+0.16
昆 明	+0.11	+0.11	+0.10	+0.10

有的地震台只有垂直向地震仪。为了能用垂直向最大地动位移 $A_{\mu Z}$ 来测定 M_L，须统计它与 A_μ 的比值 $a = \frac{A_\mu}{A_{\mu Z}}$。例如对于 64 型仪器，由包头台资料得到 $a = 1.5$，则

$$M_L = \lg A_{\mu Z} + 0.17 + R_1(\Delta).$$

2. 我国测定面波震级 M_S 的公式

我国使用的面波震级公式为：

$$M_S = \lg\left(\frac{A}{T}\right)_{\max} + \sigma(\Delta) + C, \tag{9}$$

式中

A. 面波水平最大地动位移，是同一时刻两水平向位移矢量和，以微米计；

T. 相应周期，以秒计；

$\sigma(\Delta)$. 震级标定函数；

C. 台站校正值；

为了确定 $\sigma(\Delta)$，我国取白家疃地震台为基准台，令其 $C = 0$，对它所记录的 143 个地震测量 $\lg\left(\frac{A}{T}\right)_{\max}$ 值，令

$$\sigma(\Delta) = \bar{M} - \lg\left(\frac{A}{T}\right)_{\max}.$$

式中 $\bar{M}$ 是世界上 6 个地震台报出的面波震级的平均值。得到在 $8° - 130°$ 之间

$$\sigma(\Delta) = 1.66\lg\Delta° + 3.50, \tag{10}$$

而在 $130° - 180°$ 之间的 $\sigma(\Delta)$ 值由半经验半理论公式给出

$$\sigma(\Delta) = 6.74 + \frac{1}{2}\Big[(2.147e^{-0.04465\Delta°} + 1.325)$$

$$\times(\Delta° - 90°)\times 10^{-2} + \lg\sin\Delta° + \frac{1}{3}(\lg\Delta° - 1.954)\Big]. \tag{11}$$

白家疃台制成了震级列线图来简化计算。其操作方法如图 13.8 所示。由量出的 A 和 T 值分别在 A_μ 轴、T 轴上找出其标度点，两点的连线与 $\lg\frac{A}{T}$ 轴交于一点，将这一点与震中距离的标度点相连延长交 M 轴于一点，即给出震级。

其它地震台测定 M_S，也先用白家疃台的 M_S 公式算出或用上述列线图求出，然后求其与白家疃台测定的 M_S 的差值。对大量地震区别不同的震中距离范围对此差值作统计，求得

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(M_{Si} - M_{Si白})}{n},$$

以 C 来作校正即可。表 13.5 给出一些台站的校正值。

表 13.5 测定 M_S 台站校正值 C

(引自即将发表的郭履灿等人的 1979 年工作成果)

台名 \ C \ $\Delta°$	1°—10°	10°—20°	20°—30°	30°—40°	40°—80°	80°—130°	130°—180°
北京(白家疃)	+0.23	+0.02	−0.01	−0.06	−0.05	−0.03	−0.01
长春	+0.04	−0.03	−0.07	−0.14	−0.09	−0.05	+0.01
广州	+0.04	−0.08	−0.10	−0.04	+0.04	+0.03	+0.07
成都	−0.17	−0.31	−0.26	−0.24	−0.26	+0.06	+0.04
昆明	+0.11	−0.14	+0.04	−0.10	−0.06	−0.14	−0.08
兰州	−0.07	−0.09	−0.31	−0.76	−0.29	−0.03	−0.03
南京(鸡鸣寺)	+0.11	−0.05	−0.02	−0.01	+0.06	+0.10	+0.04
包头	+0.11	−0.13	−0.27	−0.21	−0.24	−0.13	−0.12
西安	−0.09	−0.12	−0.18	−0.17	−0.15	−0.02	+0.03
乌鲁木齐	−0.08	+0.03	−0.01	−0.20	−0.30	−0.16	−0.19
武汉	−0.14	−0.17	−0.18	−0.15	−0.11	−0.08	−0.03
佘山	+0.22	−0.03	−0.07	−0.02	+0.07	+0.10	−0.02

3 我国的几点规定

① 规定对外交换和向上级汇报资料时，以由 (9) 式测定的 M_S 为准. 凡无法直接测定 M_S 的台站，都要把他们所测出的 M_L 换算成 M_S. 由我国资料用 (8)、(9) 式测定 M_L，M_S 得到它们之间的换算关系为

$$M_S = 1.13M_L - 1.08. \tag{12}$$

表 13.6 M_L 换算 M_S 表

M_L	1.0	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2.0	2.4	2.5	2.7	3.0	3.3
M_S	0.1	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	1.8	2.0	2.3	2.6
M_L	3.4	3.5	3.9	4.0	4.5	4.7	4.8	5.1	5.5	5.6	6.0	
M_S	2.8	2.9	3.3	3.5	4.0	4.2	4.4	4.7	5.1	5.3	5.7	

② 我国对于体波震级，目前仍采用古登堡方法测定 m (公式 (5))．实际工作中，常用列线图操作：由体波最大地动位移 A 和相应周期 T 的连线交 $\lg\left(\frac{A}{T}\right)$ 轴于一点，将这点与标定函数 Q 值点相连延长交 M 轴于一点，即得 M (图 13.9)．这几已直接将 m 按 (6) 式换算成 M 了．

③震相振幅和周期受许多复杂因素影响，如台址地基情况、仪器类型、地震波传播路径上的介质特性、震源机制等，所以某个地震的震级应取围绕震中的几个台所测定震级的平均值．

三、震级与能量的统计关系

观测资料得出 E 与 M 的统计关系为

$$\lg E = 1.5M + 11.8 \ (E.\text{尔格}) \tag{13}$$

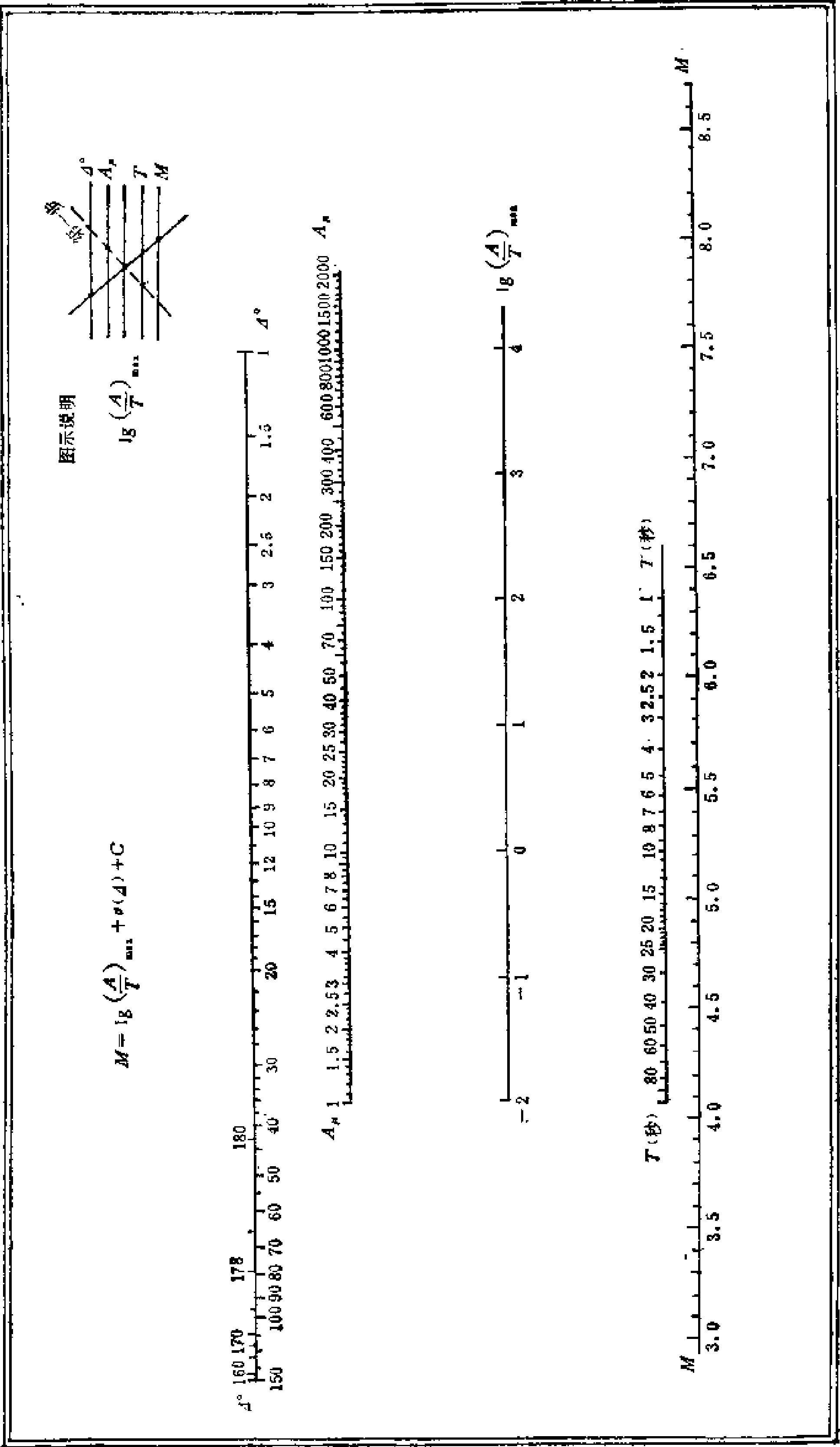
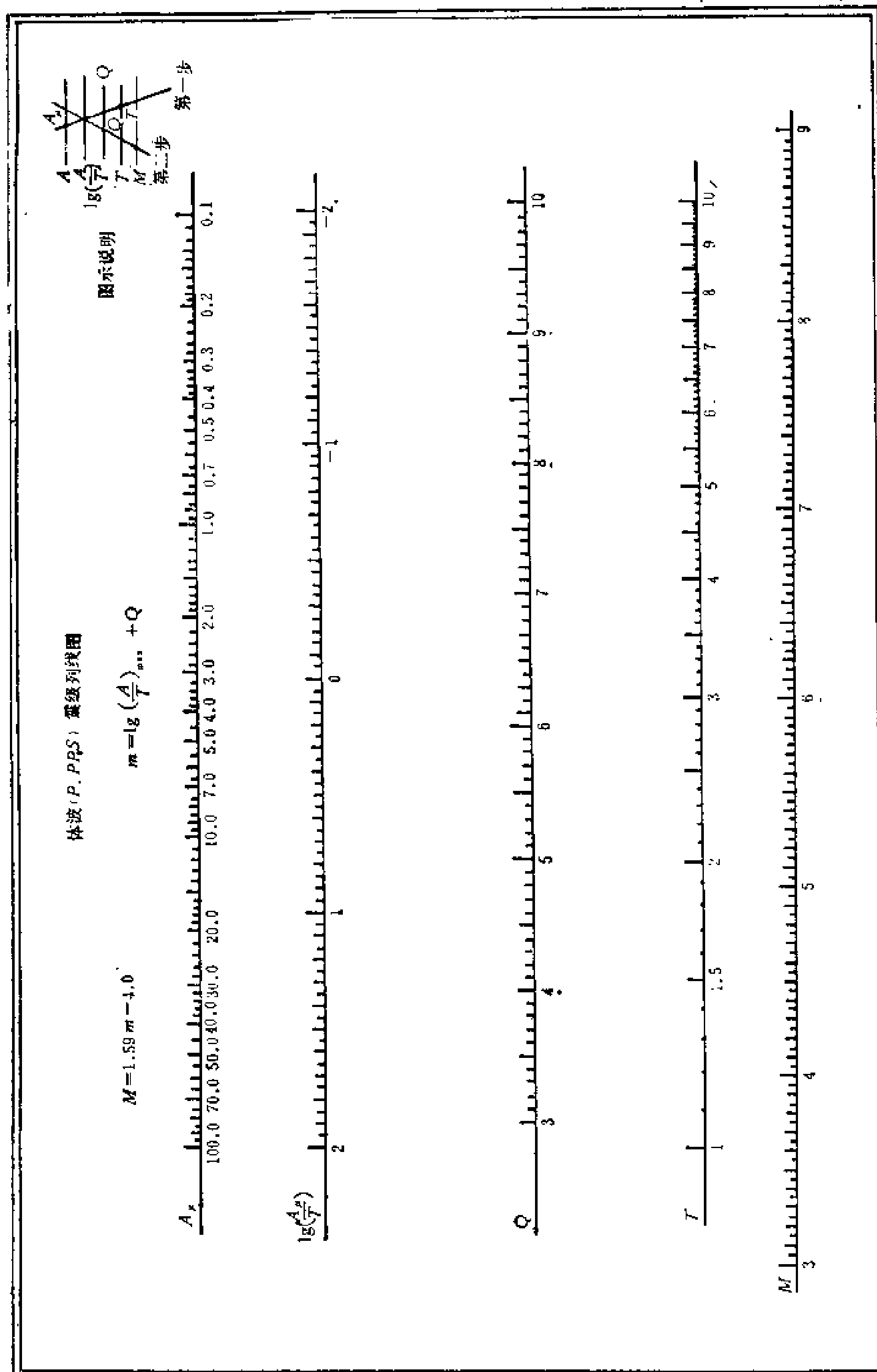


图 13.8 面波震级列线图



体波(P．PPS)震级列线图
$M=1.59m-4.0$
$m=\lg\left(\frac{A}{T}\right)_{max}+Q$
图示说明
第一步
第二步

图 13.9

用不同地区资料所得形式都是这样，仅两个常数略有差异. 上式经常用来简便地计算地震波能量.

有时，也用 $K=\lg E$ 来标度地震大小，K 称为地震的能级.

四、地震波卓越周期与震级的关系

在观测中普遍发现，地震体波、面波的振幅最大值所在周期 T 随震级 M 增大而增大. 例如，对于 $M\geqslant 6.3$ 级的大地震，kashahara 曾得到它们之间的经验关系为

$$\lg T=0.51M-2.59.$$

这说明较大地震产生的低频运动一般比小地震的要强些.

§ 13.3 震级测量的改进和震级物理意义的讨论

一、关于震级测量的改进

每一个实际搞地震观测分析的人都知道，震级的观测误差是很大的，经常在半级左右，个别时候还要大些. 如何提高震级的观测精度，也为人们所关心. 目前人们主要在以下几个方面来改进震级的观测[74].

① 在已经取得的更丰富的观测资料的基础上，把标定函数或起算函数算得更精细一些.

近来还有人用合成地震图的方法用电子计算机计算理论地震图来改进标定函数或起算函数.

② 原先测定震级是在波段上 $\left(\frac{A}{T}\right)_{\max}$ 处作点测量，有人尝试用它所在波段上 $\left(\frac{u(t)}{T}\right)^2$ 的积分的平方根在该段上的均值来取而代之，即取

$$M=d+\frac{1}{2}\lg\frac{\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{u(t)}{T(t)}\right]^2dt}{t_2-t_1}.$$

将波段等距离做数字化，以求和代替积分，上式可写作

$$M=d+\frac{1}{2}\lg\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u(t_i)}{T(t_i)}\right)^2\right]$$

③ 设地震波 $u(t)$ 的复频谱为 $U(\omega)$. 则根据 Parseval 定理，地震波能量既可在时间域表示，也可以在频率域表示:

$$E\propto\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{u}(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C\omega^2|U(\omega)|^2d\omega$$

取震级的表示式为

$$M=q+\lg\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|U(\omega)|^2d\omega$$

即由地震波振幅谱来测定震级.

④ 在 $\left(\frac{A}{T}\right)_{\max}$ 所在波段的振幅谱上，测量其峰值及相应周期，取代在时间域上的 $\left(\frac{A}{T}\right)_{\max}$，用原来的测定震级的公式进行计算.

以上几方面是一些人所作的探索. 目前,人们所广泛采用的仍是里克特-古登堡的震级标度体系.

二、巨大地震的震级和能量

地震震级 M 是在周期为 20 秒的面波上测量的,或 20 秒左右, 例如我国的公式 (9). 当地震很大,是 8 级以上的巨大地震时,虽然破裂规模宏大,破裂长度达数百近千公里,地震波的长周期波振幅增强,但 20 秒左右的波幅却不再有明显增大,因而造成 M 有饱和现象: 没有超过 8.9 级的. 这时如果用测得的 M 值代入 (13) 式来估算地震波能量 E, 则必然是偏低的.

为了解决这个问题,金森博雄[29]考虑地震前后的应变能之差即释放的应变能为

$$\Delta W = \bar{\sigma} S \cdot \Delta u.$$

这儿 $\bar{\sigma}$ 是平均应力, Δu 是平均错距, S 是断层面积. 假定应力降是完全的, 则 $\bar{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{2}$, $\Delta\sigma$ 是应力降. 代入上式得

$$\Delta W = \frac{\Delta\sigma m_0}{2\mu}.$$

$m_0 = \mu \Delta u S$, 是地震矩, 单位为达因·厘米(以上几个公式可参见后面 § 15.4).

观测表明, 对于巨大地震, $\Delta\sigma = 20 - 60$ 巴 $= (2 - 6) \times 10^7$ 达因/厘米^2. 而在地壳上地幔条件下, $\mu = (3 - 6) \times 10^{11}$ 达因/厘米^2,所以有

$$\Delta W \simeq \frac{m_0}{2 \times 10^4}.$$

由此可以用地震矩 m_0 来估算 ΔW 值(关于 m_0 的测定方法参见 § 15.4).

将这样算出的 ΔW 值代替地震波能量值 E 代入 (13) 式,可算出一震级值,记作 M_W. 下表给出了四个巨大地震的 M 和 M_W 值:

日　期	地　名	M	M_W
1960. 5.22	智　利	8.3	9.5
1964. 3.28	阿拉斯加	8.4	9.2
1957. 3. 9	阿留申群岛	8.3	9.1
1952.11. 4	堪察加半岛	8.3	9.0

可见 M_W 确实克服了震级饱和现象.

更多的资料对比还表明, 破裂长度仅在 100 公里左右的大地震的 M 和 M_W 值很相近. 所以可认为 M_W 标度是 M 标度对巨大地震的自然延续.

三、震级的物理意义

里克特和古登堡震级体系从其原始定义到推广到远距离的面波、体波时,都有许多简化假设和含糊之处. 所以震级到底是反映了地震的什么性质或能不能反映震源的某个性质,都引起人们的注意和讨论. 有人甚至认为,震级虽然比起烈度来受震源以外因素的影响要少些,但仍只能看作是个半定性半定量的量. 最近几年,关于震级的物理意义的探讨取得了较大进展.

里克特在引进震级时，为了避免把不稳定或不清楚的理论因素引入到震级表的实际应用中以致遭受到意料之外的修正，没有用能量来定义地震的等级，而是直接用观测到的量（地震波的周期和振幅）来定义。实践证明，这么做是有远见的，而且避免了繁复的计算。但是，现在这么定义的震级到底具有什么物理意义，是值得探讨的。最初，认为震级所代表的就是地震波总能量。虽然震级和地震波能量之间有很好的统计关系（13）式，但是震级却不能直接作为地震波能量的量度。这是因为震级是在某震相的最大振幅处作的点测量，而地震波能量却要按 § 13.1 的（1）式对地震图上的整个波列求和，然后再按（7）、（8）、（9）式算出。所以，里克特在他获得美国地震学会 1976 年奖时曾说过，虽然他和古登堡提出过震级是能量的量度，但他越来越确信它们之间没有一个简单直接的关系，而震级可能是与功率有关。都达（Duda）[97] 讨论了这个问题，指出在周期为 T 的波振幅上测量震级，实际上是对该周期为 T 的波在一周期内的平均能流密度或平均功率作测量。

在 § 4.5 中已经知道，地震波在传播过程中伴随着能量的传播。能流密度矢量 $\boldsymbol{W}$ 是描述这一现象的量。它是波在传播时在单位时间内从与传播方向相垂直的单位面积上所通过的能流矢量，其方向与波的传播方向一致。另一方面，据定义，$\boldsymbol{W}$ 既是垂直于传播方向的单位面积上单位时间内所传递的能流，因而它的数值也就是波在单位面积上的功率。

设在自由表面上观测到地震 P 波垂直向位移为

$$u_{地} = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{\alpha}\right).$$

假设它是由垂直入射到地表的 P 波所引起的，那么根据 § 5.2(20) 式，入射波位移为

$$u = \widetilde{A}\cos\omega\left(t - \frac{z}{\alpha}\right) = \frac{A}{2}\cos\omega\left(t - \frac{z}{\alpha}\right). \tag{1}$$

由 § 4.5、§ 13.1 知入射 P 波在一个周期内的平均能流密度或平均功率的数值为：

$$\overline{W} = 2\pi^2\rho\left(\frac{\widetilde{A}}{T}\right)^2\alpha = \frac{1}{2}\pi^2\rho\left(\frac{A}{T}\right)^2\alpha = D\cdot\left(\frac{A}{T}\right)^2 \tag{2}$$

式中 $\overline{W}$ 以尔格/秒·厘米^{2}计，A 以厘米计，ρ 以克/厘米^{3}计，T 以秒计，α 以厘米/秒计，常数

$$D = \frac{1}{2}\pi^2\rho\alpha.$$

1956 年里克特-古登堡对浅源地震在震中距 90° 处下的 P 波震级定义为：

$$\lg\left(\frac{A}{T}\right) = m - 7.0 \tag{3}$$

这里，A 是 P 波垂直向最大振幅，以微米计；

T 为其相应周期，以秒计；7.0 是 $\Delta = 90°$ 处的标定函数 Q 值，由表 13.2 可以查到。

将 A 化作厘米，则有

$$\left(\frac{A}{T}\right) = 10^{m-3.0}$$

代入（2）式，得

$$\overline{W} = D\cdot 10^{2m-6.0}$$

所以有

$$m = d + \frac{1}{2}\lg \overline{W} \tag{4}$$

式中常数

$$d = \frac{6.0 - \lg D}{2}.$$

可见，在地震图上振幅为 A 周期为 T 的震相上测量震级，也就是测量了该周期为 T 的地震波在该分向上的平均能流密度或平均功率的值，从而赋予震级以更为明确更为自然的物理意义. 根据以上讨论，在公布一个地震的震级值时，应同时将相应的 T 值公布，以便比较.

§ 13.4 震级与震源

震级是直接用观测到的地震波振幅和周期来定义的，并不牵涉到震源过程. 因此，把震级与震源特征量联系起来是困难的. 近年来，在震源位错理论的基础上，震源波谱的研究有很大发展. 把震源波谱按地震震级大小进行划分，就把震级和震源联系了起来. 这方面已经作了一些理论探讨，并和观测资料进行了对比[87][88].

一、半确定半随机的震源位错模型

根据第九章讨论的结果，剪切位错点源在均匀弹性无限介质中产生的地震波远场位移的表示式为

$$d\boldsymbol{u}(t, R, \theta, \varphi) = \frac{\mu d\Sigma \mathscr{R}}{4\pi\rho R c^3}\dot{D}\left(t - \frac{R}{c}\right) \tag{1}$$

式中，$d\boldsymbol{u}$ 是 t 时刻在空间 (x, y, z) 或 (R, θ, φ) 点的位移. 球坐标原点取在震源源点上，极坐标极轴与错动方向一致；

$d\Sigma$. 位错面元；

μ. 介质剪切模量；

ρ. 介质密度；

c. 地震波传播速度；

$\mathscr{R}$. 辐射因子：

$$\mathscr{R} = \begin{cases} \sin 2\theta\cos\varphi \boldsymbol{e}_r, & (\text{纵波}, \ c = \alpha) \\ \cos 2\theta\cos\varphi \boldsymbol{e}_\theta - \cos\theta\sin\varphi \boldsymbol{e}_\varphi, & (\text{横波}, \ c = \beta) \end{cases}$$

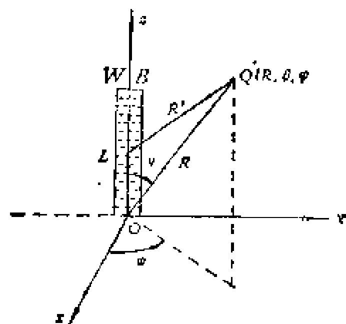


图 13.10

$D\left(t - \dfrac{R}{c}\right)$ 位错源横过 $d\Sigma$ 平面的位错或错距（在 § 9.4 中我们曾将位错记作 $\Delta u g(t)$），$\dot{D}\left(t - \dfrac{R}{c}\right)$ 是它的速度. 实际地震震源不是点源而是有一定体积，破裂往往由一点开始朝一方向推进一段距离才停止下来，破裂面的宽度往往比长度小很多. 这在浅源大地震情况下尤其突出. 图 13.10 是这种情况的简化模型：破裂起始点取作坐标原点 0，z 轴与破裂传播方向一致；在 yz 平面上，位错元排列在宽度为 w 的直线段上，从零点开始以速度 v 沿 z 方向传播了长度 L 到达 B 点而终止. 这时

形成的断层面积为 $\Sigma = LW$（划线条部分）. 假设错距 $D = D(\xi, t)$, ξ 是断层面上任一点在 x 轴上的坐标，即错距只沿断层长度方向有变化，在宽度方向上无变化. 这时均匀弹性无限介质中的远场位移为

$$u(t, R, \theta, \varphi) = \int_0^{\Sigma} du = \int_0^{\Sigma} \frac{\mu \mathscr{R}}{4\pi\rho R' c^3} \dot{D}\left(\xi, t - \frac{R'}{c}\right) d\Sigma \tag{2}$$

将关系式

$$d\Sigma = W d\xi, \quad R' \simeq R - \xi\cos\theta, \quad \frac{1}{R} \simeq \frac{1}{R'}$$

代入，得到

$$\boldsymbol{u}(t, R, \theta, \varphi) = \frac{\mathscr{R}}{4\pi\rho R c^3} \mu W \int_0^L \dot{D}\left(\xi, t - \frac{R - \xi\cos\theta}{c}\right) d\xi \tag{3}$$

其波谱为

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\omega, R, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, R, \theta, \varphi) e^{-i\omega t} dt = \boldsymbol{P}(R, \theta, \varphi, c) \cdot A(\omega) \tag{4}$$

式中

$$\boldsymbol{P}(R, \theta, \varphi, c) = \frac{\mathscr{R}}{4\pi\rho R c^3},$$

称为传播因子，是波的传播距离、方位、速度的函数. 实际介质是耗能的，$\boldsymbol{P}$ 还是频率和介质品质因数的函数；

$$A(\omega) = \mu W \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt \int_0^L \dot{D}\left(\xi, t - \frac{R - \xi\cos\theta}{c}\right) d\xi \tag{5}$$

是与震源破裂面长度、宽度，破裂传播方向、传播速度，位错速度 $\dot{D}$ 的时空分布有关的震源因子.

为求得 $A(\omega)$，引进位错速度 $\dot{D}$ 的自相关函数 $\phi(\eta, \tau)$[87]：

$$\phi(\eta, \tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{D}(\xi, t)\dot{D}(\xi + \eta, t + \tau) d\xi dt \tag{6}$$

它表示在 ξ 点 t 时刻的位错速度和在 $\xi + \eta$ 点 $t + \tau$ 时刻的位错速度之间的相关关系. $\phi(\eta, \tau)$ 的傅氏变换为：

$$\begin{cases} \hat{\phi}(k, \omega) = \displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} \phi(\eta, \tau) e^{-i\omega\tau + ik\eta} d\eta d\tau & (7) \\ \phi(\eta, \tau) = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k, \omega) e^{i\omega\tau - ik\eta} d\omega dk & (8) \end{cases}$$

另外，在 (9) 式中，令

$$t' = t - \frac{R - \xi\cos\theta}{c},$$

则

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t'} e^{-i\omega\frac{R}{c}} e^{i\omega\xi\frac{\cos\theta}{c}}.$$

并令当 $\xi < 0$ 和 $\xi > L$ 时，都有 $\dot{D}(\xi, t) = 0$，把积分限扩展到从 $-\infty$ 到 $+\infty$，(5) 式

变成

$$A(\omega)=\mu W e^{-i\omega\frac{R}{c}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\dot{D}(\xi,t')e^{-i\omega t'+\frac{i\omega\cos\theta}{c}\xi}dt'd\xi. \tag{9}$$

记 $\dot{D}(\xi,t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{cases} B(k,\omega)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\dot{D}(\xi,t)e^{-i\omega t+ik\xi}dtd\xi & (10)\\ \dot{D}(\xi,t)=\dfrac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}B(k,\omega)e^{i\omega t-ik\xi}d\omega dk & (11)\end{cases}$$

将 (10) 式与 (9) 式对比，把 (9) 式中的 t'、$\frac{\omega\cos\theta}{c}$ 分别看作 (10) 式中的 t、k，(9) 可以写作

$$A(\omega)=\mu W e^{-i\omega\frac{R}{c}}B\left(\frac{\omega\cos\theta}{c},\omega\right)$$

即

$$|A(\omega)|^2=\mu^2W^2\left|B\left(\frac{\omega\cos\theta}{c},\omega\right)\right|^2 \tag{12}$$

另一方面：由 (6) 和 (11) 式得到

$$\begin{aligned}\phi(\eta,\tau)&=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\dot{D}(\xi,t)\iint_{-\infty}^{+\infty}B(k,\omega)e^{i\omega(t+\tau)-ik(\xi+\eta)}dkd\omega d\xi dt\\&=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}B(-k,-\omega)B(k,\omega)e^{i\omega\tau-ik\eta}dkd\omega\\&=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}|B(k,\omega)|^2e^{i\omega\tau-ik\eta}dkd\omega.\end{aligned} \tag{13}$$

与 (8) 式相比较，得

$$\hat{\phi}(k,\omega)=|B(k,\omega)|^2 \tag{14}$$

与 (12) 式相比较，得

$$|A(\omega)|^2=\mu^2W^2\hat{\phi}\left(\frac{\omega\cos\theta}{c},\omega\right) \tag{15}$$

可见震源因子的振幅谱 $|A(\omega)|$ 可以由位错速度自相关函数的谱 $\hat{\phi}$ 得到。

设想位错 $D(\xi,t)$ 在给定的 ξ 点上随时间的变化（又称为位错上升时间函数）是图 13.11 所示的那种半确定半随机形式的，那么相应的位错速度 $\dot{D}$ 和其对时间的自相关函数 $\phi(\tau)$ 的形式也在图中(图中虚线表示在相应的完全确定的位错上升时间函数形式下的

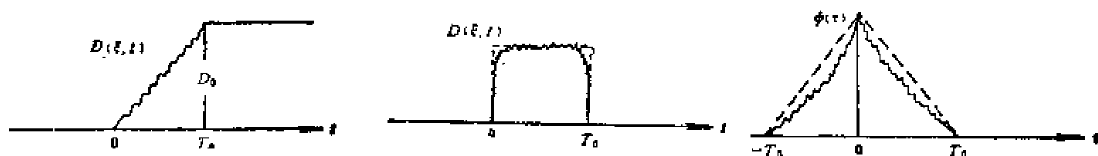


图　13.11

$\dot{D}$ 和 $\phi(\tau)$). 假设位错速度的自相关函数 $\phi(\eta,\tau)$ 随时间延迟量 τ 增大而指数衰减，又随两点之间的距离 η 的增大而指数衰减，这时可以取为

$$\phi(\eta,\tau)=\phi_0 e^{-K_L|\eta|-K_T\left|\tau-\frac{\eta}{v}\right|} \tag{16}$$

这里 K_L、K_T 是两个统计学参数：K_L^{-1} 是相关长度，它是沿断层作用方向上的一段距离，在该距离之内，对断层面上任意两点来说，运动单元的相关系数大于某一临界值. K_T^{-1} 是相关时间，它正比于相关长度除以破裂传播速度.

将 (16) 式代入 (7) 式，求得 $\hat{\phi}(k,\omega)$:

$$\hat{\phi}(k,\omega)=\frac{4K_TK_L\phi_0}{\left[K_L^2+\left(k-\frac{\omega}{v}\right)^2\right][K_T^2+\omega^2]}.$$

据 (15) 式得到

$$|A(\omega)|=\frac{\mu W\sqrt{4K_TK_L\phi_0}}{\sqrt{K_L^2+\left(\frac{\cos\theta}{c}-\frac{1}{v}\right)^2\omega^2}\sqrt{K_T^2+\omega^2}}. \tag{17}$$

为求 ϕ_0, 在 (9) 式中令 $\omega=0$, 得到

$$|A(0)|=\mu W\iint_{-\infty}^{+\infty}\dot{D}_0(\xi,t)d\xi dt. \tag{18}$$

而由 (17) 式令 $\omega=0$ 又得到

$$|A(0)|=\frac{\mu W\sqrt{4K_TK_L\phi_0}}{K_LK_T}. \tag{19}$$

对比 (18)、(19) 式得到

$$\frac{\sqrt{4K_TK_L\phi_0}}{K_TK_L}=\iint_{-\infty}^{+\infty}\dot{D}_0(\xi,t)d\xi dt=\int_0^L D_0(\xi)d\xi=LD_0 \tag{20}$$

式中

$$D_0=\frac{1}{L}\int_0^L D_0(\xi)d\xi,$$

为平均位错(前面 § 9.4 曾记作 Δu).

将 (20) 代入 (17)，则有

$$|A(\omega)|=\frac{\mu D_0WL}{\sqrt{1+\left(\frac{\cos\theta}{c}-\frac{1}{v}\right)^2\left(\frac{\omega}{K_L}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{K_T}\right)^2}}. \tag{21}$$

$$\overset{\max}{\Longrightarrow}\begin{cases}m_0, & \text{当 } \omega\to 0 \text{ 时}\\ \dfrac{m_0}{\left(\frac{\cos\theta}{c}-\frac{1}{v}\right)\frac{\omega}{K_L}\cdot\frac{\omega}{K_T}}, & \text{当 } \omega \text{ 足够大时}\end{cases} \tag{21'}$$

$m_0=\mu D_0WL$ 是地震矩. $\overset{\max}{\Longrightarrow}$ 表示取 $|A(\omega)|$ 曲线的渐近线. 由上式知，震源因子振幅谱曲线的总体形态是很简单的：在低频部分很平坦，渐趋于直线 $A(0)=m_0$, $A(0)$ 称为

低频水平. 在高频部分曲线按 $\frac{1}{\omega^2}$ 衰减. 高低频两部分的渐近线的交点所对应的频率称为拐角频率 ω_c. 令 (21′) 式上下两部分相等,可以求得 ω_c.

二、相似性假设和震源波谱标定律

(21) 式还和参变量 $L, W, D_0, K_T, K_L, v, \theta$ 有关. 为了能简便地对大小不同的地震的震源波谱进行分级,首先在 (21) 式取 $\cos\theta = 0$, 即以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 作为代表点来讨论. 然后引入相似性假设把 $|A(\omega)|$ 表示式中的其它参量减少成为一个. 假设大小地震在几何形状上和物理上都是相似事件,即:

$W \propto L$, $D_0 \propto L$; 破裂速度 v 与地震大小无关;因而所有具有时间量纲的量,如 $\frac{1}{K_T}$、$\frac{1}{vK_L}$, 都和断层长度 L 成正比;震源处岩石强度、地震应力降也与地震大小无关.

在此条件下,可进一步取 $vK_L = K_T = f\frac{v}{L}$, f 为一常数. 于是参变量就只有一个断层长度 L 了, (21) 式简化为

$$|A(\omega)| = \frac{aL^3}{1 + \frac{\omega^2}{K_T^2}} = \frac{aL^3}{1 + d^2\omega^2L^2}. \tag{22}$$

$$\left(a、d = \frac{1}{fv} \text{ 都是常数}\right)$$

这样,给定一个 L, 原则上就可以算出 $|A(\omega)|$, 画出振幅谱曲线来. 这样画出的 $|A(\omega)|$ 曲线族是按断层长度 L 进行分级的. 为了把 $|A(\omega)|$ 的分级与震级联系起来,假设震级 M 和振幅谱 $|A(\omega)|$ 的关系是:

$$\lg|A(\omega_{20})| = \lg A_{20} + B = M + b. \tag{23}$$

$$(B、b \text{ 都是常数})$$

则周期为 20 秒的波振幅 A_{20} 和该周期的振幅谱密度 $A(\omega_{20})$ 之间只相差一个与震源大小无关的因子. 那么,如果两个地震的震级 M 相差一级,当 $|A(\omega)|$ 以对数尺度画出时,和这两个地震相对应的两条振幅谱曲线在周期 20 秒处的纵坐标也将相差 1 .

同时,按 (26) 式, $|A(\omega)|$ 的渐近线为:

$$|A(\omega)| \overset{\max}{\Longrightarrow} \begin{cases} aL^3, & \text{当 } \omega \to 0 \text{ 时}, \\ aL^3 \cdot \frac{K_T^2}{\omega^2}, & \text{当 } \omega \text{ 足够大时}. \end{cases} \quad (\overset{\max}{\Longrightarrow} \text{ 表示取渐近线})$$

可知其拐角频率 $\omega_c = K_T = f\frac{v}{L}$. 在 $\omega = \omega_c$ 处,由 (22) 式知 $|A(\omega_c)| \propto L^3$. 即在

$$\lg|A(\omega)| — \lg\omega$$

平面上,各条振幅谱曲线的拐角点都在一条斜率为 3 的直线上.

以上都是在画振幅谱曲线时应满足的约束. 图 13.12 正是这样画出的曲线族.

只要图 13.12 中有一条曲线的绝对值一确定,则其它各条曲线的绝对值就可确定,于是波谱曲线的分级就完成了. 这工作是这样进行的:

① 首先给每条曲线定出相应的震级. 对曲线族中的某一条曲线指定一个实验性的震级值 M. 那么在周期 20 秒处沿纵轴(对数坐标)比该曲线纵坐标高 1 的那条曲线的震级就是 $M+1$，比它低 1 的另一条曲线的震级就是 $M-1$. 依此类推，各条曲线就都有了实验性的震级值.

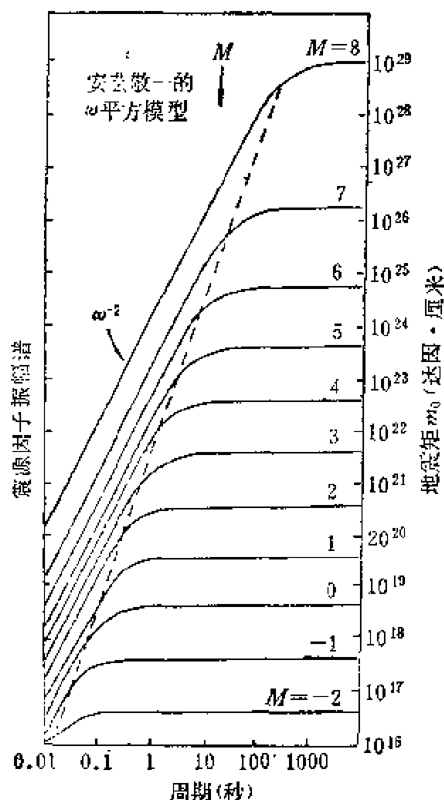


图 13.12

随后，在不同频率上测定相应于两个实验震级值的两条振幅谱曲线的理论振幅比，这在图 13.12 中就相当于量取各频率处两条曲线纵坐标的差值.

然后，换一个实验震级值，也定出各曲线的相应震级，再重复上述过程又可得另一组理论振幅比.

将各组理论振幅比与伯克赫莫 (Berckhemer, 1962) 所得到的几组震级不同的地震在各频率上的观测振幅比作比较，把与它相符得最好的理论振幅比挑出来，那么相应的各振幅谱曲线的实验震级值就被认为是合理的，从而确定了下来.

伯克赫莫在作两个地震的观测振幅比时，两个地震的震源位置都相同，又是在同一台站上由同一类仪器记录到的，所不同的仅是其震级. 这样，当把地震图上的两个地震的记录振幅谱相比时，就把共同的传播影响消去，而相当于得到了震源因子振幅谱的比值，因而可以与理论振幅谱相比较.

② 安芸敬一在 1966 年测得 1964 年 6 月 16 日日本新潟 7.5 级地震的地震矩 $m_0=3\times10^{27}$ 达因·厘米. 据此，在图 13.12 中震级为 7.5 的曲线低频端与纵轴的交点上标上这个 m_0 值. 由于 $m_0=\mu D_0 WL\propto A(0)$，两个地震的 m_0 之比等于其震源因子振幅谱的低频水平之比：

$$\frac{m_{01}}{m_{02}}=\frac{A(0)_1}{A(0)_2}$$

所以

$$\lg m_{01}-\lg m_{02}=\lg A(0)_1-\lg A(0)_2.$$

现在既然已知一条曲线的 m_0 值，由图上又量得另一条曲线与该曲线的低频水平的差值，那么由上式可算出另一条曲线所对应的 m_0 值. 由此，图 13.12 中各曲线的地震矩就给出了.

至此，地震波谱的标定律就已确定. 震级和震源波谱、地震矩的关系也确定了.

三、与观测资料作对比

图 13.12 所确定的地震波谱标定律，即震源波谱、地震矩、震级之间的理论关系是否正确，要通过和实际观测资料作对比才能得出结论.

① 震级与地震矩关系

由图 13.12 中的振幅谱曲线所对应的震级 M 和地震矩 m_0 值，可以画出两者之间的理论关系曲线．将它与观测资料画在图 13.13 中，看来符合得较好(图中补充了我国近年来发表的地震矩资料)．

② M 与 m 关系

1956 年古登堡和里克特发现有经验关系式

$$M = 1.59m - 4.0$$

在构制图 13.12 的振幅谱曲线时已经令 M 与周期 20 秒处的振幅谱的对数相差一个与震源大小无关的常数．现在再假定 m 与在周期 1 秒处的振幅谱的对数也相差一个与震源大小无关的常数．由上式知，当 $m = 6\frac{3}{4}$ 时，$M = 6\frac{3}{4}$．在图 13.12 中找到 $M = 6\frac{3}{4}$ 的曲线，令其 $m = 6\frac{3}{4}$．在周期 1 秒处纵坐标比该曲线高 1 的曲线的 $m = 6\frac{3}{4} + 1$；低 1 的曲线的 $m = 6\frac{3}{4} - 1$．依此类推，各曲线的 m 值确定．将各曲线的 m、M 值点图，与上式和观测资料对比．发现对于大于 6.5 级的地震，它们符合得较好．但对于小地震符合得较差．

图 13.13 地震矩与震级关系

●○ 是国外地震，是 K. Aki[87] 系图上给出的。×是我国地震，是后加上去的。其中几个著名的地震注上了名称。

此外,还进行了其它多方面的对比研究. 得到的结论是:

① 当 $M>6.5$ 周期大于 10 秒时,安芸敬一的模型导出的波谱标定律能够比较圆满地解释大多数观测资料. 因此可以说,他对大地震(>6.5)长周期(>10 秒)的震源波谱给出了合理的标定律.

② 但是,当 $M<6.5$,周期小于 10 秒时,该标定律往往与观测资料相符得不够好,如在 $M\sim m$ 关系、$L\sim M$ 关系等方面.

③ 该标定律在个别方面如地震波效率,得出的结论与作为其前提的相似性假设相违背.

为了克服不足之处,安芸敬一(K-Aki)曾提出过两种修正方案[98]. 由于资料不足,目前尚不能确定哪个更好些.

金森博雄[88]还曾在图 13.10 的震源位错模型下改变位错上升时间函数,应用相似性假设,对大地震得到地震矩 m_0、地震波能量 E、断层面积 S 与震级 M 之间的理论关系的形式为

$$\lg E=1.5M+C_1,$$
$$\lg m_0=1.5M+C_2,$$
$$\lg S=M+C_3,$$

从而对一些观测经验公式作出了一定程度的解释.

以上把震源波谱、地震矩从理论上和震级联系起来的工作,无论对震源理论、震源理论与实际观测资料的联系方面的研究,还是对震级意义的进一步探讨都是有意义的. 但是,在上述理论分析中是把 M 与体波在 20 秒的振幅谱密度相联系,而实测 M 却是在周期为 20 秒的面波上进行的. 这个矛盾需要进一步阐述讨论.

第十四章　走时表和地壳结构

我们已经看到，走时表(走时曲线)是识别震相、测定地震参数和研究地球内部构造的重要工具和基本数据．因此编制和改进走时表(尤其是近震走时表)也为人们所关心．

§ 14.1　编制近震走时表

我国幅员辽阔，各地地壳结构、速度分布有较大差异，有必要编制本地区的近震走时表．

一、编制实验走时表

首先在本台网控制范围内，选择记录图清楚可靠且分布均匀的尽量多的发生在地壳内的地震．用震中附近台站的记录以不依赖走时表的方法(如和达法、计算法)测定震源位置和发震时刻，就可以测得各台震中距 Δ 和某震相走时 t，再将地震按震源深度分成几组，例如 h 在 10 公里以内的为一组，10—20 公里的为另一组……．然后，将一组地震的各台观测值 (t, Δ) 代入时距方程．若是直达波，则为

$$t^2 = \left(\frac{1}{v}\right)^2 \Delta^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 h^2. \tag{1}$$

如果有 n 个地震，每个地震有 m 个台记到了直达波，那么就有 $l = mn$ 对 (Δ, t) 观测值，上式就共有 l 个．令 $x = \Delta^2$, $y = t^2$, $b_1 = \left(\frac{1}{v}\right)^2$, $a_1 = \left(\frac{1}{v}\right)^2 h^2$, 则上式线性化为

$$y_i = b_1 x_i + a_1, \quad (i = 1, \cdots l).$$

在这儿 (y_i, x_i) 是观测值，a_1, b_1 是待定系数．用最小二乘法确定 a_1, b_1,

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, \\[2ex] b_1 = \dfrac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}. \end{cases} \quad (\Sigma \text{ 表示由 1 到 } l \text{ 求和})$$

由 a_1、b_1 算出 h 和 v，代入 (1) 式并写成

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + \Delta^2}}{v}.$$

以一定间隔取 Δ 值，用上式算出走时 t，列成表格：

Δ_{km}	t_P	t_S	$t_S - t_P$
1	⋮	⋮	⋮
2	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

这就是深度为 h 的直达波 $\bar{P}$, $\bar{S}$ 的实验走时表．如果对于另一深度范围内的地震的观测值也重复上述过程，就可以得出另一个平均深度和速度值以及它们所对应的实验走时

表. 只要当地的地震资料允许,就能得到各种深度的直达波实验走时表.

对于反射波 P_{11}, S_{11}, 时距方程为

$$t^2=\left(\frac{1}{v_{11}}\right)^2\Delta^2+\left(\frac{2H-h}{v_{11}}\right)^2. \tag{2}$$

同样线性化为

$$y_i=b_2x_i+a_2,$$

其中

$$y_i=t_i^2,\quad x_i=\Delta_i^2,\quad b_2=\left(\frac{1}{v_{11}}\right)^2,\quad a_2=\left(\frac{2H-h}{v_{11}}\right)^2.$$

用最小二乘法确定 a_2、b_2, 再计算成表.

对于首波 P_n, S_n, 把其时距方程

$$t=\frac{2H-h}{v_1}\cos i_0+\frac{\Delta}{v_2} \tag{3}$$

也写成

$$y_i=b_3x_i+a_3$$

其中

$$y_i=t_i,\quad x_i=\Delta_i,\quad b_3=\frac{1}{v_2},\quad a_3=\frac{2H-h}{v_1}\cos i_0.$$

用最小二乘法确定 a_3、b_3, 再计算成表.

一般是把同一深度的 $\bar{P}$、$\bar{S}$, P_n、S_n, P_{11}、S_{11} 的走时表和这三对震相的走时差列在同一张表内,使用方便.

二、编制理论走时表

在编制一个地区的平均震源深度为 h 的地震的直达波、反射波、首波走时表时分别求得了一些系数的值:

$$b_1=\left(\frac{1}{v}\right)^2,\quad a_1=\left(\frac{1}{v}\right)^2h^2,$$

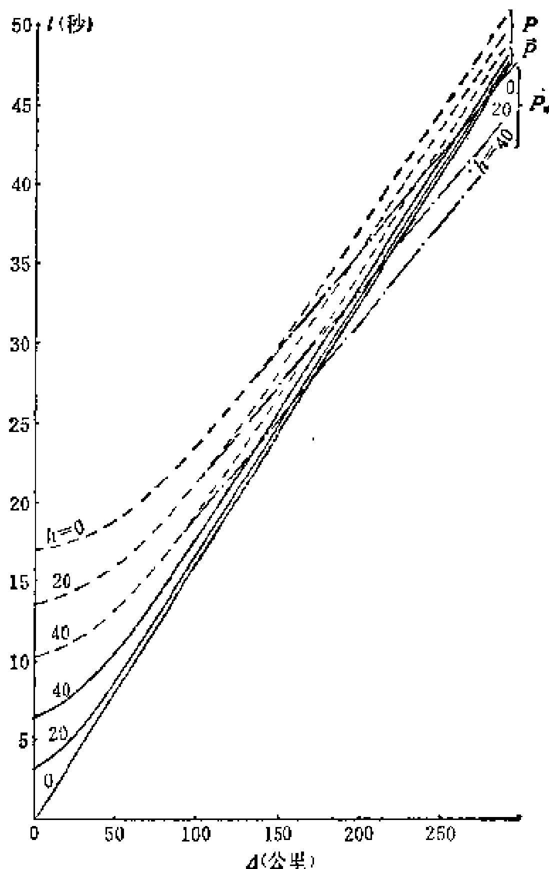
$$b_2=\left(\frac{1}{v_{11}}\right)^2,\quad a_2=\left(\frac{2H-h}{v_{11}}\right)^2,$$

$$b_3=\left(\frac{1}{v_2}\right)^2,\quad a_3=\frac{2H-h}{v_1}\cos i_0=\frac{2H-h}{v_1}\frac{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_2}.$$

由这些系数可以求得直达波速度 v、反射波速度 v_{11}、首波在地壳内的速度 v_1 和在莫霍界面上的速度 v_2、震源深度 h、地壳厚度 H 等. v, v_{11}, v_1 虽然都是波在地壳内的传播速度,但并不相等. 这说明了地壳内的速度随深度而有变化. 这种变化也反映在利用不同深度范围的地震所求出的同一震相的速度值的差异上.

若资料充足,综合这些变化情况,可以用一个数学公式来模拟波速在地壳内的分布情况,这就是建立地壳模型. 最常用的一种简单模型,是把 v、v_{11}、v_1 取平均得 $\bar{v}_1$, 即均匀单层地壳模型. 例如,我国甘肃省及其邻近地区的地壳模型为: $H=52$ 公里, $\bar{v}_{1p}=6.10$ 公里/秒, $v_{2p}=8.18$ 公里/秒. 建立了模型之后,可编制理论走时表. 这时只要在直达波、反射波、首波的时距方程 (1)、(2)、(3) 中,取定震源深度 h 的值(例如依次取为 0, 5,

10, …… 公里), 以一定间隔依次取 Δ 值, 分别算出走时 $t_{\bar{P}}$, $t_{\bar{S}}$, $t_{P_{11}}$, $t_{S_{11}}$, t_{P_n}, t_{S_n}, 列成表格即可. 图 14.1 就是这样得到的该地区的近地震纵波走时曲线.



(引自兰州地震大队)

图 14.1 甘肃及邻近地区近地震纵波走时曲线 1977

$v_{\bar{P}} = 6.10$ 公里/秒 $= v_{P_{11}}$

$v_{\bar{S}} = 3.57$ 公里/秒 $= v_{S_{11}}$

$v_{P_n} = 8.18$ 公里/秒

$v_{S_n} = 4.64$ 公里/秒

$H = 52$ 公里

在这种均匀单层地壳模型情况, 如果震源在莫霍界面以下, 则只有直达(折射)波 P, S 震相. 而且在莫霍界面之下的这段射线是弯曲的, 因为在这里波速 $v(z)$ 是随深度 z 连续变化的. 根据 § 5.6 和图 5.25, 这时 P, S 的时距方程为:

$$\left\{\begin{aligned} t &= \int_H^h \frac{dz}{v(z)^2\sqrt{\dfrac{1}{v(z)^2} - C^2}} + \frac{H}{v_1^2\sqrt{\dfrac{1}{v_1^2} - C^2}} \\ \Delta &= \int_H^h \frac{C\,dz}{\sqrt{\dfrac{1}{v(z)^2} - C^2}} + \frac{CH}{\sqrt{\dfrac{1}{v_1^2} - C^2}} \end{aligned}\right.$$

式中 v_1 是地壳的平均速度;

$$C = \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i(z)}{v(z)} = \text{常数};$$

i_1 为波的入射角.

取定一 h 值, 每给一个 C 值, 根据 $v(z)$ 的分布, 可由上式算出一对 (t, Δ) 值. 改变 C 值$\left(C \text{ 变化范围为 } 0 \sim \dfrac{1}{v_1}\right)$, 就可计算出走时表.

当康腊德界面清晰, 即地壳为双层结构时, 近震震相种类增多. 若震源在康腊德界面以上, 则有: 直达波, 康腊德界面上的反射波和首波, 莫霍界面上的反射波和首波. 当震源位于康腊德界面与莫霍界面之间时, 则有: 直达(折射)波、莫霍界面上的反射波和首波. 当震源在莫霍界面之下时, 只有直达(折射)波. 这些震相的走时方程分别由 § 5.6 中的 (1)、(2)、(3)、(14)、(16)、(17)、(20)、(21)、(22)、(23)、(24)、(26)、(27) 式给出. 将上层的厚度 H_1、速度 v_1, 下层的厚度 H_2、速度 v_2, 莫霍界面上的速度 v_3、莫霍界面以下的速度 $v(z)$ 代入, 就可以计算出各震相的走时表.

§ 14.2 编制远震走时表

在 $\Delta < 20°$ 时, 由于地壳和上地幔的构造很复杂, 地震波走时因地区不同而有较大

差异，因此编制这个范围内的全球平均走时表没有很大实用价值，而应该按不同地区编表. 但当 $\Delta > 20°$ 时，这种影响已经很小，编制平均走时表是很有意义的.

一、编制 *P* 波走时表

1. 表面源起算走时表

首先选择分布均匀、记录可靠的浅源地震，用不依赖于走时表的方法初步测定震源位置和发震时刻. 台站到初定震中的距离 Δ 用 § 12.2 公式 (4) 算出，P 波走时 t 由其到时减去初定发震时刻而得到. 这样，如果略去震源深度(很浅)的影响，就得到了表面源地震在台站的观测数据 (t, Δ). 若有 m 个地震都被 n 个台站记到，则共有 mn 对这样的观测值.

然后，将 20°—105° 均匀地分成许多小间隔. 设落入第 i 个小间隔中有 l 对观测值 (t, Δ)，可以求得平均值 $\bar{t}$、$\bar{\Delta}$. 对每个间隔都这样做，将这些 $\bar{t}$、$\bar{\Delta}$ 列成表，就得到了表面源 P 波走时表. 它很粗糙，叫做起算走时表.

2. 表面源精制走时表

设台站对某一地震有一对观测值 (t, Δ). 而按此 Δ 在起算走时表中查得的 P 波走时为 $\bar{t}$，得到 t, $\bar{t}$ 的差值

$$F = t(\Delta) - \bar{t}(\Delta). \tag{1}$$

另一方面，设"真正震中距"为 Δ_1，P 波的"真正走时"为 $t_1(\Delta_1)$，初定发震时刻 T_0 与"真正发震时刻" T_1 之差

$$T_0 - T_1 = \delta T_0.$$

考虑到走时的观测误差 e，则有

$$t(\Delta) = t_1(\Delta_1) - \delta T_0 - e. \tag{2}$$

将 $t_1(\Delta_1)$ 在 Δ 处作台劳展开，略去高阶项:

$$t_1(\Delta_1) \simeq t_1(\Delta) + t_1'(\Delta)(\Delta_1 - \Delta). \tag{3}$$

将 (3) 式代入 (2) 式，并以 $\bar{t}'(\Delta)$ 代替 $t_1'(\Delta)$，得到

$$t(\Delta) = t_1(\Delta) + \bar{t}'(\Delta)(\Delta_1 - \Delta) - \delta T_0 - e. \tag{4}$$

设初定震中在"真正震中"之东、之北，角距差值为 δx, δy (图 14.2). 则

$$\Delta_1 - \Delta = \delta x \sin A_z + \delta y \cos A_z,$$

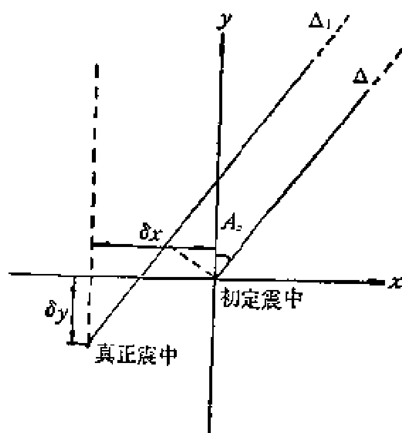


图 14.2

式中 A_z 是台站方位角. 将上式代入 (4) 式再代入 (1) 式，得到

$$t_1(\Delta) - \bar{t}(\Delta) + \bar{t}'(\Delta)(\delta x \sin A_z + \delta y \cos A_z) - \delta T_0 - F = e,$$

式中 $\bar{t}'(\Delta)$ 是起算走时曲线在 Δ 处的斜率，为已知数，$\sin A_z$、$\cos A_z$ 也是知道的. 所以上式可以写成

$$a_1\eta + a_2\delta x + a_3\delta y + a_4\delta T_0 + b = e, \tag{5}$$

式中常数

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \bar{t}'(\Delta)\sin A_z,$$
$$a_3 = \bar{t}'(\Delta)\cos A_z, \quad a_4 = -1,$$
$$b = -F.$$

未知数 $\eta = t_1(\Delta) - \bar{t}(\Delta)$，是应对起算走时表作的修正值;

$\left.\begin{matrix}\delta x\\ \delta y\end{matrix}\right\}$ 是震中位置的修正值;

δT_0 是发震时刻的修正值.

上面已经说过，观测值一共有 mn 对，因此可以列出 mn 个 (5) 式. 如果走时表的校正值 η 对任何地震在任何距离上都是不变的，那么未知数就只有 $3m+1$ 个. 如果每个台对每个地震的走时校正值都不相同，那末未知数就有 $3m+mn$ 个之多，无法求解. 而实际情况是 η 只随震中距有变化，而且当 Δ 变化不大时 η 的值基本相同. 因此可以根据对走时表的精度要求，将 20°—105° 分成 q 个小段，令每小段中的 η 值相同，这样只要求出 q 个 η 值就够了. 这时未知数为 $3m+q$ 个，远远少于方程数目. 例如，在编制 1968 年 P 波 (20°—105°) 走时表[71]时，所取 $q=86$, $m=278$, $n=321$. 根据求出的 $3m+q$ 个值应使观测偏差 e 的平方和最小的原理，将方程组正规化为 $3m+q$ 个方程，解出 $3m+q$ 个未知数. 实际处理时是用迭代法，步骤大致为:

① 令 (5) 式中 $\eta=0$，即认为起算走时表正确，求出 δx, δy, δT_0，对震中和发震时刻作修正.

② 将 δx, δx, δT_0 的值代回 (5) 式，求出走时表的第一次修正值 η(q 个). 以这 q 个修正值对起算走时表作修正.

③ 以修正过的震中位置、发震时刻和修正过的走时表为起点，重复以上过程，得出第二次修正值，对震中位置、发震时刻、走时表再作修正. 反复进行下去，直到满意为止. 最后就得出了符合精度要求的地震参数和表面源精制走时表.

以上所述编制 P 波精制走时表的过程是很粗略的. 实际上还要考虑到一些别的问题，例如震源深度，地球的非对称性，不同地区地下构造的差异和台站海拔高度所造成的台站校正，仪器暂态影响等等. 因此，这时的情况要复杂些[71].

3. 理论走时表

由所得表面源精制走时表，按 § 6.1 中所述公式

$$p=\frac{dt}{d\Delta} \tag{6}$$

求得射线参数 P. 然后，按积分法(赫尔格罗兹-维歇尔特法)求得地表到外核界面之间的速度分布. 最后用理论公式算出各种震源深度下的走时表:

$$\begin{cases}\Delta=p\displaystyle\int_{r_p}^{R_0}\frac{dr}{r\sqrt{\dfrac{r^2}{v^2}-p^2}}+p\int_{r_p}^{R_0-h}\frac{dr}{r\sqrt{\dfrac{r^2}{v^2}-p^2}},\\ t=\displaystyle\int_{r_p}^{R_0}\frac{r\,dr}{v^2\sqrt{\dfrac{r^2}{v^2}-p^2}}+\int_{r_p}^{R_0-h}\frac{r\,dr}{v^2\sqrt{\dfrac{r^2}{v^2}-p^2}}.\end{cases} \tag{7}$$

式中 R_0. 地球半径; r_p. 射线参数为 p 的射线最低点到地心的距离; h. 震源深度.

$\Delta<20°$ 的 P 波走时表编法也是一样的，不过得分区进行.

二、编制 S 波走时表

编制 S 波走时表是在已经编制好 P 波走时表的基础上进行的，这时震中位置、发震时

刻和台站震中距都是精确已知的．测定 S 波的到时，减去发震时刻，就得到 S 波的观测走时 t．如果有 m 个地震，每个地震都有 n 个台站记到清楚的 S 波，那么就有 mn 对 (t, Δ) 值．和 P 波起算走时表类似，也能得出 S 波的起算走时表．

若震中距为 Δ 的台上 S 波观测走时为 $t(\Delta)$，而由起算走时表上查得走时为 $\bar{t}(\Delta)$，那么其差值能算出为

$$t(\Delta) - \bar{t}(\Delta) = F \tag{8}$$

另一方面，由于震中位置、发震时刻是精确的，那么观测走时和"真正走时" $t_1(\Delta)$ 之间的关系式 (4) 变为

$$t(\Delta) = t_1(\Delta) - e, \tag{9}$$

以 (9) 式代入 (8) 式得

$$t_1(\Delta) - \bar{t}(\Delta) - F = e.$$

令

$$t_1(\Delta) - \bar{t}(\Delta) = \eta,$$

η 是走时表的校正值，上式写作

$$\eta - F = e. \tag{10}$$

同样，虽然 (10) 式共有 mn 个，但 η 却只有 q 个．用最小二乘法解出这些 η 值之后，对起算走时表加以修正就得到精度较高的表面源 S 波走时表．如果对其精度还不满意，可以把这个表作为起算表重复上述过程，直到满意为止．

以上编制 S 波走时表的过程中忽略了"z 现象"（S 波离开震源的时刻可能与 P 波离开震源的时刻不同)的影响．实际上这种影响是很不重要的，可以不管．

由于 S 波的到时比 P 波到时的观测精度差得多，因此其走时表的精度比 P 波的要差，这是在编制和使用 S 波走时表时要注意的．

有了表面源 S 波走时表，反演求得 S 波速度分布，进而可计算出各种震源深度下的 S 波理论走时表．

三、编制其它体波走时表

编制其它体波走时表，一般有两种办法．其一是像编 S 波走时表那样，在地震图上直接测量震相的到时，进行统计处理．这需要正确地辨认震相和有相当多的观测资料．其二是在已有的 P、S 等基本震相走时表的基础上，根据震相走时之间的关系来计算一些震相的走时表．这时，只要基本震相走时表是精确的，算出的结果也就可靠．对于这第二种编法，可以举出在表面源条件下的几个例子：

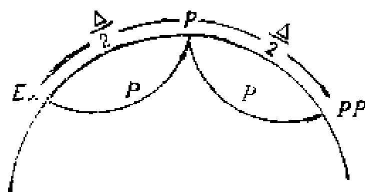


图 14.3

(1) 在 Δ 处的 PP 震相的走时是在 $\frac{\Delta}{2}$ 处的 P 波走时的两倍，即

$$t_{PP}(\Delta) = 2t_P\left(\frac{\Delta}{2}\right),$$

这在图 14.3 上是一目了然的．因此编 PP 走时表只要取一 Δ 值，按 $\frac{\Delta}{2}$ 到 P 波走时表上查出 $t_P\left(\frac{\Delta}{2}\right)$，再乘上

2即可.

同样,利用关系式(图 14.4)

$$t_{PPP}(\Delta)=3t_P\left(\frac{\Delta}{3}\right),$$

可以方便地编制 PPP 走时表.

(2) 对于反射转换波(图 14.5) PS, 则有

$$\begin{cases}t_{PS}(\Delta)=t_P(\Delta_1)+t_S(\Delta_2)\\ \Delta=\Delta_1+\Delta_2\\ \dfrac{dt_P}{d\Delta_1}=\dfrac{dt_S}{d\Delta_2}\end{cases}$$

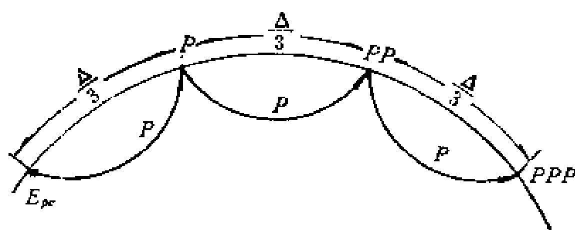


图 14.4

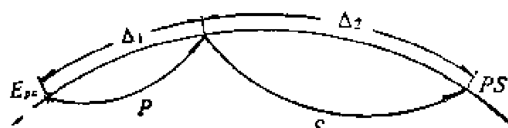


图 14.5

由于一条射线的射线参数 p 是一常数,所以有关系式

$$\frac{dt_P}{d\Delta_1}=\frac{dt_S}{d\Delta_2}=p.$$

编制 PS 走时表时, 取定一个 Δ_1 值,到 P 波走时表上查出在 Δ_1 处的走时 t_P 和走时尾差 $\left(\text{即}\dfrac{dt_P}{d\Delta_1}——\Delta\text{ 变化 }1^\circ\text{ 时 }t_P\text{ 的变化值}\right)$, 然后根据这个尾差到 S 走时表上查到震中距 Δ_2 和 t_S, 那么在 $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$ 处的 PS 走时 $t_{PS}=t_P+t_S$.

(3) 若有了 ScS 和 SKS 的走时表, 那么地核内的纵波 K 的走时表根据下式可以得到(图 14.6):

$$\begin{cases}t_k(\Delta)=t_{SKS}(\Delta_2)-t_{ScS}(\Delta_1)\\ \Delta=\Delta_2-\Delta_1\\ \dfrac{dt_{ScS}}{d\Delta_1}=\dfrac{dt_{SKS}}{d\Delta_2}\end{cases}$$

即取 Δ_1, 到 ScS 表上查到 t_{ScS} 和尾差; 以此尾差到 SKS 表上查得 Δ_2 和 t_{SKS}. 那末核内纵

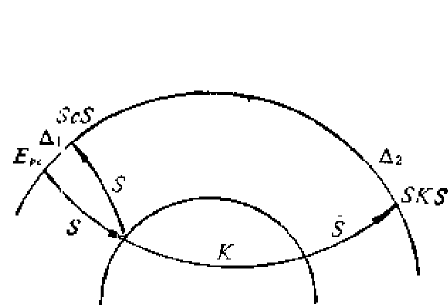


图 14.6

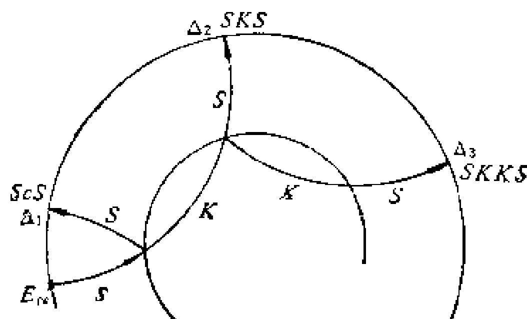


图 14.7

波在 $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1$ 处的走时为 $t_k = t_{SKS} - t_{ScS}$.

(4) 利用关系式(图 14.7)

$$\begin{cases} t_{ScS}(\Delta_1) + t_{SKKS}(\Delta_3) = 2t_{SKS}(\Delta_2) \\ \Delta_1 + \Delta_3 = 2\Delta_2 \\ \dfrac{dt_{ScS}}{d\Delta_1} = \dfrac{dt_{SKKS}}{d\Delta_3} = \dfrac{dt_{SKS}}{d\Delta_2} \end{cases}$$

可以这样算出 $SKKS$ 震相的走时：取一 Δ_1 值，到 ScS 走时表上查得 t_{ScS} 和尾差；根据这尾差再到 SKS 表上查得 t_{SKS} 和 Δ_2. 那么在 $\Delta_3 = 2\Delta_2 - \Delta_1$ 处的 $SKKS$ 的走时为

$$t_{SKKS} = 2t_{SKS} - t_{ScS}.$$

四、面波走时表

面波频散显著，受地壳构造影响，不同方位上传播情况相差很大，所以不能编制精确的全球性走时表. 现在有两种面波走时表，仅作参考使用：

(1) 在 §11.2 已经提到，一般用 L_Q 和 L_R 分别表示地震图上乐甫波和瑞利波的开始(以它们的长周期来识别)，其速度分别为 4.4 公里/秒和 4.0 公里/秒，在此基础上制成了 L_Q 和 L_R 走时表.

(2) 将地震图上这两种面波最大振幅分别以 Q_m、R_m 标记，由 Q_m、R_m 的到时观测值作出其走时表.

图 14.8 是表面源远震各种震相的走时曲线.

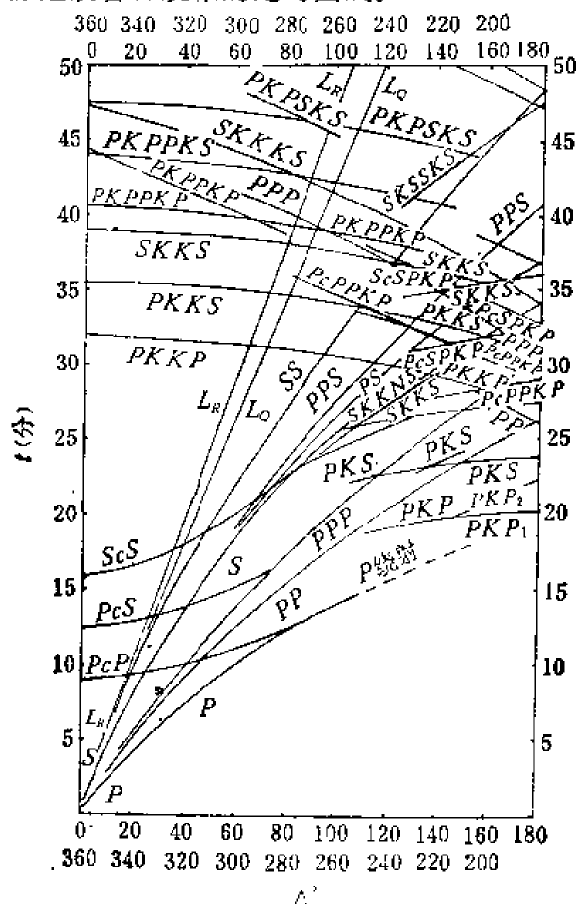


图 14.8

§ 14.3 测定地壳厚度

一、近震体波方法

(1) 由 § 14.1 已经知道，在用一个地区大量天然地震资料编制近震走时曲线时，就可以求得该地区的平均地壳厚度 H. 这儿不再重复.

有时，也可以用精确测定了震源位置和发震时刻的一个地震在各个台站的近震震相走时和震中距来测定 H.

例如，对于反射波 P_{11}、S_{11}，在由观测资料拟合其走时曲线时可以得到两个常数（参见 § 14.1）：

$$b_2 = \left(\frac{1}{v_{11}}\right)^2, \quad a_2 = \left(\frac{2H-h}{v_{11}}\right)^2.$$

所以得到

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_2}{b_2}} + \frac{1}{2}h. \tag{1}$$

又比如，P_n 与 $\bar{P}$ 的到时差为

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\Delta^2 + h^2}}{v_1} - \frac{2H-h}{v_1}\cos i_0 - \frac{\Delta}{v_2}.$$

当 $\Delta \gg h$ 时，Δt 与 Δ 成直线关系：

$$\Delta t \simeq \frac{v_2 - v_1}{v_2 v_1}\Delta - \frac{2H-h}{v_1}\cos i_0.$$

由观测资料 $(\Delta t, \Delta)$ 作出该直线，它在 Δt 轴上的截距为

$$(\Delta t)_0 = -\frac{2H-h}{v_1}\cos i_0,$$

得到

$$H = \frac{h}{2} - \frac{(\Delta t)_0 v_1 v_2}{2\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \tag{2}$$

当使用人工地震或工业爆破资料时，(1)、(2) 式中 h 取作零.

(2) 利用折射转换波. Δ 足够大时，P_n 是初至波. 在 M 界面上产生的折射转换波 $(PS)_n$ 有时也能记得清晰，它在水平分向上比较强，出现在 S_n 之前. 由图 14.9 可知，观测点 $(PS)_n$ 与 P_n 的到时差为

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{BC}{v_{P2}} + \frac{AC}{v_{S1}} - \frac{AB}{v_{P1}} \\ &= \frac{H\tan i_1 - H\tan i_2}{v_{P2}} \\ &\quad + \frac{H}{v_{S1}\cos i_2} - \frac{H}{v_{P1}\cos i_1} \\ &= H\left(\frac{\tan i_1 - \tan i_2}{v_{P2}} + \frac{1}{v_{S1}\cos i_2} - \frac{1}{v_{P1}\cos i_1}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

图 14.9

Δt 由地震图上量取，

$$i_1 = \sin^{-1}\frac{v_{P1}}{v_{P2}}, \quad i_2 = \sin^{-1}\frac{v_{S1}}{v_{P2}}.$$

由上式可求出地震台下的地壳厚度. 正确地说，所求的是在震中、台站之间在震中台站连线上距台站为 $L = H\tan i_2$ 处的地壳厚度.

二、远震体波方法

1. 利用 PS_M 震相

在远震图上有时 P 波在莫霍界面上的折射转换波 PS_M 很清晰. 在震中距离很大时，可以略去震源深度的影响，得到观测点 PS_M 与 P 的到时差为 (图 14.10)

$$\Delta t = \frac{CD}{v_{P2}} + \frac{AD}{v_{S1}} - \frac{AB}{v_{P1}} = H\left[\frac{(\tan i_1 - \tan i_2)\sin i_3}{v_{P2}} + \frac{1}{v_{S1}\cos i_2} - \frac{1}{v_{P1}\cos i_1}\right], \quad (4)$$

式中 i_1 有两种求法:

① 由地震图的记录振幅得到 P 波三分向的地动位移 $A_{东西}$、$A_{南北}$、$A_{上下}$、从

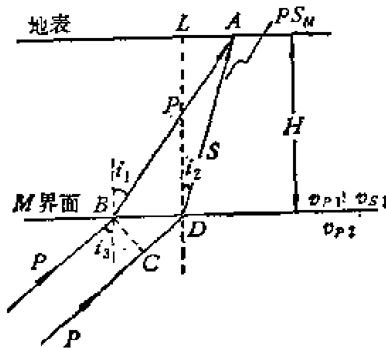


图 14.10

$$\tan\bar{i}_1 = \frac{\sqrt{A^2_{东西} + A^2_{南北}}}{A_{上下}}$$

求出 P 波视入射角 $\bar{i}_1$，然后由

$$\sin i_1 = \frac{v_{P1}}{v_{S1}}\sin\frac{\bar{i}_1}{2}$$

求得 i_1.

② 由

$$\sin i_1 = v_{P1}\cdot\frac{1}{K}\cdot\frac{dt}{d\Delta} \text{ 求 } i_1.$$

这儿 $K = 111.1$ 公里/度，$\frac{dt}{d\Delta}$ 是走时曲线的斜率或走时表尾差. 由

$$\sin i_2 = \frac{v_{S1}}{v_{P2}}\sin i_3$$

$$\sin i_3 = \frac{v_{P2}}{v_{P1}}\sin i_1,$$

可以求出 i_2、i_3. Δt 由地震图上量出. 因此，由 (4) 式能求出 H，H 是在观测点和震中之间在观测点和震中连线上距观测点为 $L = H\tan i_2$ 处下面的莫霍界面的埋藏深度. 利用测线上不同观测点的 PS_M、P 波到时差，得到不同地点之下的莫霍界面的埋藏深度，作出剖面图，可以了解到莫霍界面的起伏变化情况.

正确地识别折射转换波 PS_M 是求 H 的关键. 它在初至 P 波之后约十几秒之内，当震中距在 30°—40° 以上时，不同远震在莫霍界面上产生的 PS_M 波与 P 波的到时差 Δt 的变化不大. PS_M 波形与 P 的很相似，周期相近. PS_M 波在水平向上发育. 分界面上下的速度差越大，P 波入射角越大时，一般 PS_M 波的相对强度越大. PS_M 波的水平分量的幅度通常是初至 P 波垂直分量的 0.1—0.8 倍. 光靠一个台站的资料分辨 PS_M 有时有困难，通常要用多台相位对比. 有时还要对记录作偏振滤波处理，压制干扰，突出 PS_M 震相.

利用在地壳内或上地幔中的分层界面上产生的折射转换波 PS 与 P 波到时差，也可以确定这些分界面的埋藏深度和起伏情况，原理是一样的．这时需要细致地分辨出与各分界面相对应的各组折射转换波．

2. 利用 pP^* 震相

在深源地震情况下，除了可记录到震中附近的地表反射波 pP 震相之外，还能记录到与该反射点相对应的在 M 界面下底面上的反射波 pP^*（图 14.11）．这两个震相的到时差为

$$\Delta t = \frac{2H\cos i}{v_{P1}},$$

即反射点下地壳厚度为

$$H = \frac{v_{P1}\Delta t}{2\cos i}, \qquad (5)$$

这儿 v_{P1} 是反射点附近地壳内 P 波平均速度．i 也是观测点 pP 波的入射角，求法同前．

在地震图上，pP^* 一般在 pP 之前 10—20 秒左右，比 pP 弱，但波形与 pP 很相似．

图 14.11

3. 利用 PP^* 震相

在浅源地震情况下，地震图上 PP 震相之前 10—20 秒常出现一个波形与 PP 相似但能量较弱的震相，这是 PP^*，它是相应的 M 界面下底面上的反射波．PP 与 PP^* 的到时差为（图 14.12）

$$\Delta t = \frac{2H\cos i}{v_{P1}},$$

即反射点下的地壳厚度为

$$H = \frac{v_{P1}\Delta t}{2\cos i}. \qquad (6)$$

图 14.12

4. 利用 SP' 震相

在震中距大约 25°—60° 范围内，常记录到射线路径如图 14.13 所示的震相，它是 S 波在地表面 B 点反射转换成 P 波之后又在 M 界面上反射而到观测点 A 的，记作 SP'．它一般在 S 之后 8—15 秒．

在 A 点接收到的 SP' 波与 S 波的到时差为

$$\begin{aligned}\Delta t &\simeq \frac{BC + CA}{v_{P1}} - \frac{DE}{v_{S2}} = \frac{2H}{v_{P1}\cos i_P} - \frac{2H\tan i_P \cos e}{v_{S2}} \\ &= \frac{2H}{v_{P1}\cos i_P}\left[1 - \frac{v_{P1}}{v_{S2}}\sin i_P \cdot \sin i_S \cdot \frac{v_{S2}}{v_{S1}}\right] \\ &= \frac{2H}{v_{P1}\cos i_P}(1 - \sin^2 i_P) = \frac{2H}{v_{P1}}\cos i_P.\end{aligned}$$

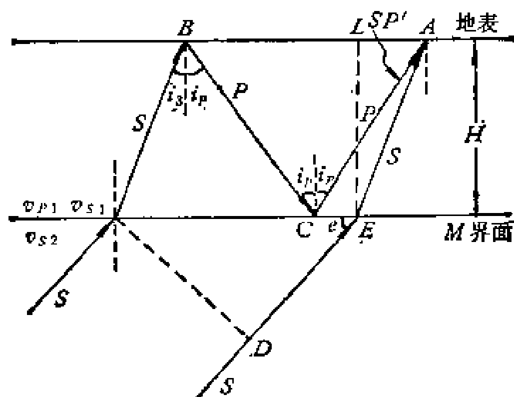


图 14.13

因此台站附近 L 点 (图 14.13) 的地壳厚度为

$$H=\frac{\Delta t v_{P1}}{2\cos i_P}=\frac{K\Delta t v_P}{2\sqrt{K^2-v_{P1}^2\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)^2}},\tag{7}$$

v_P 是台站附近地壳内 P 波平均速度. K、$\frac{dt}{d\Delta}$ 意义同前.

使用 SP' 震相曾得到我国各地震台附近的地壳厚度为[22]

台名	广州	昆明	拉萨	成都	佘山	南京
地壳厚度(公里)	31 ± 3	53 ± 3	71 ± 3	47 ± 3	31 ± 3	32 ± 3
台名	西安	兰州	北京	包头	长春	
地壳厚度(公里)	42 ± 3	53 ± 3	46 ± 3	45 ± 3	39 ± 3	

三、远震面波方法

关于用面波频散曲线研究地壳结构的基本原理和求观测频散曲线的方法在第七章已经提到,不再重复.

§ 14.4 岩石层的三维速度结构

前面主要叙述了求地壳厚度的一些常用方法. 至于地壳内部的结构,如分层情况、层界面的倾伏等等,一般是用远震面波频散曲线法,或用布局恰当的台网所记录到的天然地震或人工地震的近震体波来进行研究. 这在地震勘探中做得比较多.

随着固体地球物理在板块构造、地震预报和地热能勘探等方面的新发展,提出了了解地球内部三维速度结构详细情况的强烈要求. 安芸敬一等人利用具有一定空间分布的地震台阵所记录到的远震 P 波到时资料,进行反演,能够得到台阵下面包括地壳在内的岩石层的三维速度分布情况[72].

一、原　　理

取一台阵,其展布有一定范围. 设在此范围之下,地球构造是这样的:

在岩石层之下，符合地球标准模型，即由 $J-B$ 走时表所确定的全球平均模型．其速度分布是一维的(仅随深度而变化)．这个标准模型，对全球其它各处都是适用的，但在此台阵之下，却只适用于岩石层之下的部分，而不适用于从岩石层下底面往上到地表这一段．

在台阵下面岩石层内，先取均匀初始成层模型，即岩石层分成几层，每一层的厚度和其内 P 波传播速度 $\bar{v}$ 在各个方向上是不变的．然而岩石层的速度分布实际上是有三维变化的．考虑每一层的厚度仍不变，但每层的速度各处不同．为了把这种不同分布表示出来，按一定尺寸把各层分成许多大小相同的块体．例如把挪威的挪萨 (Norsar) 台阵下的岩石层分成 5 层，每层的厚度和 P 波速度列于下表：

层　　次	厚　度　(公　里)	P 波速度(公里/秒)	块体尺寸(公里)
1	17	6.1	20
2	19	6.9	20
3	30	8.2	20
4	30	8.2	20
5	30	8.2	20

然后将每层分成 9 × 9 个块体，每个块体的横向尺度都是 20 公里．那么岩石层就一共分成了 405 个块体．以 k 表示层编号，以 i 表示每层里的块体编号，那么第 k 层里第 i 个块体就以 k_i 来表示．

该块体 k_i 中的实际波速 v_{ki} 对于初始均匀成层模型的速度值 $\bar{v}_k$ 有一偏离，并以慢度(速度的倒数)的变化将这一偏离表示出来，定义慢度的变化量——慢度起伏或相对慢度为

$$m_{ki} = \frac{\dfrac{1}{v_{ki}} - \dfrac{1}{\bar{v}_k}}{\dfrac{1}{\bar{v}_k}}.$$

由此得到

$$\frac{1}{v_{ki}} = \frac{1}{\bar{v}_k}(1 + m_{ki}). \tag{1}$$

$\bar{v}_k$ 是取定的，但 v_{ki} 未知，因而 m_{ki} 未知．有多少个块体就有多少个待求的 m 值．如果每个块体的 m_{ki} 值求得，那么就求得了每个 v_{ki} 值，台阵下面介质速度在三个方向上的分布也就已知．这是个立体速度结构，称为三维速度结构．通过把块体尽量划小(但受资料观测精度的限制)的办法，原则上是可以得出详尽的三维速度结构的．

台阵的短周期地震仪记录到世界各地的远震 P 波到时，精度可达 0.1 秒．减去国际地震中心发表的发震时刻，可以得到 P 波观测走时．另一方面，根据射线理论，按上述块体模型，可以写出 P 波从震源到观测点所用的时间(计算走时)．而在计算走时的表示式中将出现待求的未知数 m_{ki}．把观测走时表示成计算走时与残差之和．在使观测误差的平方和最小的条件下，求出各块体的 m_{ki} 值，即达目的．

二、模型的公式化

以下将作为本方法基础的计算公式作一简要推导。

设岩石层共分 N_L 层，每层分 N_B 个块体。在图 14.14 中，射线 ① 是从岩石层层底进入块体模型到达观测点 A 的 P 波。它穿过了所有的层。射线 ② 是设想的在初始均匀分层模型(每层内部速度无起伏变化)时到达观测点 A 的 P 波射线。称为无扰射线。射线①不会偏离②很多的，因为各块体的速度变化量不大。

(1) 假设射线 ① 在第 k 层内的长度为 d_k，射线 ② 在第 k 层内的长度为 $\bar{d}_k$，并有

$$d_k = \bar{d}_k + \Delta d_k \simeq \bar{d}_k \tag{2}$$

假设射线 ① 在第 k 层内同时穿过了好几个相邻块体(但在射线从岩石层下底面进入块体模型的情况下，一般也就是两三个块体)，射线通常在其中的一个块体 (例如 i) 中要比在其它块体 (例如 $i+1$, $i+2$) 中长得多。因而可以认为在这一层内的射线长度 d_k 上，波全部是以第 i 块体的速度 v_{ki} 传播的，即可以把第 $i+1$、$i+2$ 块体速度相对于第 i 块体速度的变化略去不计。

于是，射线 ① 在第 k 层内的走时为:

$$t_k \simeq \frac{\bar{d}_k}{v_{ki}} = \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k}(1 + m_{ki}) = \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} + \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} m_{ki}. \tag{3}$$

如果射线不是在第 i 个块体而是在第 $i+1$ 个中最长，那么应写成

$$t_k \simeq \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} + \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} m_{ki+1}.$$

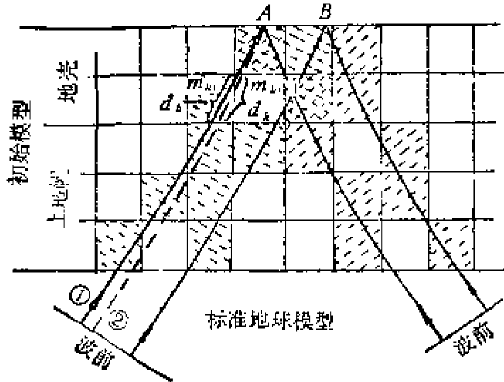


图 14.14

可以概括写成

$$t_k \simeq \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} + \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} \sum_{i=1}^{N_B} m_{ki} E_{ki}. \tag{4}$$

其中

$$E_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{(若射线在第 } i \text{ 个块体中最长)} \\ 0, & \text{(否则)} \end{cases}$$

(2) 一条射线从岩石层层底到观测点共经过了 N_L 层，走时为

$$\sum_{k=1}^{N_L} t_k = \sum_{k=1}^{N_L} \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} + \sum_{k=1}^{N_L} \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k} \sum_{i=1}^{N_B} m_{ki} E_{ki}. \tag{5}$$

假设射线 ① 在从震源到岩石层层底时的走时 τ 相对于无扰射线 ② 的这段走时 $\bar{\tau}$ 的偏离很小，以致可以认为

$$\tau = \bar{\tau} + \Delta\tau \simeq \bar{\tau},$$

(这是可以的，因为根据费马原理，走时关于围绕几何光学路径附近的射线路径的扰动是稳定的，也即路径的微小改动所造成的走时变化是微小的。) 那末，P 波观测走时就表示成

$$t = \bar{\tau} + \sum_{k=1}^{N_L} g_k + \sum_{k=1}^{N_L} g_k \sum_{i=1}^{N_B} m_{ki} E_{ki} + F. \tag{6}$$

式中 t 是观测点的 P 波观测走时，由 P 波观测到时减去发震时刻而得到；

$\bar{\tau}$ 是无扰射线从震源到台阵下面岩石层下底面的走时，可根据发震时刻、震源位置、台站位置、标准地球模型算出来；

$$\sum_{k=1}^{N_L} g_k = \sum_{k=1}^{N_L} \frac{\bar{d}_k}{\bar{v}_k},$$

是无扰射线在初始均匀分层模型中由岩石层下底面到达观测点的走时，可以由所取的初始均匀分层模型中各层的厚度、速度计算出来；

m_{ki} 是待求的未知数；

F 是包括观测误差、引入简化假设所略去的走时高阶小量等等在内的残差项，等于观测走时减去按观测点震中距查 J–B 走时表得到的标准走时.

(3) 由一条 P 波到时可以写出一个方程式 (6)，对所有地震仪记录到的每条远震 P 波到时都写出来，就得到一个庞大的方程组. 只要方程的个数多于未知数的个数，应用矩阵线性方程组理论选择适当的反演方法就能解出 m_{ki} 并估算误差. 在这里既要考虑电子计算机的容量，还要考虑计算的速度，方法是多样的. 在求挪萨台阵下的三维速度结构时，使用了 P 波到时资料 1496 条，用了一般反演和随机反演两种办法来求 405 个块体的慢度起伏 m 值. 把算出的慢度起伏按每层画成平面分布图，地下三维速度结构就一目了然.

三、几 点 说 明

(1) 所选用的地震震源要相对于台阵中心有理想的距离分布（遍布震中距 40°—105°）和理想的方位分布（遍布 0°—360°），以确保每个块体都能至少有一条射线通过它时在其内的射线长度比它在同一层内相邻块体中的长度大得多，这就保证每个块体的慢度起伏 m 能作为未知数出现在方程组内，最后求出值来. 尽管注意到了这一点，有时也还不免有些块体没有射线满足上述要求而落选，至使其 m 值未能求出.

(2) 当选用的地震数目很多，而且地震震源位置具有上述理想的距离分布和方位分布时，通过适当的处理，震源位置、发震时刻的测量误差就相互抵消，而且 P 波从震源到台阵岩石层下底面的路径中所遇到的介质偏离标准地球模型的不均匀性（特别是震源地方的岩石层内部的横向不均匀性）对观测走时的影响也相互抵消. 因此，这样求出的 m 三维分布是反映了台阵下面局部地区的不均匀性的. 当然这样做也还是有误差，这主要来自于台阵下块体模型之外的毗邻地区的不均匀性对块体模型地区的影响.

(3) 分层的数目、厚度和块体尺度的确定，由这几个方面来考虑：

每个块体的尺度小于所使用 P 波的最短波长是无意义的，因为用射线理论来计算走时时，这种不均匀性被光滑掉了，无法识别出来.

每个块体的尺度小于台站之间的平均间距也无必要，因为这时达不到能把它们分辨出来的精度.

一般先按台阵展布尺度和台距考虑块体的两个水平尺度. 例如挪萨台阵展布范围大致是 180 公里 × 180 公里，台距大约20公里，就取块体的两个水平尺度为 20 公里. 至于厚度可以参考此数值，同时要参考已有的有关地下分层情况和岩石层厚度的资料，大致选

取．在此基础上可以增加层厚、减少层数，或减少层厚、增加层数，选定几种可能的方案，通过解方程组计算 m，看哪种方案下算出的 m 值能使观测误差最小，就认为该方案是合乎台阵下岩石层实际三维速度结构．同时，还要通过和其它资料的对比来检验其合理性．

四、一些结果和意义

用本方法[72]对美国蒙大那拉萨台阵、中部加利福尼亚台阵、耶洛斯东(黄石)台阵和挪威的挪萨台阵之下的岩石层进行研究，所得主要结果是：

(1) 所得的慢度起伏大约是 1%—5%，其标准误差通常为 0.3%—0.5%，故 1% 以上的慢度变化就可以发现．

(2) 小尺度 (20—50 公里) 的明显速度异常是存在的，其深度至少可达 100 公里，即在地下 100 多公里内，具有三维不均匀性．

(3) 在年轻的地质活动区，地壳速度的分布与地质构造关系密切．例如在中部加利福尼亚台阵之下，平行于圣安德列斯断层有速度异常．西部有花岗岩露头的地区，对应于高速异常．在一些有蛇纹岩露头的地区，呈现低速异常．这与重力观测相符．随着深度的增加，这些异常的幅度在减小．耶洛斯东台阵下，有一从地壳上部向下延深到 100 公里深处的低速柱体，其直径随深度而增加．它处于火山口的下方，可能是浅部石英岩岩浆库的组合体．在夏威夷基拉韦厄台阵下，在火山顶喷口和喷发裂缝之下却具有高速异常，与以前的重力异常及其它观测结果相符．这可能是沿着岩浆上升路径而积累起来的高密度残留物或退火作用而造成的．

(4) 在古老的稳定地区，地壳内的速度异常分布与地表地质构造的相关性比较差，但在深部地区却有明显的上地幔小尺度速度异常．例如，在蒙大那拉萨台阵下面，靠近台阵中心有一条北西 30° 走向的速度异常垂直剖面，在其高速区内有一倾斜的低速夹层．在挪威的挪萨台阵下发现东部速度高而西部速度低．据认为，东部速度高可能是起因于波罗的海地盾的岩石比较完整没有被加里东或二叠纪造山运动干扰过．在台阵中心下有一小尺度管状速度异常，随深度增加而更加显著，这可能与岩浆上升时的残留物质有关．岩石层底部的不均匀性，可能与和奥斯陆地堑相对应的岩浆活动的剩余物质有关．

由于这个方法能发现 20 公里—50 公里的小尺度速度异常，结合地质构造和其它物探手段，可以来寻找矿藏和地热能源．了解岩石层的速度分布，有助于了解构造运动情况，特别是速度异常带的形状和取向有助于推断岩石层的运动历史，能对许多地球物理学问题提供介质背景资料．同时，如果能把地震活动区的三维速度结构与非活动区的进行比较，也许有助于人们认识地震活动的构造背景，有益于地震成因的研究．如果对一个地震活动区能用这一方法进行监视，也许能发现震前孕震区的三维速度结构图象的特征变化，为地震预报提供参考．

第十五章　测定震源参数

§15.1　断层说简述

地震预报、地震控制等重大课题都和地震成因问题有直接联系．地震成因问题所需要研究的内容是很深广的，它包括地震能量的来源、地震能量积累的条件、地震的孕育过程、地震的发动形式、地震时震源的各种复杂变化、震后该处能量的再积累及地震能量的转移等等问题．在地震发动形式方面主要有断层说、岩浆冲击说、相变说等三种假说．

对于构造地震，特别是其中的浅源地震，目前被广泛接受的直接成因学说是断层说．其基本观点是：

地壳由有弹性的岩石组成．地壳运动使岩石产生应变．当应力在某处不断累积而达到岩石的破裂强度时，岩石就发生断裂错动，把应变能以摩擦热能、岩石破裂机械能及弹性波动等形式释放了出来，这就是地震．之后，断层两边的岩石重新处于新的平衡状态．

这个学说又称为弹性回跳理论，是由雷德（Reid）在1911年提出的．其依据是1906年美国旧金山大震前后的三次大地测量资料，和地震时在地面上沿圣安德列斯地质断层所发生的错动幅度达7米之多、破裂长度长达430多公里的地震断层．在图15.1中，1851—1866年第一次测量时，与圣安德列斯断层相垂直的测线是 AOB，而1874—1892年第二次测量时，A 点移动到了 A' 点，O 点移动到了 O' 点．震后第三次测量时，A 点移到了 A'' 点，同时断层发生错动．如果以虚线 $A''O''B$ 表示临震前一瞬间测线上各点的位置，那么震前在点 O'' 相连结着的两盘介质，在震时断开成 C 点和 D 点，CD 之间大约长7米．由此可以认为地震是断层错动引起的．

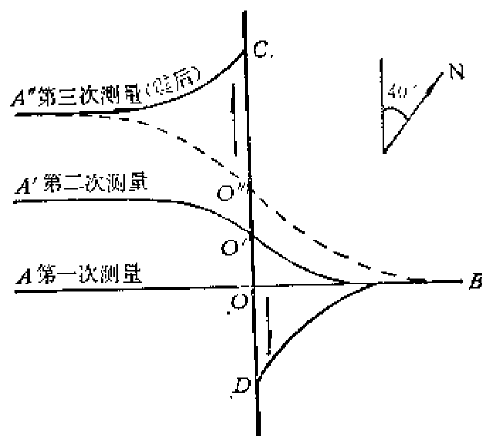


图15.1　（示意图）

虽然有人认为形成旧金山大震的地质背景非常特殊，和由此作出的推论不一定普遍适用，但随着观测资料的积累，发现世界上许多其它地方发生的地震（例如土耳其、伊朗、新西兰等），也都伴随着类似的断层破裂错动．因此，断层说逐渐流行起来．我国的台湾、炉霍、海城等许多地震也伴随有明显的断层错动而支持这个理论．

断层说得以流行，还因为它还可以解释人们早就观测到的 P 波垂直向初动符号正负相间呈四象限分布的现象．如图15.1所示，当岩体沿断层面运动时，直觉告诉我们，在箭头前方的介质受挤压，其质点初动位移方向为离源，因此在地面上仪器记录垂直分向初动向上，记作"＋"号（称为压缩波）；而在箭尾部分的介质则被拉疏，其质点初动位移方向为向源，因此在地面上仪器记录垂直分向初动向下为"－"号（叫做膨胀波）．这样，就形成了四象限分布．

近年来，人们针对地底下流体静压力很大，岩石能否错得动的问题，根据模拟实验资

料，对断层说作了一些修正补充，考虑了断层泥和水的作用、断层的非地震运动等，把断层说推向前进。例如就断层如何错动提出了以下几种看法：

1. 孔隙流体压力说

认为洼地积水、水库蓄水、井下注水可以使地表水渗入地下岩石孔隙中去，产生孔隙流体压力 P'，它与流体静压力 P 方向相反，减小了断层面上的正压力，使岩石的破裂强度 $\tau=\tau_0+f(P-P')$ 变小，岩石就容易错动了。式中 τ_0 为岩石颗粒间的粘结力，f 为摩擦系数。

2. 粘滑学说

在高温高压实验中发现，有些粉末状的脆性物质在高围压作用之下受到剪应力时，会突然发生错动；而有些物质却只产生稳滑（蠕变滑动）。由此可以设想，原来的地质断层两盘之间的断层泥等填充物，由于剪应力作用，某些情况下也会发生突然错动，产生地震。而在另一些情况下，则以蠕变滑移来释放应力，并不引起地震。

3. 岩石脱水说

在一定温度和压力下，水可以从一些含水岩石中脱出。这不仅使岩石强度降低，容易破裂，而且，脱出的水又产生孔隙流体压力，进一步使岩石容易错动。

4. 切致熔解说

在构造应力作用下，在剪应力最大的面上，岩石会产生塑性形变而增温变软，而这又反过来使该面上剪应力更加集中。如此相互促进，就可能使该面上的岩石熔解，这减小了摩擦，使两侧岩体容易错动而产生地震。

为进一步研究地震断层成因，人们引进了各种震源模型来进行理论分析，这已经在第八、九章介绍过了。这些模型大都忽略了地震时的复杂过程，而只是使其产生的地震波效应和实际地震的一致，从而求出规定这个等效源的各种震源参数：断层的走向、倾向、倾角，错动力轴和震前主应力轴的方位、仰角，破裂的传播方向和传播速度，破裂的长度，地震矩，应力降，地震释放的能量等。

通过测定地震的上述震源动力参数，有可能推断该处构造应力的作用方式及其变化，有助于认识地震的孕育、发生过程。特别是通过对一个地震带上许多地震的机制的了解，有可能弄清区域应力或引起区域变形的深部应力分布情况，有助于认识构造运动和造成地震的力的来源。据此，结合该地区的地质构造，通过理论计算和模拟实验，研究将会发生什么样的运动，规模多大，会引起地磁、地电、重力等发生什么变化，推动地震成因和地震预报的研究。

下面将在断层说的基础上，介绍求上述震源动力参数的某些方法。

§ 15.2 P 波初动解

一、原　　理

如前所述，为了求得震源动力学参数，人们引入了模拟断层错动的震源模型或等效

源．这主要是单力偶模型、双力偶模型和剪切位错模型．对横波、面波的观测资料和模拟实验资料的研究表明，双力偶模型比单力偶模型合理；而双力偶模型与剪切位错模型又是等价的．因此在这儿我们以图 15.2 所示的均匀介质中双力偶点源模型所产生的 P 波远场位移公式(参见第八章)

$$u_P = \frac{C_1}{R}\sin 2\theta\cos\varphi$$

为出发点．由公式可以得到：

(1) 在过源点而相互垂直的平面 yz 和 xy 上，P 波位移为零，是 P 波两个节面 I. II.．错动方向可能沿 z 轴，也可能沿 x 轴．当沿 z 轴错动时，yz 平面(II)是断层面，而 xy 平面(I)是辅助面．当沿 x 轴错动时，xy 平面是断层面，而 yz 平面是辅助面．错动方向总是在断层面内，过源点，又是辅助面法线．

(2) 在这两个节面的两侧，P 波初动符号相反，形成四象限分布．

(3) P 波位移按 $\frac{1}{R}$ 衰减．这些，都与 P 波观测事实相符(实际上在此模型下导出的 S 波位移公式也与 S 波观测事实相符)．因此，这个模型在远场地震波效应方面是能模拟实际地震的．

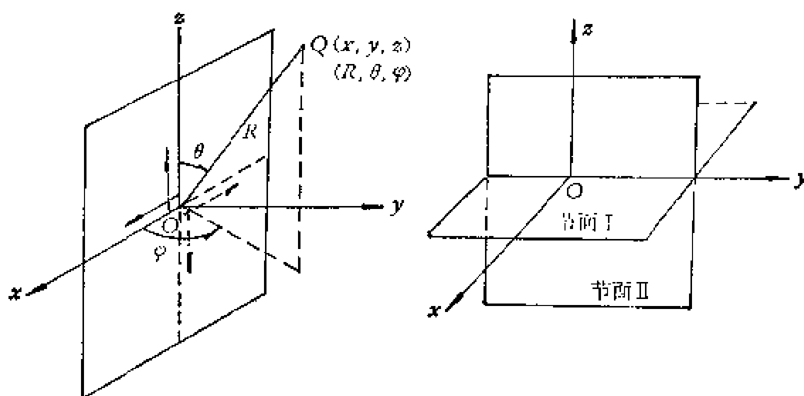


图 15.2

在第八章也已经说明双力偶模型与双无矩偶极模型具有等价性．后者的张应力轴(t 轴)和压应力轴(p 轴)与 z 轴、x 轴共面，且分别与 z、x 轴成 45°(图 8.10)．用双无矩偶极模型可以更方便地描述断层错动的弹性回跳理论．

震源在震前所处的应力状态是维持静力平衡的，可以用三个正交的主应力来规定，即最大主应力(t 轴)、最小主应力(p 轴)、中等主应力(零轴，也就是 y 轴，与 xz 平面垂直)．其中 t 和 p 对地震的发生起作用．震源地方的最大剪切应力值为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(t - p),$$

在均匀介质中，$\tau_{\max}$ 所在的最大剪切应力面有两个，每个都和 t(或 p)轴成 45°，并且都和 t、p 所在的 xz 平面垂直．不考虑摩擦阻力时，这两个面就是可能的断裂错动面，x 和 z 轴就是两个可能的错动方向或错动力轴．

在构造运动作用下，$\tau_{\max}$ 越来越大，当超过岩石的耐剪强度时，两侧岩石就发生断裂

错动，释放应力，产生地震．地震前后在零轴方向上并无应力变化．地震时的地震波在震前 t 轴作用区是“＋”号，而在 p 轴区是“－”号．

现在的任务是反过来由观测资料—— P 波初动符号，求出这一模型下的两个节面、两个可能的错动力轴、震前主应力轴的空间位置．不难看出，只要在震源四周围有足够多的 P 波初动符号，就可以过源点作出两个正交平面把符号分成四象限．这两个面就是节面Ⅰ、Ⅱ．过源点分别作面Ⅰ、Ⅱ的法线 oz、ox．面Ⅰ、Ⅱ是可能的断层面，ox、oz 是可能的相应错动方向．仅用 P 波初动符号，不能判断哪个属真．

在 ox、oz 所张平面上分别过源点画出和 ox、oz 成 45° 的轴线，落在 P 波初动“＋”号区的就是 t 轴，落在“－”号区的为 p 轴．节面Ⅰ、Ⅱ的交线 y 轴即零轴．

这样，两个节面和可能的 5 条力轴就确定了．它们的确定只用了 P 波初动符号，称为“P 波初动解”．

为了把面和轴的空间位置描述清楚，规定节面用走向、倾向、倾角三个量来表示．

走向：节面和水平面的交线(即节线)与北方向之间的夹角，顺时针量取．

倾向：节面的上表面的法线在水平面上的投影线与北方向之间的夹角，顺时针量取．

倾角：节面与水平面的夹角(小于 90°)．又规定力轴用方位、仰角两个量来表示．

方位：力轴在水平面上的投影线与北方向之间的夹角，顺时针量取．

仰角：力轴与水平面的夹角(小于 90°)．

二、乌尔夫网上作图法

现在的问题是，P 波初动符号是在地球表面上而不是在震源附近观测到的．由于地球介质的层圈结构和不均匀性，波射线是弯曲的，这使我们不能马上直接使用这些初动符号；而且上述立体作图法在实践上也不方便．因此，有必要在处理方法上研究解决这样几个问题：

如何把地球表面上的 P 波初动符号还原成离源时的初动符号．

如何把地球表面上的观测点变成均匀介质中的理想观测点．

如何把立体作图变成平面作图．

1. *P 波初动符号还原法则*

为了解决第一个问题，提出了震相初动符号守恒的假说，即认为地震波的初动符号沿射线是处处(包括源点和台站)守恒不变的，除非在某些(而不是全部)间断面上发生过反射．

按这一假说，观测点 $\bar{P}$、P_n、P、$PKIKP$ 的垂直向初动符号也就是射线离源时的初动符号．而在间断面上发生过反射的一些纵波的初动符号可能要变化，这和反射面的性质、反射点的距离有关．

例如，对于 P_{11} 震相，若在观测点垂直向初动为“＋”，由于在反射点前后符号变过一次，沿射线回到离源时，就变成“－”号了．即把 P_{11} 在观测点的垂直向初动符号改变一次就得到离源时的符号．

对于震中距在 40° 以上的 PP 震相，30° 以上的 $_pP$ 震相，也需要把观测点的垂直向初

动符号改变一次才能得到离源时的符号．而震中距小于 40° 的 *PP* 和小于 30° 的 *pP* 都存在不改变符号的一段范围，该范围与介质的泊松比和震源深度有关[73]．

至于 *PcP*，由于是从波速大的介质入射到波速小的介质的分界面(外核界面)上，在还原时并不需要对符号作变化．

观测点震相初动方向和射线离源时的初动方向的关系列于下表，可以查用．

震　相	$\bar{P}$	P_n	P_{11}	P	PP	PPP	PcP	$PKIKP$	pP	sP
初动方向	+	+	−	+	−	+	+	+	−	+

"+" 号表示震相垂直向初动方向与离源初动方向相同，"−" 号表示相反。

虽然有的模拟实验表明，震源附近的不均匀体会使波的初动符号分布图案发生变化，但震相符号守恒假说仍被采纳，而且据此处理的震源机制解答也没有发生什么明显的矛盾或谬误．

2. 震源球和理想观测点

要把地球表面上的观测点变成均匀介质中的理想观测点，只要设想把图 15.3 中的弯曲射线 OS_1 在入射面内拉直之后与地表相交即可． 但这样的理想点到源点的距离不同，不够方便．为方便和简单直观起见，我们作一个以源点为球心以震源深度 h (显然也可以取任意其它长度)为半径的震源球，把拉直射线与该球面的交点称为理想观测点．它在震源球面上的位置由方位角 α_S 和离源角 i_h 这两个量来确定．

(1) 方位角 α_S

理想点的方位角就是台站方位角 α_S，它是台站震中连线和过震中的正北方向间的夹角（顺时针量取），或台站、震中、地心大圆面与过震中的子午面之间的夹角．对于近台，α_S 可在地图上直接量取．对于远台，可以用球面三角正弦公式

$$\frac{\sin(90° - \varphi_S)}{\sin \alpha_S} = \frac{\sin \Delta}{\sin(\lambda_S - \lambda_e)}$$

算出 α_S． 此外，也可以用乌尔夫网测量 α_S．具体作法很多．我们也可以沿用 § 12.2 单台方位角法定震中时对乌尔夫网的说明和使用法来这样求 α_S：

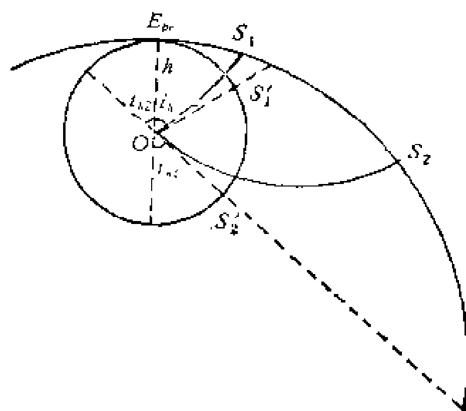


图 15.3

震中经纬度 λ_e，φ_e 和台站经纬度 λ_S，φ_S 都是已知的．若台站在震中以东，$\lambda_e < \lambda_S$ (如图 15.4 的 S_1 台和震中 E_{pc} 的相对位置)，则将乌尔夫网的左半边圆 $\widehat{NWS}$ 作为震中经线 λ_e，在其上据 φ_e 点出震中 E_{pc}． 再根据 $\Delta\lambda = \lambda_S - \lambda_e$ 的值在横轴上由 W 点向着网心数 $\Delta\lambda$ 度找到一条过 N、S 极的大圆弧，此即台站 S_1 的经线，在其上据 φ_S 点出 S_1 点 (图 15.5 a)．然后转动透明圆盘，使 E_{pc} 与 N 点重合，过 E_{pc}、S_1 两点的大圆弧与横轴交于 C 点．沿横轴由网边 E 点到 C 点的度数就是震中所在经线大圆面与台站震中所在大圆面之间的夹角，即 S_1 台的方位角 α_{S_1} (图 15.5b)．沿过 E_{pc}、S_1 的大圆弧读出 E_{pc} S_1 之间的度数即 S_1 台

震中距 Δ.

若台站在震中以西，$\lambda_e > \lambda_S$（如图 15.4 中的 S_2），则将乌尔夫网的右半边圆 $\overset{\frown}{NES}$ 作为震中经线 λ_e，在其上据 φ_e 点出 E_{pe}. 再由 $\Delta\lambda = \lambda_e - \lambda_S$ 在横轴上由 E 点向着网心数 $\Delta\lambda$ 度找到 S_2 的经线，在其上据 φ_S 点出 S_2（图 15.6a）. 转动透明圆盘使 E_{pe} 与 N 重合，过 E_{pe}、S_2 两点的大圆弧与横轴交于 C 点，沿横轴由网边 E 到 C 的度数（图 15.6b）即图 15.4 中的 α'_{S_2}，而 S_2 台的方位角 $\alpha_{S_2} = \alpha'_{S_2} + 180°$. 沿 E_{pe}、S_2 所在大圆弧读出两点间的度数即 S_2 的震中距.

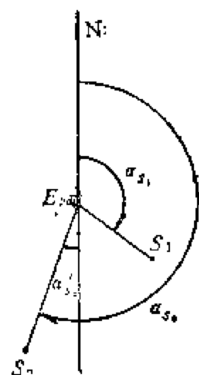


图 15.4

（2）离源角 i_h

定义射线离源角 i_h 为射线在震源处与过震源地球半径的夹角，小于 90°. i_h 因震相而异.

（i）$\bar{P}$：由图 15.7 得到 $i_h = \tan^{-1}\dfrac{\Delta}{h}$. 式中 Δ 是观测点的震中距，$h$ 是震源深度.

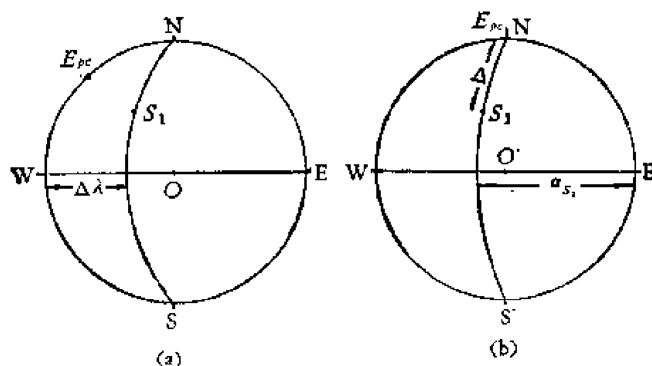


图 15.5

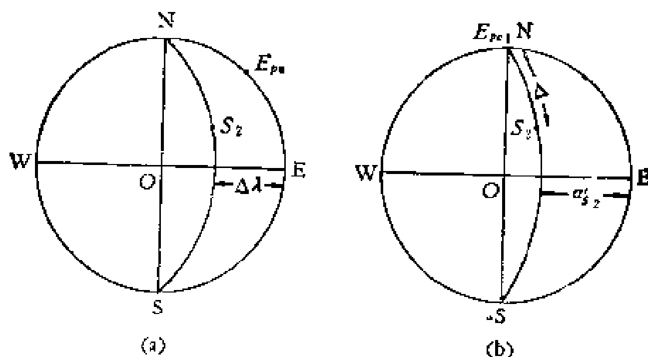


图 15.6

（ii）P_n：不管 Δ 多大，P_n 的离源角 i_h 总是等于它的临界角，即

$$i_h = \sin^{-1}\frac{v_{P1}}{v_{P2}}.$$

这儿 v_{P1}、v_{P2} 是莫霍界面上下的介质的 P 波速度. i_h 一般在 53°—57° 左右（图 15.8）.

（iii）P_{11}：由图 15.9 可知，$i_h = \tan^{-1}\dfrac{\Delta}{2H - h}$. 这里 H 是地壳厚度，h 是震源深度，Δ 为震中距.

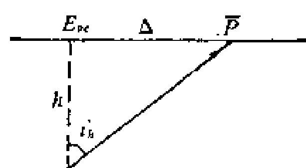


图 15.7

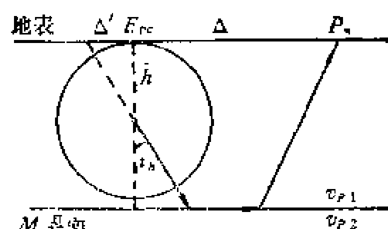


图 15.8

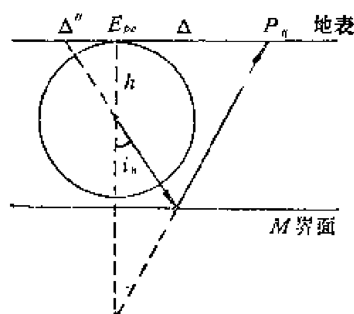


图 15.9

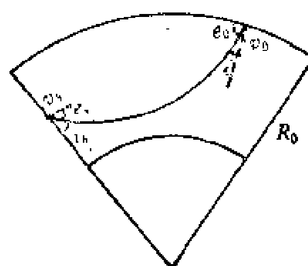


图 15.10

(iv) P：计算 i_h 的公式为（参见图 15.10）

$$\frac{(R_0 - h)\sin i_h}{v_h} = \frac{R_0 \sin i_0}{v_0}.$$

式中

R_0. 地球半径；

v_0. 地表层的 P 波速度；

v_h. 离源时的 P 波速度；

h. 震源深度；

i_0. 射线在观测点的入射角.

已经根据上式制成了不同深度下 i_h 随震中距变化的曲线（如图 15.11 中的 P 波曲线族）和表格（表 15.1），可直接查用.

表 15.1　P 离源角：震源在地壳内（单层结构）

Δ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	50	50	49.5	48.5	48.5	47.0	47.0	46.0	45.0	44.0
20	41.5	38.0	36.0	34.5	33.5	33.0	32.0	31.5	30.5	30.5
30	30.5	30.0	29.5	29.5	29.5	29.5	29.5	29.5	29.0	29.0
40	28.5	28.0	28.0	28.0	28.0	27.5	27.0	27.0	26.5	26.5
50	26.5	25.5	25.5	25.0	25.0	24.5	24.5	24.5	24.0	23.0
60	23.0	23.0	22.5	22.5	22.5	22.0	21.5	21.0	21.0	21.0
70	20.5	20.5	20.0	20.0	20.0	19.5	19.0	19.0	19.0	18.5
80	18.0	18.0	17.5	17.5	17.5	17.0	16.5	16.0	15.5	15.0
90	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	14.5				

(v) $PKP_1(PKIKP)$：离源角见下表

Δ°	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180
i_h	8	8	8	8	8	8	7	6.7	6.2	5.5	4.5	3.5	2.3	1.0	0

(vi) PP：在浅震情况下，将震中距为Δ（>40°）的观测点上记到的PP改变一次符号之后就相当于取得了在$\frac{\Delta}{2}$处的P波资料，其离源角用$\frac{\Delta}{2}$查图 15.11 中的相应曲线得到，其方位角就是实际观测点的方位角.

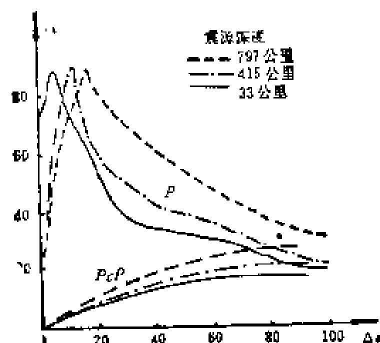


图 15.11

(vii) PPP：在浅震情况下，与PP情况类似，把PPP改变两次符号（等于不变符号）之后，当作震中距为$\frac{\Delta}{3}$处的P波资料来使用.

PP、PPP 震相的使用可以增加资料点数.

(viii) PcP：离源角可查图 15.11 中的PcP曲线族.

有了i_h，α_S，就可把地球表面上的观测点变换成震源球面上的理想点了.

3. 乌尔夫网上作图法

按(α_S，i_h)把理想点点到震源球面上，把还原后的P波初动符号标上. 这些符号被过源点的两个正交节面分成四象限. 两节面和震源球面的交线也叫节线. 直接在球体上画出节面并不方便，一般用乌尔夫网来把它化成平面作图问题.

在图 15.3 所示的震源球中，把上半球面投影到过源点与OE_{pc}相垂直的平面上，制成乌尔夫网.

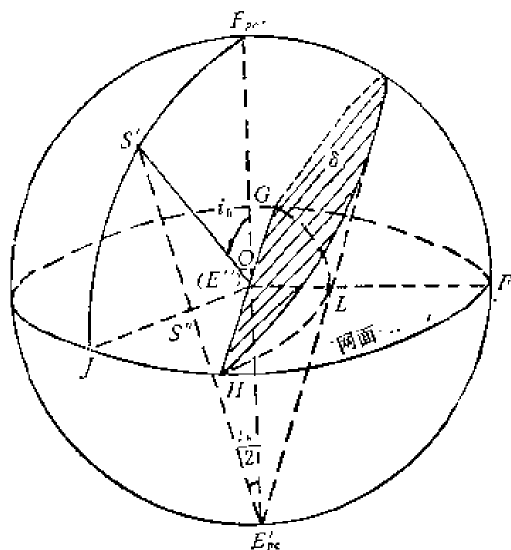


图 15.12

图 15.12 表示出了有关的投影原理：

① 震中E_{pc}在网面上的投影点E''与网心O重合.

② 球面上S'点投影到网上为S''，且

$$OS'' = E''S'' = h \cdot \tan\frac{i_h}{2}.$$

当S'由顶点E_{pc}变到J点，即理想点的离源角由 0° 变到 90° 时，OS''由零变到h，投影点S''自网心O变成网边上的J点. OS''的长度完全可用i_h的度数来表示. 在网上正是这样做的，在其横轴直径 WOE 上，由O到E和由O到 W 都按上式规律从 0° 标度到 90°，这在图 12.14 所示的乌尔夫网面上已经标明.

③ OS''也是球半径OS'在网上的投影长度. OS''的长度（度数）即OS'与铅直线OE_{pc}的夹角，$S''J$的长度为OS'与网面（水平面）的夹角.

④ 过源点的平面δ与网面的交线为网上的直径GOH. 平面δ与震源球面的交线投影到网上是大圆弧$\widehat{GLH}$，弧中点L到网心的距离OL就是平面与铅直线的夹角，L到网边F点的长度LF为该平面与水平面的夹角.

根据以上投影原理，P波节面、力轴间的关系，以及对节面、力轴空间位置的描述方

法，得到使用乌尔夫网求 P 波初动解的以下作图方法：

① 把理想点 S' 投影到网上．以网的纵轴 NOS 的北端 N 为起点，顺时针沿网边（共分作 360°）数出台站方位角 α_S，作出记号．将记号转到横轴 EOW 上．若射线向上半球发射，如 $\bar{P}$，则沿横轴从网心朝向记号数出离源角 i_h 的度数，即得 S' 的投影点 S''（图 15.13）．若射线向下半球发射，像 P_n、P_{II}、P、$PKIKP$ 都是这种情况，这时理想点在震源球的下半球面上，则应沿横轴从网心背对着记号数出 i_h，得 S'' 点（图 15.14）．这实际上是图 15.3 中的 S'_2 的对蹠点的投影点．由于四象限分布规律，震源球面上互为对蹠点的两点的 P 波初动符号相同．因此，可以这么简便地把下半球面上的资料点搬到上半球面上来使用．

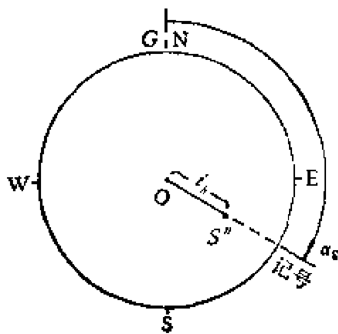


图 15.13

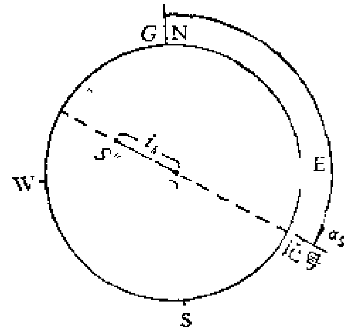


图 15.14

② 把还原后的 P 波初动符号标在 S'' 旁．

③ 先用目视法将网面上的符号分成互异的四团．然后，作一条大圆弧 $\widehat{AMB}$（图 15.15）使其两侧符号相反，由它的中点 M 沿横轴向着网心数 90° 得一点 Z．过 Z 点再作一条大圆弧 $\widehat{CKD}$，使它两侧符号也相反，并且和 $\widehat{AMB}$ 一起把符号分成四象限．然后过弧的中点 K 沿横轴向着网心数 90° 得 X 点，X 一定落在 $\widehat{AMB}$ 弧上，这是因为在作图中已经满足了两节面的正交条件．如果没有落上，那可能是由作图误差或其它差错引起的，应查清．$\widehat{AMB}$、$\widehat{CKD}$ 就是节线的投影，通常也直接把它们称为节线．X、Z 点分别是节面 II、I 的法线或两个可能的错动方向 ox、oz 与震源球面的交点在网上的投影．

④ 过 X、Z 两点画出大圆弧 $\widehat{XZ}$，它是两个可能的错动方向所张平面与震源球面的交线的投影．沿这条大圆弧从 X 点(或 Z 点)向其两侧各数 45°，得出两点；落在负号区的则标上 P；落在正号区的标上 T；P、T 两点就是压应力、张应力轴 op，ot 与震源球面的交点的投影；OP，OT 分别是它们的水平投影．两条节线 $\widehat{AMB}$，$\widehat{CKD}$ 的交点 Y 是零轴 oy 与震源球面的交点的投影，OY 是它的水平投影．

⑤ 测定节面的走向、倾向、倾角．以 $\widehat{AMB}$ 所代表的节面 I 为例（图 15.15）：

沿网边从 N 点顺时针读出 N 方向与 $\widehat{AMB}$ 所张直径 AOB 之间的夹角 α，即节面 I 的走向．

OZ 与 N 方向之间的夹角 β 为其倾向．

沿横轴从 $\widehat{AMB}$ 的中点 M 到网边的距离 γ 即该面的倾角．

节面 II 的类推．

⑥ 测定力轴的方位、仰角．以张应力 T 轴为例：

从N点沿网边顺时针读出N方向与 OT 的夹角 φ，即 t 轴的方位.

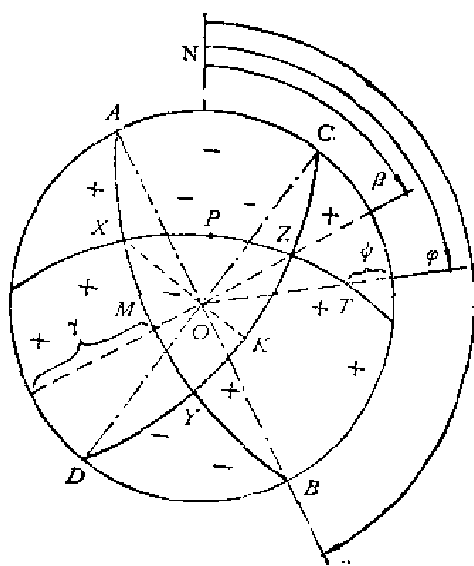


图 15.15

沿横轴读出从 T 点到网边的距离 ψ，即 t 轴的仰角.

其余力轴的方立、仰角类推.

最后列表给出 P 波初动解：

节面 I	节面 II	x 轴	z 轴	p 轴	t 轴	y 轴
走倾倾向向角	走倾倾向向角	方仰位角	方仰位角	方仰位角	方仰位角	方仰位角

三、近震平面作图法

实际上，大量发生的是小地震，它们一般只被近震台网记录到. 这时可以把地面看作是平面，直接在大比例尺地图上作图求解上述参数.

(1) 理想点在地平面上位置的确定. ①对于 $\bar{P}$，理想点即地图上台站位置本身. ② 对于 P_n，由图 15.8 可知，理想点在从台站指向震中的连线的延长线上，距震中的距离为

$$\Delta' = h\tan i_h \simeq h\tan 53^\circ —— h\tan 57^\circ.$$

③ 对于 P_{11}，由图 15.9 可知，理想点在从台站指向震中的连线的延长线上，距震中的距离为

$$\Delta'' = h\tan i_h = h\cdot\frac{\Delta}{2H-h}.$$

(2) 按已叙述过的 $\bar{P}$、P_{11}、P_n 初动符号还原法则把离源初动符号标在理想点旁边.

(3) 在地平面上作两条 P 波节线 AB 和 CD，由于两节面正交，可以证明两节线须满足制约关系(图 15.16)：

$$EZ\cdot EM = EX\cdot EK = h^2.$$

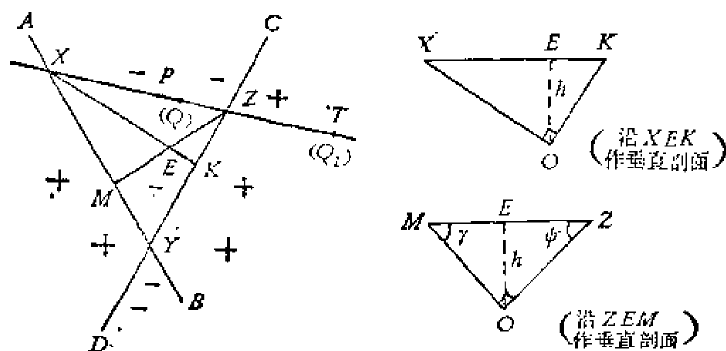


图 15.16

这里 M 和 K 分别是过震中 E 向 AB，CD 两节线所作垂线的垂足，X，Z 是垂线与另一节线的交点. 为此，可先试作一节线 AB（对应于节面 I），过 E 点向它作垂线 EM，再过 E 作 EM 的垂线 $E\tilde{O}$，令 $E\tilde{O} = h$. 过 $\tilde{O}$ 点再作 $\tilde{O}M$ 的垂线与 EM 的延长线交于 Z 点，Z 点即节面 I 的法线的出头点（与地平面的交点），应落在节线 CD 上（图 15.17）. 然后过 Z 点

试作另一条节线 CD，它和 AB 把初动符号分成四象限．由 E 向 CD 作垂线 EK，用同样办法求得节面 II 的法线的出头点 X．若 X 恰好落在 AB 线上，则制约关系得到满足，两节线求出．若 X 点未落上，须再调整两节线的位置重复上述步骤，直到落上为止．

(4) 可能的错动方向 oz 在地面上的投影是 EZ，其方位是 EZ 与正北方向的夹角 β，仰角为

$$\phi = \tan^{-1}\frac{h}{EZ}.$$

节面 I 的走向即节线 AB 与正北方向的夹角 α，倾向为角 β，倾角为

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{h}{ME}.$$

α，β 直接在地图上量取．同理，可测定节面 II 和 ox 轴的空间位置．

图 15.17

(5) p 轴和 t 轴在 ox、oz 所张平面内，并分别与 ox、oz 成 45°．它们的出头点 P、T 在 X、Z 连线上．确定它们的办法是在 XZ 连线上在 Z 点两侧取 Q、Q_1 两点，使 Q 点在 X、Z 点之间(图 15.16)，并且

$$ZQ = \frac{XZ}{1 + \sqrt{\dfrac{h^2 + EX^2}{h^2 + EZ^2}}},$$

$$ZQ_1 = \frac{XZ}{\sqrt{\dfrac{h^2 + EX^2}{h^2 + EZ^2}} - 1}.$$

若 Q 点落在负号区，应记作 P；Q_1 必定落在正号区，应记作 T．反之，若 Q 点落在正号区，应记作 T，Q_1 必落在负号区，应记作 P．

P、T 点确定后，连接 EP、ET，同法测定 p 轴、t 轴的方位和仰角．

以上两个公式由图 15.18 可以得出．在平面 $OXQZQ_1$ 上，作 XC、ZD 垂直于 OQ．由 $\triangle XQC \sim \triangle ZQD$，$\triangle OZD \sim \triangle OXC$，得到

$$\frac{ZQ}{XQ} = \frac{ZD}{XC} = \frac{OZ}{OX},$$

而由

$$\frac{ZQ}{ZQ + XQ} = \frac{OZ}{OZ + OX},$$

$$OZ = \sqrt{h^2 + EZ^2}, \quad OX = \sqrt{h^2 + EX^2},$$

$$ZQ + XQ = XZ,$$

即可得出上面的第一式．

同时，由

$$\frac{OX}{OZ} = \frac{OX}{OG} = \frac{Q_1X}{Q_1Z},$$

$$\frac{Q_1X - Q_1Z}{Q_1Z} = \frac{OX - OZ}{OZ},$$
$$Q_1X - Q_1Z = XZ,$$

则可得到第二式.

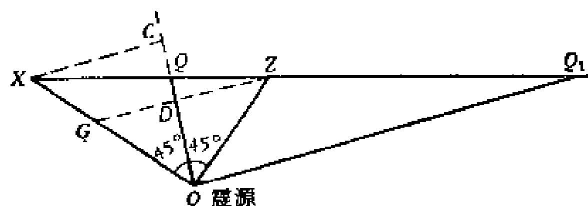


图 15.18

四、地震断层性质

震中总是在地震断层的上盘. 在求解 P 波初动解的图 15.15 和图 15.16 中,当震中在负号区时,说明上盘向下运动,为正断层. 震中在正号区时,上盘向上运动,为逆断层.

错动力的水平投影(比如说是图 15.15 中的 $OX(E''X)$、图 15.16 中的 EX)愈长,说明地震断层的平推分量愈大. 我国多数大地震都是以平推为主的断层运动.

五、震前主应力轴的空间位置问题

前面求得的主压应力、主张应力和中等主应力轴是在双力偶点源模型下与地震时释放地震波能量相对应的震前主应力轴. 由于没有考虑断层面上的摩擦力,它并不能代表震前作用于震源的实际上应力轴的位置.

正如在 § 2.2 已讨论过的,如果考虑断层面上的摩擦力,震前主压应力轴和断层面成 25—30° 夹角,而不是 45°;这已被岩石破裂实验所证明. 这时,必须先判断 P 波两个节面中哪个是断层面,然后才能根据上述角度关系找出主压应力轴,再由三个主应力轴的正交关系找出主张应力轴和中等主应力轴.

但是,实际地壳是很不均匀的,里面有许多软弱面(如地质断层). 当在地壳范围内孕育地震时,尽管构造应力作用方式不同,但破裂却仍可能在软弱面上产生. 这样以来,就无法简单地由破裂面的位置来唯一地定出震前主应力轴.

如何求震前主应力轴,这还是个正在争论研究的课题. 不过,作为一种近似解答,目前大多数人还是把本节求得的主应力轴当作震前主应力轴来讨论问题. 这时,应当尽可能用一个地区的许多地震的主应力轴的平均位置来描述该地区的应力状态.

§ 15.3 用地震波资料判断断层面和测定震源断层的破裂传播方向、破裂速度及破裂长度

如上所述,P 波初动解给出了 P 波的两个节面的空间位置;但到底其中哪个是断层面却不能确定,因而也不能确定在两个可能的错动力轴中究竟哪个是真实的. 而且表征震

源特征的一些其它参数，如断层破裂速度、长度等也只有另觅途径才能求得．近 20 年来，在有限移动源理论基础上，使用地震波资料来求这些震源参数的工作已有了较大进展．在这方面，波谱分析是用得较多的[74]．

一、使用地震体波振幅谱辐射图案的方法

1. 有限移动剪切位错源所辐射的地震体波的频谱

这里仅讨论单侧有限移动源的情况，在 § 9.7 的 (5) 式中，给出了单侧有限移动剪切位错源所辐射的地震体波的频谱，即有

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega) = i\omega\hat{G}(\omega)\frac{m_0\mathscr{R}}{4\pi\rho c^3 R}e^{-iX-i\omega\frac{R}{c}}\frac{\sin X}{X} \tag{1}$$

这里

$$X = \frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\theta}{c}\right),$$

m_0．为地震矩，

c．为地震体波波速，

v．为破裂速度，

$\hat{G}(\omega)$．为位错频谱，

$\mathscr{R}$．为辐射因子（见 § 9.4 (21) 式），

R、θ、φ．为观测点相对于震源位置的球坐标．并且 R 比断层长度 L 要大得多．

由此得到体波振幅谱为

$$|\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega)| = \left|\frac{\omega\hat{G}(\omega)m_0\mathscr{R}}{4\pi\rho c^3 R}\frac{\sin X}{X}\right|. \tag{2}$$

将理论振幅谱辐射图案与实测振幅谱辐射图案相比较，便可求得相应的震源参数．也可求出双侧移动源或其它震源模型下的理论振幅谱辐射图案，与实测结果相比较．不过为了能将理论和实测两种图案相比较，必须把它们放在相同的条件下，这就需要对观测振幅谱作仪器、地壳响应及介质吸收作校正，并归算到同一震源距上．

在本节和下一节中，为书写和叙述方便起见，我们有时将简记位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 为 $u(t)$，简记位移频谱 $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \omega)$ 为 $U(\omega)$．$U(\omega)$ 为一复数．$|U(\omega)|$ 为其模，表示位移振幅谱．有时也用 $U(\omega)$、$|U(\omega)|$ 分别表示某个位移分量的频谱、振幅谱．

2. 由地震图得到位移振幅谱辐射图案

如图 15.19 所示，来自震源频谱为 $U_0(\omega)$ 的地震波信号，在其到达地震台并由地震仪记录在地震图上时，它已经相当于通过了一系列线性滤波器，每个滤波器与传播介质的一

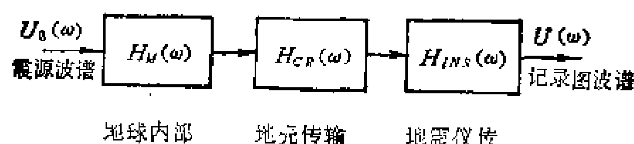


图 15.19

部分相当，并且以它的传递函数（即频率响应）$H(\omega)$ 来对输入频谱产生影响．这一滤波系统的最后输出频谱为 $U(\omega)$，它就是地震图记录信号的频谱．我们可以写作：输入频谱

$$U_0(\omega)=A_0(\omega)e^{i\phi_0(\omega)},$$

传输函数

$$H_M(\omega)=A_M(\omega)e^{i\phi_M(\omega)},\qquad(\text{地球内部})$$
$$H_{CR}(\omega)=A_{CR}(\omega)e^{i\phi_{CR}(\omega)},\qquad(\text{地壳})$$
$$H_{INS}(\omega)=A_{INS}(\omega)e^{i\phi_{INS}(\omega)},\quad(\text{地震仪})$$

输出频谱

$$U(\omega)=A(\omega)e^{i\phi(\omega)}.$$

输出信号频谱与输入信号频谱之间的关系为：

$$A(\omega)=A_0(\omega)A_M(\omega)A_{CR}(\omega)A_{INS}(\omega),\tag{3}$$
$$\phi(\omega)=\phi_0(\omega)+\phi_M(\omega)+\phi_{CR}(\omega)+\phi_{INS}(\omega).\tag{4}$$

如果求出了 $A_{INS}(\omega)$，$\phi_{INS}(\omega)$，$A_{CR}(\omega)$，$\phi_{CR}(\omega)$，$A_M(\omega)$，$\phi_M(\omega)$，$A(\omega)$，$\phi(\omega)$，则由上式不难算出 $A_0(\omega)$，$\phi_0(\omega)$．以下以 P 波为例谈 $A_0(\omega)$、$\phi_0(\omega)$ 的求法．

（1）地震图的频谱（$A(\omega)$，$\phi(\omega)$）．

设地震图上 P 波 $u(t)$ 从初至持续了 T 时间长度．如果就对 $[0, T]$ 这段时间的波形作频谱分析，那么通常称 T 为所截取的资料长度．按时间间隔 Δt 将 $[0, T]$ 分成 N 等分（图 15.20），则有 $T=N\Delta t$．同时记

$$f=\frac{1}{\Delta t},\quad \Delta f=\frac{1}{T}=\frac{1}{N\Delta t}=\frac{f}{N}.$$

这里，Δt 称为取样间隔．f 是按 Δt 在时间域 $[0, T]$ 上取样之后，所能计算的频谱的最高频率，也即这时所能计算的频谱的频率范围是 $[0, f]$．Δf 是求出的频谱所能达到的精细分辨下限．显然 Δt、T、N、Δf、f 这五个量中只有两个是独立的．

在各个分点取 $u(t)$ 的值，得到 N 个等距离散数据：

$$\{u_j\}=u(0),\ u(\Delta t),\ u(2\Delta t),\ \cdots,\ u[(N-1)\Delta t].\quad(j=0,1,2,\cdots,N-1)$$

这种等距离散时间序列的傅里叶变换可以写作

$$\begin{aligned}U_k=U(k\Delta f)&=\Delta t\sum_{j=0}^{N-1}u(j\Delta t)e^{-i2\pi\cdot k\Delta f\cdot j\Delta t}\\&=\Delta t\sum_{j=0}^{N-1}u(j\Delta t)e^{-i2\pi jk/N}\quad(k=0,1,\cdots,N-1)\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}u_j=u(j\Delta t)&=\Delta f\sum_{k=0}^{N-1}U(k\Delta f)e^{i2\pi\cdot j\Delta t\cdot k\Delta f}\\&=\Delta f\sum_{k=0}^{N-1}U(k\Delta f)e^{i2\pi jk/N}\quad(j=0,1,\cdots,N-1)\end{aligned}\tag{6}$$

由（5）式算出地震图的复频谱 U_k

$$\begin{aligned}U_k=U(k\Delta f)&=\Delta t\sum_{j=0}^{N-1}u(j\Delta t)\left[\cos\frac{2\pi jk}{N}-i\sin\frac{2\pi jk}{N}\right]\\&=A_{k1}-iA_{k2}\quad(k=0,1,\cdots,N-1)\end{aligned}$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}&\text{振幅谱}\quad A_k = |U_k| = \sqrt{A_{k1}^2 + A_{k2}^2},\\&\text{相位谱}\quad \phi_k = \tan^{-1}\left[-\frac{A_{k2}}{A_{k1}}\right].\end{aligned}\right\}\quad (k = 0, 1, \cdots N-1).$$

实际上机计算是采用快速傅里叶变换算法（FFT）[38]．这时要求取样点数 $N = 2^m$，m 为正整数．运算次数可由 N^2 次减少为 $N\log_2 N = Nm$ 次．

关于资料长度 T，应该在不把后面到达的别的震相包括进去的前提下尽量取长．

关于取样间隔 Δt，原则上是越小越好，这样能使数字讯号逼真地反映记录信号．但 Δt 小则数据点增多，计算量加大．根据取样定理，如果 f_{max} 是讯号 $u(t)$ 的高频极限，则取

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2f_{max}},$$

就不会把信号中的最高频率成分丢失．通常就取

$$\Delta t = \frac{1}{2f_{max}}.$$

当 T，Δt 确定之后，N，f，Δf 也就确定了．

通常在实际处理资料时，还需要在 $[0, T]$ 上嵌上一个窗函数，即以定义在时间域 $[0, T]$ 上的函数 $w(t)$ 对所要处理的函数 $u(t)$ 加权．这时所要处理的信号变成

$$\bar{u}(t) = u(t)\cdot w(t),$$

即须将 (5) 式中的 $u(t)$ 换成 $\bar{u}(t)$．以 $W(\omega)$ 记 $w(t)$ 的复频谱，以 $\bar{U}(\omega)$ 记 $\bar{u}(t)$ 的复频谱，则 $\bar{U}(\omega)$ 是 $U(\omega)$、$W(\omega)$ 的褶积，有

$$\bar{U}(\omega) = \frac{1}{2\pi}U(\omega) * W(\omega).$$

根据我们对所要处理的信号及干扰性质的认识，可以适当地构制窗函数 $w(t)$，使它具有适当的特殊形状，达到加强信息压制干扰的目的．在具体问题中，$w(t)$ 取什么形状要通过实验来选定．在地震波谱分析中，当地震图记录清晰干扰很小时，常取 $w(t) = \begin{cases}1 & (0 \leqslant t \leqslant T)\\ 0 & (\text{其它}),\end{cases}$ 这样的 $w(t)$ 称为矩形窗，就是截取 T 长度的资料来作谱分析，以 $w(t)$ 在 $[0, T]$ 上均等地对资料加权，把信息和干扰同等看待，这时无须对资料作预先加工．

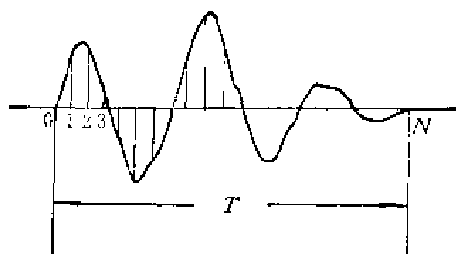


图 15.20

(2) 地震仪的频率响应（$A_{INS}(\omega)$、$\phi_{INS}(\omega)$）

不同地震仪的频率响应不同．我国基准台使用的基式地震仪的频率响应在 § 11.1 中已作介绍．

美国海岸和大地测量局（$USCGS$）的地震台网所使用的长周期标准地震仪的摆周期 $T_0 = 30$ 秒，电流计周期 $T_g = 100$ 秒，频率响应为[75]：

$$A_{INS}(\omega) = \frac{M\omega^2}{(\omega_0^2 + \omega^2)(\omega_g^2 + \omega^2)},$$

$$\phi_{INS}(\omega)=\frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{\omega_0}{\omega}+\tan^{-1}\frac{\omega_g}{\omega}\right)-\frac{1}{4},$$

式中

$$\omega_0=2\pi/T_0,\quad \omega_g=2\pi/T_g,$$

M是标准化常数.

以上仪器的振幅响应表示在图 15.21 中.

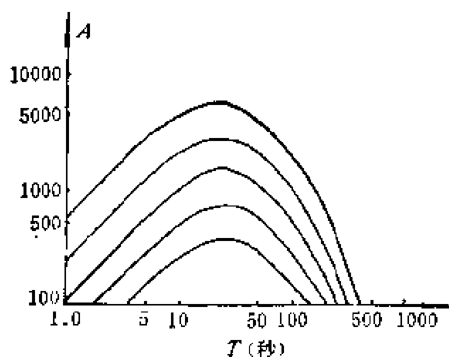


图 15.21 长周期标准地震仪振幅响应[75]

(3) 地壳的频率响应 ($A_{CR}(\omega)$, $\phi_{CR}(\omega)$)

关于地壳的频率响应，已经有人用哈斯克尔矩阵法对不同地壳模型、不同震相作了计算[76]. 图 15.22 和图 15.23 分别是四种地壳模型(见表15.2)对 P 波垂直分量的振幅响应和相位响应.

由下两图可以看出，对于周期较小的 P 波，不同地壳结构的频率响应的差异很大；但对于周期大于 20 秒的 P 波，这种差异却较小. 因此尽管地震台下的实际地壳结构不同，但当使用长周期 P 波资料时，却可以把它们看成相同的而并不影响结果. 但是不同观测点的射线人射角 i 不同，由地动位移还原成入射位移时要扣除的常数因子 K 也不同 (参见 § 13.1). 这虽然并不影响地壳振幅谱频率响应 $A_{CR}(\omega)$ 曲线的形状，却影响其幅度值. i 的不同即表现为波的视速度的不同，因此在计算 $A_{CR}(\omega)$ 时已经把视速度作为参变量绘成了曲线族，可以根据观测点 P 波的视速度值查相应的振幅响应曲线(图 15.24，对应于地壳模型 4).

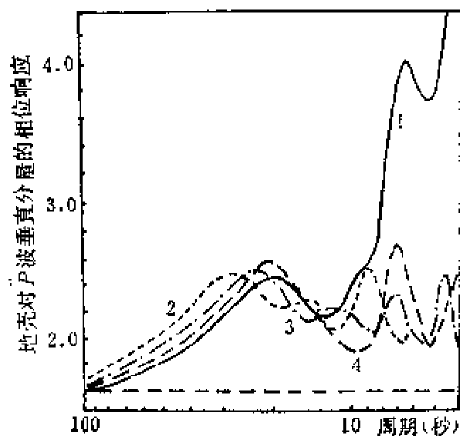


图 15.22[76]

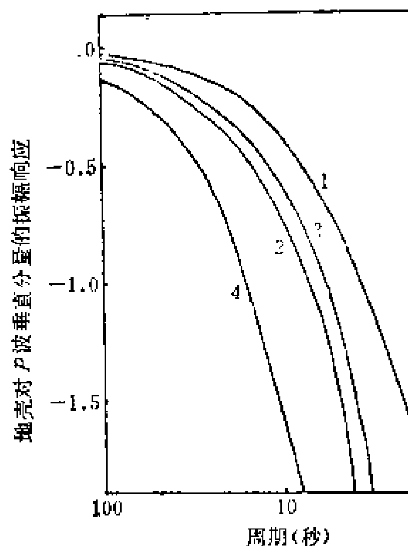


图 15.23[76]

(4) 地球内部的频率响应 ($A_M(\omega)$、$\phi_M(\omega)$)

地球内部的 P 波频率响应 $H_M(\omega)$ 至今不太清楚. 但它的振幅响应 $A_M(\omega)$ 可以表示成两个因子的乘积:

$$A_M(\omega)=G\cdot AT(\omega),$$

其中 G 起因于几何扩散. 地震体波 P、S 的振幅随着波阵面扩大而减小的规律为(参见

表 15.2

		纵波速度	横波速度	密　度	层厚度
1	地　壳	6.1000	3.3800	2.8500	27
	地　幔	8.2000	4.5400	3.4000	
2	地　壳	2.9000	1.6000	2.5000	0.6000
		4.8000	2.6600	2.6500	0.4000
		5.2000	2.8800	2.6700	1.3000
		5.8000	3.2100	2.8000	9.9000
		6.1000	3.3800	2.8500	15.5000
		6.7000	3.7100	3.0500	20.0000
	地　幔	8.0000	4.4300	3.3500	∞
3	地　壳	5.7000	3.3300	2.7800	22
		6.3300	3.5900	3.0000	15
	地　幔	7.5200	4.3500	3.3300	
4	地　壳	6.0300	3.5300	2.7800	22
		6.7000	4.4900	3.0000	15
	地　幔	8.0000	4.6000	3.3300	13
		7.8400	4.4900	3.3500	25
		7.8400	4.3800	3.3700	50
		8.0200	4.5800	3.4200	∞

§13.1 公式 (8))

$$G = \frac{1}{R_0}\left[\frac{\cos e_h}{\sin\Delta\sin e_0}\frac{de_h}{d\Delta}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{R_0}\left[\frac{\sin i_h}{\sin\Delta\cos i_0}\left|\frac{di_h}{d\Delta}\right|\right]^{\frac{1}{2}},$$

式中 i_0、e_0 分别是观测点的入射角和出射角，i_h，e_h 分别是射线离源时与铅直线、水平面的夹角(图 15.10)．由上式可知，G 与频率无关．

$AT(\omega)$ 是由介质吸收引起的衰减，

$$AT(\omega) = \exp\left[-\int \gamma(\omega, s)ds\right],$$

式中 $\gamma(\omega, s)$ 是介质吸收系数，它是频率 ω 和射线路径 S 的函数(见 § 4.7 (8) 式)，并且

$$\gamma(\omega, s) = \frac{\omega}{2Q(r)v(r)},$$

$Q(r)$ 是介质品质因素．当它为一常

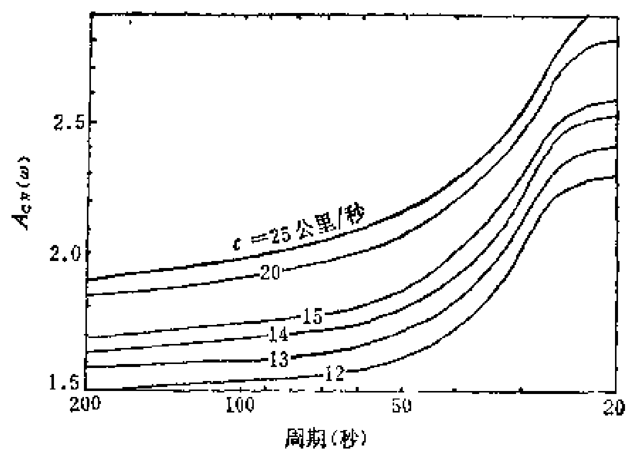


图 15.24[176]

数 Q_0 时，

$$AT(\omega)=\exp\left[-\int\frac{\omega}{2Q(r)v(r)}ds\right]=\exp\left[-\frac{\omega}{2Q_0}\int\frac{ds}{v(r)}\right]$$

$$=\exp\left[-\frac{\omega}{2Q_0}\int dt\right]=\exp\left[-\frac{\omega t_P}{2Q_0}\right],$$

式中 t_P 为 P 波走时．实际上 Q 值随深度而变，根据地球内部 Q 值的分布模型[77]，本-梅纳赫姆（Ben-Menahem）等人[76]得到

$$AT(\omega)\simeq\exp\left[-\omega\frac{R_0}{v_0}\left|\frac{\sin(i_h+i_0)}{\sin i_h}\right|\times10^{-3}\right].$$

对于长周期 P 波，由介质吸收引起的衰减很小，$A_M(\omega)$ 主要受几何扩散因子 G 支配。图 15.28 是对一组射线计算出的 $A^{-1}(\omega)$ 曲线[73]．

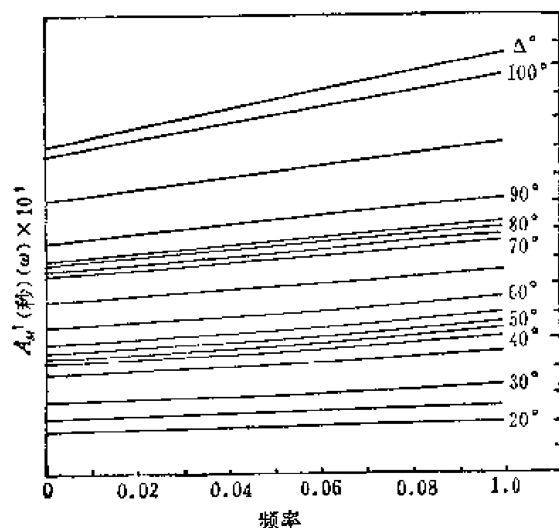


图 15.25[76]

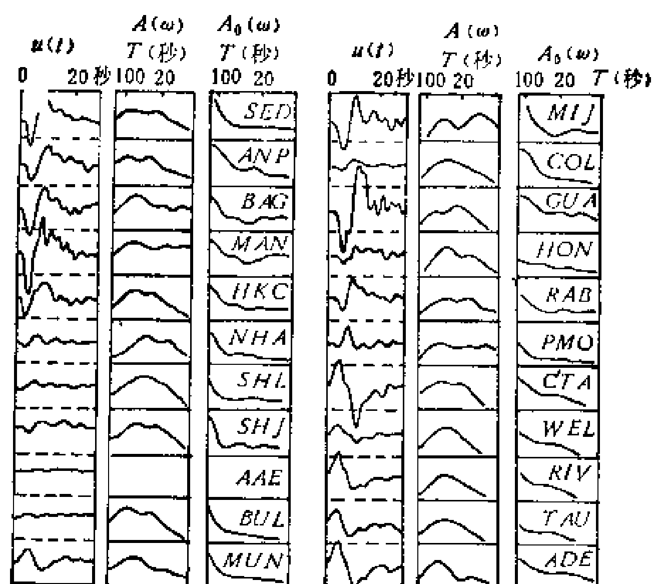


图 15.26[76]

3. 测定震源参数

求出 $A(\omega)$、$A_{INS}(\omega)$、$A_{CR}(\omega)$、$A_M(\omega)$ 之后，代入公式 (3) 得到 $A_0(\omega)$ (图 15.26)。取定频率 ω_i，在各台 $A_0(\omega)$ 曲线上测量 $A_0(\omega_i)$ 值. 将 $A_0(\omega_i)$ 的分布图案与投影在同一平面上的理论图案作比较，选出震源参数.

图 15.27 是用长周期 P 波振幅谱辐射图案测定 1964. 3. 21 班达海 (Banda Sea) 地震 $\left(\lambda_e\,127.9^\circ\,\mathrm{E},\ \varphi_e 6.4^\circ\,s,\ h=350\ 公里,\ M=6\frac{1}{4}\sim 6\frac{3}{4}\right)$ 的震源参数的例子. 达-林登 (Ta-Liang Teng) 和本-梅纳赫姆使用了 22 个台站的长 USCGS 周期标准地震仪的 P 波记录图，选用了高度为 1 长度为 45 秒的矩形资料窗，按取样间隔把波形数字化之后，连同所须各种资料都输入计算机，算出地震图的波谱 $A(\omega)$、$\phi(\omega)$ 和各个传输函数 $H(\omega)$，计算 $A_0(\omega)$、$\phi_0(\omega)$，打印出 $A_0(\omega)$、$\phi_0(\omega)$ 的数值并画出辐射图案. 再以各种可能的参数算出并绘制了 400 个理论辐射图案. 通过两种图案的对比，选出断层走向为 85°，倾角为 84°，断层错动方向的方位为 315°. 由于是个深震，作者使用了双力偶点源模型. 1968 年戴维思 (Davies) 和史密斯 (Smith)[78] 从有限源出发给出该地震的断层长度为 35 ± 10 公里，破裂传播速度为 5 ± 2.3 公里/秒.

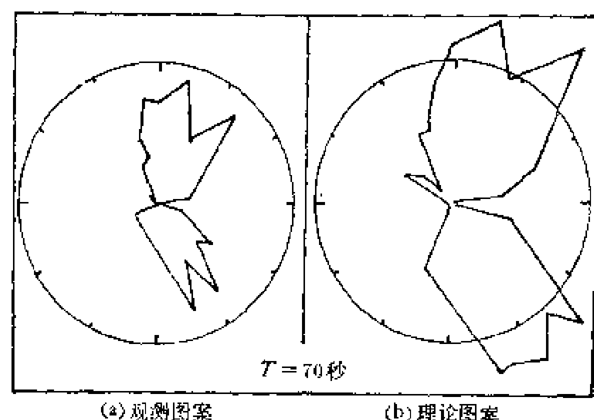


图 15.27[16]

二、使用面波振幅谱图案和人工地震图的方法

取一简单一维有限源模型，设地震断层面垂直于地平面，错动是水平向的，即所谓垂直走向滑动. 并且，断层面的宽度忽略不计. 当只考虑面波沿地球表面传播路程小于地球半周长的情况时，地面上震中距为 Δ 的观测点 x 处的面波位移谱为

$$U(\omega,\Delta)=\hat{u}(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta}}\cdot\frac{\mathscr{R}}{\omega}\,i\omega G(\omega)\frac{\sin X}{X}e^{-iX}H(\omega)e^{-\gamma\Delta}e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta}}\mathscr{R}G(\omega)\frac{\sin X}{X}e^{-iX}H(\omega)e^{-\gamma\Delta}e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta} \tag{7}$$

式中

① $\mathscr{R}$ 叫空间因子，是点源的面波辐射图样，取决于震源力系. 文献 [79] 归纳给出有单力、单力偶、双力偶等震源力系下的瑞雷波、乐甫波的 $\mathscr{R}$ 的表示式. $\frac{\mathscr{R}}{\omega}$ 表示面波

的强度与其频率 ω 成反比.

② $G(\omega)$ 是时间因子,它是震源时间函数 $g(t)$ 的傅里叶变换.

③ $H(\omega)$ 是地壳对面波的频率响应.

④ $\frac{\sin X}{X}e^{-iX}$ 是由破裂传播所引起的有限性因子.

$$X=\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\tilde{\varphi}}{c}\right),$$

这儿 L 是破裂长度,v 是破裂传播速度,c 是面波相速度,$\tilde{\varphi}$ 在这儿是表示台站相对于破裂传播方向的方位角.

⑤ $e^{-\gamma\Delta}$ 是介质吸收所引起的面波衰减,γ 是吸收系数.

⑥ $\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta}}e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta}$ 是波阵面扩展引起的振幅衰减和相移. 在 $\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta}}$ 中的 Δ 以度计算,在 $e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta}$ 中的 Δ 以公里计算. c 是面波相速度,以公里/秒计算.

如果沿面波射线路径从观测点退到震中距为 Δ_0 的 x_0 点,那么 x_0 点的位移谱为

$$U(\omega,\Delta_0)=\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta_0}}\mathscr{R}G(\omega)\frac{\sin X}{X}e^{-iX}H(\omega)e^{-\gamma\Delta_0}e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta_0},$$

假设各处地壳的频率响应相同,那么

$$U(\omega,\Delta_0)=U(\omega,\Delta)\sqrt{\frac{\sin\Delta}{\sin\Delta_0}}e^{-\gamma(\Delta_0-\Delta)}e^{-i\frac{\omega}{c}(\Delta_0-\Delta)} \tag{8}$$

式中 $U(\omega,\Delta)$ 由观测点面波记录图的频谱扣除仪器频率响应而得到. 因此,由上式可把各台的频谱归算成标准距离 Δ_0 处的频谱. 通过傅里叶变换反演到时间域得到标准距离处的面波地震图. 同时,由 (8) 式得标准距离处的面波振幅谱为

$$|U(\omega,\Delta_0)|=|U(\omega,\Delta)|\sqrt{\frac{\sin\Delta}{\sin\Delta_0}}e^{-\gamma(\Delta_0-\Delta)} \tag{9}$$

取定 $\omega=\omega_i$, 由 $|U(\omega,\Delta_0)|$ 曲线上测得 $|U(\omega_i\Delta_0)|$, 把它作为各台方位角的函数表示出来,就得到在标准距离处该频率的观测振幅谱辐射图案.

另一方面,又可以假定震源参数计算出在标准震中距处的人工地震图和理论振幅谱辐射图案. 将以上两种地震图,两种辐射图作对比,通过修改震源参数使它们相符合得令人满意,也就确定了震源参数.

大多数浅源大地震的断层错动以走向滑动为主,破裂水平分量相对于垂直分量占很大优势. 而据一些人研究,破裂传播的水平分量才对面波位移的方向性有明显影响,所以在讨论这些地震的面波位移公式时,作为一种近似,可以只考虑破裂传播的水平分量的作用. 另外,对于这些浅源大地震来说,破裂长度比宽度大很多,也可以略去宽度对面波的影响. 这样以来,这些地震的面波位移谱公式仍可以用 (7) 式来近似表示. 这时式中的 φ 角为台站相对于破裂方向的水平分量的方位角,L, v 分别是破裂长度和破裂速度的水平分量.

当使用观测点记录到的沿地球表面传播距离超过地球半周长 (甚至绕地球几圈) 的面波时,(7) 式右端要再乘以因子 $e^{i\frac{\pi}{2}m}$. m 是观测点记录到的面波在传播路途中通过震

中或震中对蹠点的次数．理论和实验都表明[80]，当面波沿地球表面传播时，每通过一次震中或震中对蹠点时，相位要超前 $\frac{\pi}{2}$．因此，$e^{i\frac{\pi}{2}m}$ 是观测点接受到的通过震中或震中对蹠点 m 次的面波的总相位超前．

图 15.28 是金森博雄（Kanamori）对 1963.10.13 千岛群岛地震的瑞利波作上述类似分析得出的结果[81]．他最后选出了断层面，并确定破裂长度为 200—300 公里，破裂速度为 2.7—4.5 公里/秒．

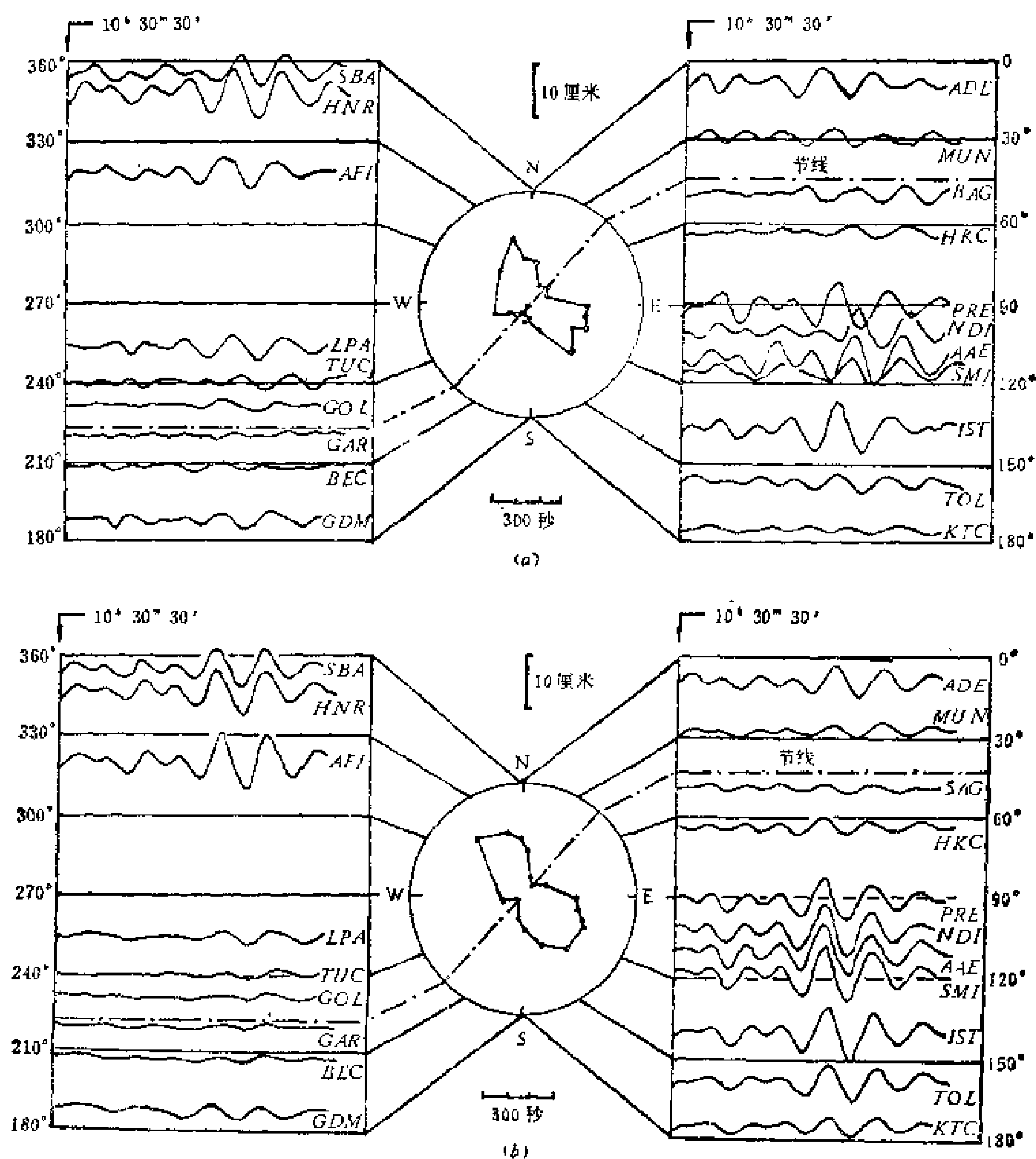


图　15.28

(*a*) 1963.10.13 千岛群岛地震的经过归算后的瑞利波。所有地震图都归算到传播距离为 $\frac{7\pi}{2}$ 处．周期为 300 秒的辐射图案表示在图的中央．

(*b*) 在 $\frac{7\pi}{2}$ 距离上的人工合成瑞利波．周期为 300 秒的理论辐射图案表示在图的中央．

三、使用面波方向性函数的方法

仍取上述简单模型，设有方位对震中正好相反的两个台站，用 (8) 式归算到标准震中距 Δ_0 处相应的 S_i、S_j 两点的面波波谱分别为 $U_i(\omega, \Delta_0)$、$U_j(\omega, \Delta_0)$，那么振幅比

$$D_{ij}=\frac{|U_i(\omega, \Delta_0)|}{|U_j(\omega, \Delta_0)|}$$

可由观测资料算出．D_{ij} 称为面波方向性函数．

另一方面，由 (7) 式可以得到

$$|U_i(\omega, \Delta_0)|=\left|\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta_0}}\mathscr{R}_iG(\omega)\left(\frac{\sin X}{X}\right)_iH(\omega)e^{-\gamma\Delta_0}\right| \tag{9'}$$

$$|U_j(\omega, \Delta_0)|=\left|\frac{1}{\sqrt{R_0\sin\Delta_0}}\mathscr{R}_jG(\omega)\left(\frac{\sin X}{X}\right)_jH(\omega)e^{-\gamma\Delta_0}\right|$$

由于这时 $|\mathscr{R}|_i=|\mathscr{R}|_j$，$H(\omega)$ 已假设各处相同，所以有

$$D_{ij}=\frac{\left|\dfrac{\sin X}{X}\right|_i}{\left|\dfrac{\sin X}{X}\right|_j}=\left|\frac{\sin\dfrac{\omega L}{2}\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_i\right)}{\sin\dfrac{\omega L}{2}\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_j\right)}\cdot\frac{\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_j}{\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_i}\right|. \tag{10}$$

由上式可知，当

$$\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_i\right)=n\pi\quad(n=1, 2, \cdots) \tag{11}$$

时，D_{ij} 为极小．当

$$\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_j\right)=n\pi\quad(n=1, 2, \cdots) \tag{12}$$

时，D_{ij} 为极大．即方向性函数有一系列极值点．当 $n=1$ 时，称为第一个极值点．由方向性函数可以测定震源参数．

1. 判断断层面和破裂传播方向

在这简单模型情况下，由 P 波初动解得出的两条节线 AA'，BB' 过震中而相垂直，它们也就是两个可能的破裂方向(图 15.29)．设 S_1，S_2，S_3，S_4 被它们分在四个区间，S_1 和 S_3，S_2 和 S_4 的方位角分别相差 180°．

设 AA' 是断层面走向，破裂传播方向是 α，那么

$$D_{13}=\left|\frac{\sin\dfrac{\omega L}{2}\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1\right)}{\sin\dfrac{\omega L}{2}\left(\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1\right)}\cdot\frac{\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1}{\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1}\right|.$$

由于

$$\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1\right)$$

先达到 π，因此 D_{13} 的第一个极值是极大．同样，由

$$D_{24}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2}{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2}\right|,$$

知 D_{24} 的第一个极值也为极大.

如果破裂传播方向是 $\boldsymbol{a}'$, 那么

$$D_{13}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3}{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3}\right|,$$

$$D_{24}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4}{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4}\right|.$$

即 D_{13}, D_{24} 的第一个极值都是极小.

同理,如果 BB' 是断层面走向,破裂传播方向是 $\boldsymbol{b}$, 则

$$D_{13}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1}{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_1}\right|,$$

$$D_{24}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4}{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_4}\right|.$$

即 D_{13} 的第一个极值为极大, D_{24} 的为极小.

如果这时破裂传播方向是 $\boldsymbol{b}'$, 则

$$D_{13}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3}{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_3}\right|,$$

$$D_{24}=\left|\frac{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2\right)}{\sin\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2\right)}\cdot\frac{\frac{1}{v}+\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2}{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_2}\right|.$$

即 D_{13} 的第一个极值为极小, D_{24} 的为极大.

以上 D_{13}、D_{24} 的第一个极值的性质对断层面和破裂传播方向的依赖关系归纳成表 15.3.

反过来,可以根据观测到的 D_{13}, D_{24} 的第一个极值的性质,对照上表,判断断层面,破裂传播方向. 实际应用时对 S_1 和 S_3, S_2 和 S_4 方位分别相差 180° 的要求并不严格,差不多就行. 现在有人已把方向性函数推广成任意两个台站的振幅谱之比,利用许多对台站的方向性函数来判断断层面、破裂传播方向[82].

表 15.3

节面	破裂方位线	破裂传播方向	第一个极值的性质	
			D_{13}	D_{24}
I	I (AA')	a	极　大	极　大
I	I	a'	极　小	极　小
II	II (BB')	b	极　大	极　小
II	II	b'	极　小	极　大

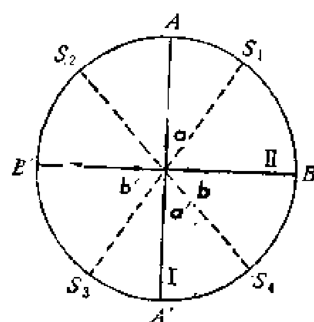


图 15.29

2. 测定 L 和 v

量取一条 D_{ij} 曲线上的第一个极小值(或极大值)和第一个极大值(或极小值)所对应的频率 f_1，由(11)、(12)式得

$$f_{1极小}\cdot L\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_i\right)=1,$$

$$f_{1极大}\cdot L\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\tilde{\varphi}_j\right)=1.$$

设 c 已知，而 $\tilde{\varphi}$ 角在已经判断了断层面和破裂传播方向的基础上可以量出，因此可求出 L, v.

另一方面，假设 L, v 的值，计算出理论方向性函数 D_{ij} 曲线，和观测曲线作对比，也可以选出合适的 L, v 值.

图 15.30 是尤迪斯 (Udias)[80] 所计算的一条 D_{ij} 曲线. 他用方向性函数的方法判断了 1966.7.4. 阿留申群岛地震 ($M=7.2$) 的断层面和破裂传播方向，并求得 $L=35$ 公里，$v=1.5$ 公里/秒.

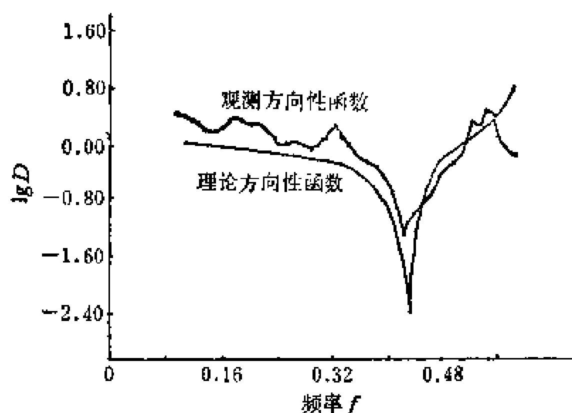


图 15.30

同一台站记录到的沿劣弧传播来的瑞利波 R_1 和沿优弧来的 R_2，可以看作是方位相差 180° 的两个台上的记录，而将其方向性函数用来测定震源参数[79].

方向性函数法对于前面所说的以走向滑动为主的浅源大地震也适用，这时求出的 L, v 是破裂长度和破裂速度的水平分量.

方向性函数方法的原理对体波也适用. 卡特里 (Khattri)[83] 曾推导了 P 和 S 波的方向性函数表示式，并用来求过深源地震的震源参数.

四、使用振幅谱极小值的方法

前面已经看到，在一维有限移动源模型下，远场地震体波、面波位移振幅谱的公式 (2)、(9') 中都有有限性因子 $\left|\frac{\sin X}{X}\right|$. 由于它的存在，振幅谱中出现了一系列极小值，这

些极小值发生在X使$\frac{\sin X}{X}=0$的时候,这对应着(以体波为例)

$$X=\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\cos\theta\right)=n\pi. \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

振幅谱的第n个极小值所对应的周期为T_n,

$$T_n=\left(\frac{L}{v}-\frac{L}{c}\cos\theta\right)\Big/n.$$

可见T_n与$\cos\theta$成直线关系.

当取$n=1$时,$T_1=\left(\frac{L}{v}-\frac{L}{c}\cos\theta\right)$,如果由足够多数目的台站求出相应的$\cos\theta$和$T^1$,点在$\cos\theta\sim T_1$平面上,应是一条直线.而且直线的斜率

$$K=-\frac{L}{c},$$

其在下轴的距截

$$b_0=\frac{L}{v}.$$

因而L, v能够求得.当然,使用$T_n\sim\cos\theta\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$图求$L$, v也行.

由振幅谱确定震源参数的步骤为:

(1) 计算地震图的频谱,扣除各种频率响应,得到振幅谱.

(2) 在振幅谱上识别第一个极小值,读出相应周期T_1.

尽管已经扣除了各种影响,有时仍有不是起因于有限性因子$\frac{\sin X}{X}$的极小值在振幅谱上出现.这可能是由台址局部地质条件等干扰因素造成的.因此要准确识别T_1,还应该注意:

① $\left|\frac{\sin X}{X}\right|$的形状如图15.31所示,其下降趋势在$X=\pi$时最陡.这造成在振幅谱上

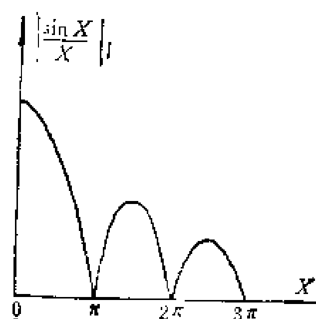


图 15.31

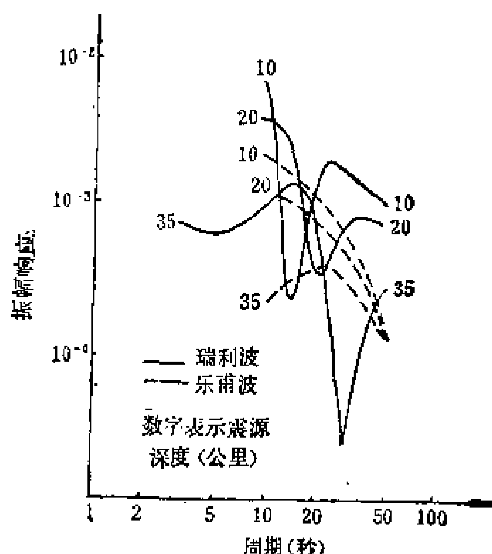


图 15.32

第一个极小值比其它极小值都下降得陡．而且，第一个极小值的周期 T_1 与其它极小值的周期 T_n 受关系式 $T_n = \frac{T_1}{n}$ 的制约．以上这两个特点在各台的振幅谱上都有反映，而局部干扰造成的极小值不具备这些特点，不会在每个台上的振幅谱上都有反映．

② 要掌握一些干扰所引入的极小值的频率区域，以备查考．例如，成层地壳对瑞利波和乐甫波的振幅响应中有一极小值，它所在的周期随震源深度而变(图 15.32)．当地震波的振幅谱上极小值出现在这些周期附近时，应特别注意鉴别．

(3) 测定各台的 θ 角．在乌尔夫网上已由 P 波初动解得到两条节线和与其相对应的两个可能的破裂方位线 $OX(E''X)$, $OZ(E''Z)$, OX, OZ 分别与破裂轴线 ox, oz 相对应(见图 15.15)．可以这样测定台站理想点 S' 与震源 o 的连线 oS' 和 ox 间的夹角 $\theta^{(x)}$：假定破裂水平分量由 $O(E'')$ 指向 X．转动乌尔夫网上的透明圆盘，使 X 和 S''(S' 在网上的投影)两点落在网的一条大圆弧上，沿该弧读出从 X 到 S'' 的度数，即为 $\theta^{(x)}$．依此法量出所有台站的理想点与 ox 的夹角 $\theta_1^{(x)}$, $\theta_2^{(x)}$, $\cdots\theta_i^{(x)}$．同理，将 Z 点与 S'' 转到同一大圆弧上，沿该弧读出从 Z 到 S'' 的度数，就得出各台理想点与 oz 之间的夹角 $\theta_1^{(z)}$, $\theta_2^{(z)}\cdots\theta_i^{(z)}$．

使用面波资料时，$\bar{\varphi}$ 角由图 15.29 所示的平面图量取．

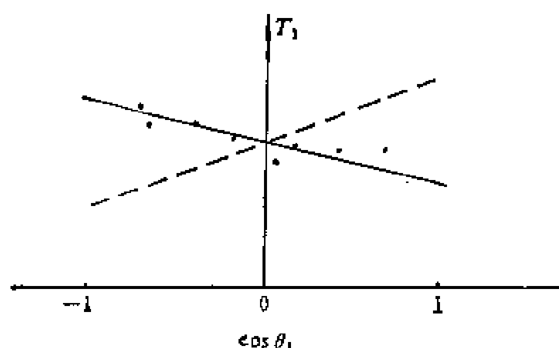


图 15.33

(4) 分别用 $T_{1i} \sim \cos\theta_i^{(x)}$ 和 $T_{1i} \sim \cos\theta_i^{(z)}$ 点图．其中必定只有一图满足线性关系，以此可以判断断层面；测定拟合直线的斜率和截距可以求出 L 和 v (图 15.33)．如果发生图 15.33 中的虚线所示的情况，就说明原先假设的破裂水平分量由 O 指向 X (或 Z) 是错误的，应该由 O 指向相反方向．这样，也就进一步把破裂传播方向确定了．

王妙月等人用这个方法曾判断了我国新丰江水库 1962 年 3 月 19 日 6.1 级地震的断层面，并求得断层长度为 19 公里，破裂速度为 1.4 公里/秒[17]．

五、使用 *P* 波初动半周期的方法

1. 有限移动源的远场位移在时间域的表达式

这里亦仅讨论单侧移动源的情况，所作的讨论不难推广到双侧移动源或其它更复杂的震源模型．§9.7 (7) 式给出了单侧有限移动源的体波远场位移场的表达式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{m_0}{4\pi\rho c^2 R}\frac{F(\theta)}{L}\left[g\left(t - \frac{R}{c}\right) - g\left(t - \frac{R}{c} - \frac{L}{cF(\theta)}\right)\right],$$

其中

$g(t)$ 为位错时间函数，

$F(\theta) = \dfrac{1}{\dfrac{c}{v} - \cos\theta}$ 为调制因子．

§ 9.7 节中亦讨论了有限移动源的多普勒效应. 即顺着源移动的方向上辐射的体波周期变短，波幅增大；而背着源移动的方向上辐射的体波周期增大，波幅减小. 当破裂速度 v 和波速 c 相接近时，这种效应就更为明显. 所以对 S 波来说，这种效应要比 P 波来得强. 显然对于面波也存在同样的效应.

设

$$g(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

则波的扰动持续时间 T_u 与辐射方向 θ 之间的关系为

$$T_u = L\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\theta}{c}\right). \tag{13}$$

2. 由 P 波初动半周期求震源参数

上面给出的 T_u 是震源发出的扰动的持续时间. 如果地球是完全均匀弹性无限介质，T_u 的值在传播过程中应保持不变，而位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 也只有由几何扩散引起的幅度上的减小. 但是，实际情况并非如此，地球内部、地壳和地震仪，都使 T_u 和 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 的形状发生一定变化. 所以，在地震图上观测到的波的初动半周期 $T_{\frac{1}{2}}$ 和 T_u 有一定关系，却不是直接相等. 只要找到了 $T_{\frac{1}{2}}$ 和 T_u 的关系，就能由 $T_{\frac{1}{2}}$ 求得 T_u，进而利用关系式 (13) 能确定震源参数：T_u 与 $\cos\theta$ 成线性关系，直线的斜率

$$K=-\frac{L}{c},$$

在 T_u 轴上的截距

$$b_0=\frac{L}{v},$$

由此可以判断断层面、破裂方向和求出 L、v，这和使用波振幅谱极小值的方法类似.

① 求理论地震图的 P 波初动半周期 $T^*_{\frac{1}{2}}$ 与 T_u 的关系

虽然多普勒效应对于横波、面波更为显著，但在地震图上它们的初动周期很难正确测量，更难取得很多数据. 所以，人们对 P 波更感兴趣.

前面已经提到过，根据一些人的研究结果，长周期 P 波在地幔传播时主要受几何扩散因子支配. 因而 P 波在传播中几乎只改变振幅而不改变震源发出时的扰动持续时间. 所以，在寻找 $T_{\frac{1}{2}}$ 与 T_u 关系时，主要考虑地壳-地震仪系统的影响.

设 P 波经过地幔到达地壳底部时某分向位移为 $\tilde{u}(t)$，它经过地壳-地震仪系统之后变成地震图上的波形 $y(t)$. $\tilde{u}(t)$ 是输入函数，$y(t)$ 是输出函数，它们之间由褶积运算联系起来：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\tilde{u}(t-\tau)d\tau, \tag{14}$$

式中 $h(\tau)$ 是地壳-地震仪这一系统的系统函数，也即系统对单位脉冲输入的响应.

给定地壳模型和地震仪器，算出 $h(t)$. 对其输入 P 波波形 $\tilde{u}(t)$，计算输出波形 $y(t)$，就得到人工或理论地震图. 实际计算时使用的是等距离散变量的褶积公式：

$$y_j=\sum_{j'=0}^{N-1} h_{j'}\tilde{u}_{j-j'}. \quad (j=0, 1, \cdots, N-1)$$

改变 $\tilde{u}(t)$ 的持续时间 T_u，测量输出波形 $y(t)$ 即人工地震图的初动半周期 $T^*_{\frac{1}{2}}$，画成 $T^*_{\frac{1}{2}}$-T_u 曲线.

如果 $\tilde{u}(t)$ 取得合理，则 $T^*_{\frac{1}{2}}$-T_u 曲线也就代表了 $T_{\frac{1}{2}}$-T_u 曲线. 可以把 $\tilde{u}(t)$ 可能取的几种形式的波形都用上式进行计算，再通过与观测资料对比来确定合理的 $T^*_{\frac{1}{2}}$-T_u 曲线.

博林格（Bollinger）[84] 对图 15.34 b 中的大陆地壳-世界地震台网的长周期垂直向地震仪系统 $h(t)$ 输入了三种不同形式的 $\tilde{u}(t)$——箱形函数、辛格函数、阻尼正弦函数分别改变其 T_u 值（见图 15.34 a），算出了 $y(t)$，并测量了相应的 $T^*_{\frac{1}{2}}$ 值（图 15.34 c）归纳成图 15.35 中的三条曲线.

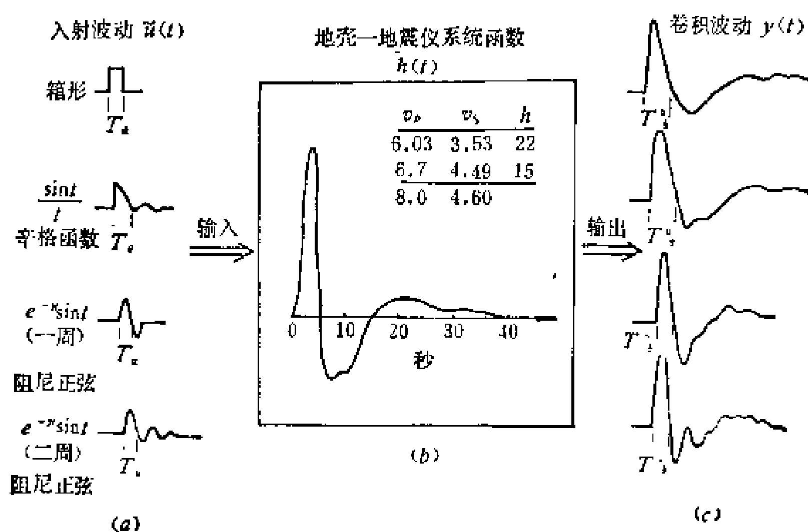


图 15.34

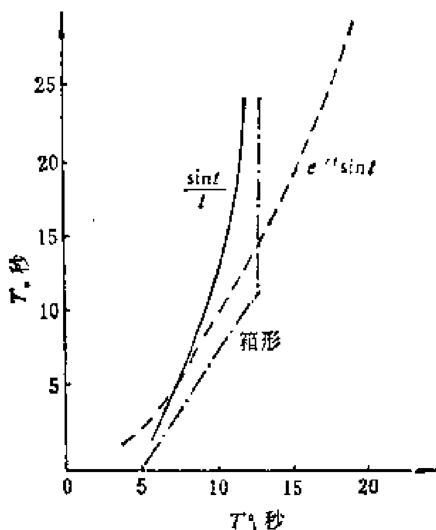


图 15.35

进一步研究对应于不同输入波形的 P 波理论地震图上的第一个峰与第一个谷的振幅比 A_+/A_- 和实际地震图上的 A_+/A_- 的关系，发现当 $\tilde{u}(t)$ 为阻尼正弦函数时两者符合得

比 $\tilde{u}(t)$ 为箱形函数为好. 同时当 $\tilde{u}(t)$ 为阻尼正弦函数时，可以在理论地震图上得出实际常见到的 $T^{\circ}_{\frac{1}{2}}<5$ 秒的 P 波，而 $\tilde{u}(t)$ 为箱形函数时却得不到. 因此可能将 $\tilde{u}(t)$ 取成与阻尼正弦函数相类似的形式比较合理，因而相应的 $T^{\circ}_{\frac{1}{2}}-T_u$ 曲线也可能比较合理[85].

②由 T_u-θ 关系求震源参数

在地震图上测定 P 波初动半周期 $T_{\frac{1}{2}}$，它就相当于 $T^{\circ}_{\frac{1}{2}}$. 然后利用合理的 $T^{\circ}_{\frac{1}{2}}-T_u$ 曲线查出 T_u. 测定观测点的理想点到震源的连线与由 P 波初动解得到的两个可能的破裂方向的夹角 θ. 按 $(T_u, \cos\theta)$ 点图. 其中线性关系好的才对应着真实的破裂面. 利用这条直线斜率的正负和大小、在 T_u 轴上的截距的大小，进一步确定破裂传播方向、破裂长度 L 和破裂传播速度 v (图 15.36).

将 T_u 作为 θ 角的函数表示在某一平面上，这就是观测的 T_u 辐射图. 然后，计算理论 T_u 辐射图. 两者进行对比，从而选出震源错动方向和破裂长度、破裂速度等参数. 这同样也是可行的.

博林格用后一种方法处理了 1964.3.30 阿拉斯加地震 $\left(M=6\frac{3}{4}, h=22\text{ 公里}\right)$、1963.8.3 中部大西洋地震 $\left(M=6\frac{1}{4}, h=33\text{ 公里}\right)$, 1962.9.29 阿尔金纳地震 $\left(M=6\frac{1}{2}, h=575\text{ 公里}\right)$, 1963.11.9 伯瑞茨尔地震 ($M=7$, $h=600$ 公里)；用前一方法处理了 1963.10.3 日本九州地震 $\left(M=6\frac{1}{2}, h=33\text{ 公里}\right)$, 得到 $L=25\pm1$ 公里, $v=3.1\pm0.2$ 公里/秒. 从他的研究结果来看，地震波的多普勒效应可以从长周期 P 波的初动半周期的变化中观测到. 这种效应当破裂以水平向为主时比破裂以垂直向为主时显著. 这种效应的观测要求地震仪有极好的一致性.

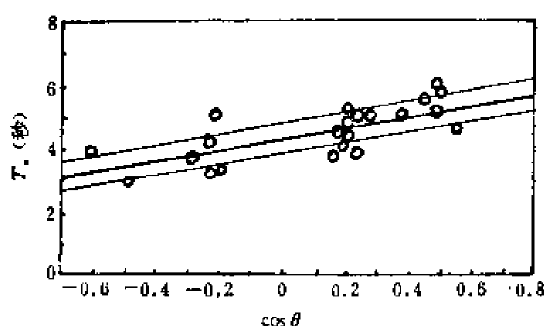


图 15.36

§ 15.4 用地震波资料测定其它震源参数

使用地震波资料还可以估算地震的地震矩，震源尺度，所释放的应力降、应变能、地震波能量等动力参数.

一、地 震 矩

前面已经叙述过，矩形剪切位错面一维单侧移动源产生的远场体波振幅谱为

$$|U(\omega)| = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\left|\frac{\sin X}{X}\right||\omega G(\omega)| \tag{1}$$

式中各符号的意义在§15.3的(1)式中已经交待过了．振幅谱是振幅随频率的变化曲线，其总体形态主要取决于$|\omega G(\omega)|$和$\left|\frac{\sin X}{X}\right|$的乘积．$|G(\omega)|$依赖于震源时间函数$g(t)$．震源时间过程到底是怎样的，目前并不很清楚．也许不同深度不同强度的地震的时间过程并不相同．人们在讨论问题时，往往假设一些简化的时间模型，例如取

$$g(t) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ t/\tau, & (0 \leqslant t \leqslant \tau) \\ 1, & (t > \tau), \end{cases} \tag{2}$$

(τ 称为上升时间)

则

$$|G(\omega)| = \left|\int_0^\infty g(t)e^{-i\omega t}\,dt\right| = \left|\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right|,$$

所以

$$|U(\omega)| = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\left|\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right|\left|\frac{\sin X}{X}\right|$$

$$\overset{\max}{\Longrightarrow}\begin{cases} \dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R} & (\text{当 } \omega \to 0 \text{ 时}), \\ \dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\cdot\dfrac{1}{\frac{\tau a}{2}\cdot\omega^2} & (\text{当 } \omega \text{ 足够大时}). \end{cases} \tag{3}$$

$\left(\text{按} X \text{的表示式，式中 } a = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\theta}{c}\right).\right)$

这儿用$\overset{\max}{\Longrightarrow}$表示取曲线的峰值．由此式可知，在$\lg|U(\omega)|-\lg\omega$平面上，振幅谱曲线在低频部分很平坦，逐渐趋近于上限

$$U(0) = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R},$$

$U(0)$称为低频水平；在高频部分，曲线的峰值以斜率$K = -2$的直线为渐近线而衰减(图15.37)，即按$\frac{1}{\omega^2}$而衰减．高低频两部分渐近线的交点所对应的频率ω_c被称作拐角频率．

Aki[87]的半确定半随机的"ω-平方模型"和"ω-立方模型"的振幅谱分别为

$$|U(\omega)| = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{K_T}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{v}-\frac{\cos\theta}{c}\right)^2\left(\frac{\omega}{K_L}\right)^2}}$$

$$\xrightarrow{\max}\begin{cases}\dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}, & (当\ \omega\to 0)\\ \dfrac{m_0|\mathscr{R}|K_T K_L}{4\pi\rho c^3 R\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{\cos\theta}{c}\right)}\cdot\dfrac{1}{\omega^2}. & (当\ \omega\ 足够大时)\end{cases} \tag{4}$$

$$|U(\omega)| = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\dfrac{\omega}{K_T}\right)^2\right]\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{\cos\theta}{c}\right)^2\left(\dfrac{\omega}{K_L}\right)^2}}$$

$$\xrightarrow{\max}\begin{cases}\dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}, & (当\ \omega\to 0\ 时)\\ \dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\cdot\dfrac{K_T^2 K_L}{\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{\cos\theta}{c}\right)}\cdot\dfrac{1}{\omega^3}. & (当\ \omega\ 足够大时)\end{cases} \tag{5}$$

(K_T、K_L 是两个统计学参数，参见 §13.3)

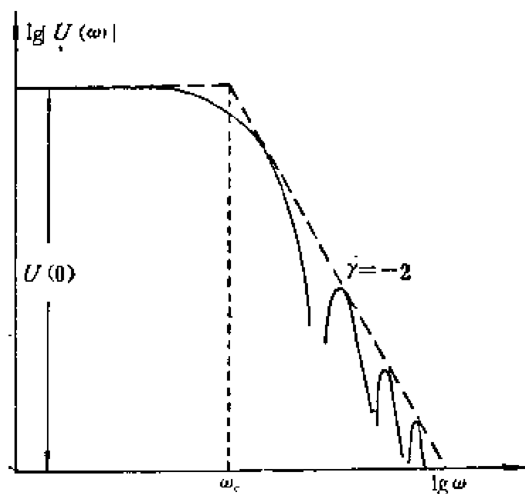


图 15.37

前者高频部分的峰值渐近线按 $\frac{1}{\omega^2}$ 衰减，后者按 $\frac{1}{\omega^3}$ 衰减．两者的低频水平也是

$$U(0) = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}.$$

高频峰值渐近线按 $\frac{1}{\omega}$ 衰减的情况，也可以举个例子．例如，取震源时间函数为单位阶跃函数

$$g(t) = H(t) = \begin{cases}1 & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases} \tag{6}$$

时，则

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

所以

$$|U(\omega)| = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3 R}\left|\frac{\sin X}{X}\right|$$

$$\xrightarrow{\max}\begin{cases}\dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3R}, & (\text{当 } \omega\to 0 \text{ 时})\\[2ex] \dfrac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3R}\cdot\dfrac{1}{a\omega}. & (\text{当 } \omega \text{ 足够大时})\end{cases} \tag{7}$$

(a 的表示式同前).

由以上所举目前常用的震源时间模型下矩形剪切位错面一维单侧移动源的远场体波振幅谱可知，振幅谱曲线的总体形态都是在低频部分趋于低频水平 $U(0)$；在高频部分，曲线峰值的渐近线随频率增大而衰减，衰减的快慢程度因震源时间模型不同而异. 兰德尔 (Randall)[86] 曾论述了这种总体形态的普遍性. 对于那些圆盘形剪切位错面震源，根据布龙 (Brune)[92]、陈运泰[51] 等人的工作，其振幅谱总体形态也和上述情况相同. 将以上所述理论振幅谱总体形态和观测振幅谱作对比，基本上也是相符的[不过也有例外，例如林德 (Linde) 和赛克斯 (Sacks)[96] 所发表的南美深震的振幅谱曲线在低频部分就不是近似平坦的，而是有一峰值. 这也许说明某些地震的实际时间过程可能更复杂些].

根据安芸敬一、金森博雄[88]和兰德尔等人的研究，采用使振幅谱的高频部分的峰值在 $\lg|U(\omega)|-\lg\omega$ 平面上以 $K=-2$ 的直线为渐近线而衰减的震源时间模型，比起采用其它模型 (如 $K=-1$, $K=-3$) 来，在解释面波震级 M_s 与体波震级 m 之间的统计关系以及震级与地震波能量、地震矩、地震个数等一些别的经验公式时，可能都更为合理、方便. 对于这一类 $K=-2$ 的模型，可以把其振幅谱概括成

$$|U(\omega)|=U(0)F(x). \tag{8}$$

式中

$$U(0)=\frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3R}$$

$x=\dfrac{\omega}{\omega_c}$, ω_c 是拐角频率.

$F(x)$ 是谱型函数，它的性质是：

当 $x\to 0$ 时，$F(x)\to 1$；

当 x 足够大时，$x^2F(x)\to 1$.

显然，满足以上两个性质的 $F(x)$ 的具体形式是多种多样的.

根据体波振幅谱的总体形态，可以得到用地震波资料求地震矩 m_0 的方法为：

将地震图上体波振幅谱扣除仪器、地壳、地球内部介质的振幅响应得到观测振幅谱，量取其低频水平 $U(0)$，计算 $|\mathscr{R}|$，则

$$m_0=\frac{4\pi\rho c^3R}{|\mathscr{R}|}U(0) \tag{9}$$

可以算出.

二、 拐角频率和震源尺度

由观测振幅谱曲线的高低频渐近线的交点可以量出相应的拐角频率 ω_c. 在矩形剪切位错面一维单侧移动震源情况下，ω_c 是断层长度 L、破裂速度 v、波的传播速度 c、θ 角以及震源时间函数里的一些特征量的函数. 例如，当震源时间过程为单位阶跃函数 ((6)

式)时，由 (7) 式可得

$$\omega_c = \frac{1}{\frac{L}{2}\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\theta}{c}\right)}$$

即拐角频率和 L、c、v、θ 都有关系.

我们希望能在实际工作中用拐角频率来估算震源尺度．为了能有效地简便地进行这项工作而又不失一定的正确性，需要在理论上探讨拐角频率与震源尺度之间的更一般性的关系式．为此，考虑震源是圆盘形剪切位错面，圆盘面的半径为 r_0. 当震源深度比较大或地震震级比较小时，震源错动面的长宽相近，用圆盘形位错面来模拟它们是比较合理的． 对于那些长 (L) 宽 (W) 相差很大的浅源大地震来说，如果我们引入

$$r_0 = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{LW}{\pi}},$$

用这样一个半径为 r_0 的等效圆盘位错面来粗略地模拟它们，也是一种可行的近似．这时 r_0 是等效震源尺度．因此，考虑圆盘形位错面是有实际意义的． 设破裂由圆盘中心向四周传播．圆盘面位错源产生的地震波远场位移的频谱可以表示为

$$\begin{aligned} U_P(\omega) &= \frac{m_0}{4\pi\rho R\alpha^3} \mathscr{R}_P e^{-i\frac{\omega}{\alpha}R} F_\alpha(\omega), \\ U_S(\omega) &= \frac{m_0}{4\pi\rho R\beta^3} \mathscr{R}_S e^{-i\frac{\omega}{\beta}R} F_\beta(\omega). \end{aligned} \tag{10}$$

这儿，$\mathscr{R}_P$、$\mathscr{R}_S$ 的意义同前，即

$$\mathscr{R}_P = \{\sin 2\theta\cos\varphi,\ 0,\ 0\},$$
$$\mathscr{R}_S = \{0,\ \cos 2\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi\}.$$

而 $F_\alpha(\omega)$、$F_\beta(\omega)$ 可以统一写作

$$F_c(\omega) = \frac{1}{S}\iint_\Sigma \frac{i\omega\Delta u(\Omega)G(\omega)}{\Delta u} e^{-i\frac{\omega}{v}\xi + i\frac{\omega}{c}\xi\sin\theta\cos(\psi-\varphi)} d\Sigma. \tag{11}$$

式中

① S 为圆盘位错面面积；

② (ξ, ψ) 为圆盘面上任一 Ω 点的位错元 $d\Sigma$ 的平面极坐标；

③ $\Delta u(\Omega)$ 是圆盘位错面上的静力错距，其表示式为[89]:

$$\Delta u(\Omega) = u_m\left[1 - \left(\frac{\xi}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\xi \leqslant r_0)$$

这里 u_m 是最大错距.

④ Δu 仍用来表示整个位错面上的平均错距．由 $\Delta u(\Omega)$ 的上述表示式，可得到 Δu 为

$$\Delta u = \frac{2}{3}u_m.$$

⑤ $G(\omega)$ 是震源时间函数 $g(t)$ 的频谱． 若取 $g(t)$ 为单位阶跃函数，则前面已经给出其频谱为

$$G(\omega) = \frac{1}{i\omega}.$$

⑥ v 是破裂由圆盘面中心向四周传播的速度. 所以

$$F_c(\omega)=\frac{3}{2S}\int_0^{r_0}d\xi\int_0^{2\pi}\xi\left[1-\left(\frac{\xi}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\omega}{v}\xi+i\frac{\omega}{c}\xi\sin\theta\cos(\phi-\varphi)}d\phi \tag{12}$$

陈运泰等人[31]给出了这个积分的结果,进而给出了 $U(\omega)$ 的复杂的表示式,讨论了 $U_P(\omega)$ 或 $U_S(\omega)$ 的高频和低频渐近行为,并给出了两条渐近线的交点所对应的拐角频率 ω_c,

$$\omega_c=\begin{cases}\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\dfrac{v}{r_0} & (0\leqslant\theta\leqslant\theta_c)\\[2ex] \dfrac{3^{\frac{1}{2}}c}{r_0\sin\theta\cdot 2^{\frac{1}{4}}}\left[1+\left(\dfrac{3c}{2v\sin\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} & (\theta_c\leqslant\theta\leqslant\pi)\end{cases} \tag{13}$$

这儿 θ_c 是使下面等式成立时的一个很小的角度:

$$\omega_c=\frac{3^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\frac{v}{r_0}=\frac{3^{\frac{1}{2}}c}{r_0\sin\theta_c\cdot 2^{\frac{1}{4}}}\left[1+\left(\frac{3c}{2v\sin\theta_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}.$$

(严格来说,在 $0<\theta<\theta_c$ 时,还有另外一个频率较高的拐角频率,但一般观测不到.)

由 (13) 式可见,在 $\theta\geqslant\theta_c$ 的情况下,拐角频率也和 r_0、c、v、θ 都有关系.

然后,考虑同时破裂即破裂速度 v 无限大的情况. 当所论及的地震波的周期比破裂过程所耗费的时间长得多时,这种考虑是合理的. 陈运泰等人也给出了这时的 $U(\omega)$ 表示式,而 ω_c 的表示式为

$$\omega_c=\frac{3^{\frac{1}{2}}c}{2^{\frac{1}{4}}r_0\sin\theta}. \tag{14}$$

最后,考虑它在震源球面上的平均值容易算得该值为

$$\langle\omega_c\rangle=\frac{3^{\frac{1}{2}}\pi}{2^{\frac{5}{4}}}\cdot\frac{c}{r_0}\simeq 2.29\frac{c}{r_0}. \tag{15}$$

同时,由 (14) 或 (15) 式易知

$$\frac{\omega_{cP}}{\omega_{cS}}=\frac{\alpha}{\beta}. \tag{16}$$

到此,通过引进圆盘形剪切位错面震源模型、考虑同时破裂及取平均值的办法,得到了拐角频率与震源尺度之间的简单明了的近似关系式. 测定观测振幅谱的拐角频率,震源尺度可以方便地估计出来:

$$r_0\simeq 2.29\frac{\alpha}{\omega_{cP}}=2.29\frac{\beta}{\omega_{cS}}. \tag{17}$$

而且,由 (16) 式,用纵、横波的拐角频率的比值可以得到震源处纵、横波的速度之比. 目前,这个波速比值随时间的变化的情况,在地震预报实践中正受到密切注意. 这将在下一章叙述.

布龙[92]曾经假设震源是半径为 r_0 的圆盘形位错面,在剪应力 $\sigma=\sigma H(t)$ 作用下以无限大速度突然发生错动. 他用半经验半理论方法给出了这个震源所激发的横波的近场和远场位移及其频谱的表示式. 然后令在高频端远场地震波能量与近场地震波能量守恒,在低频端远场振幅谱趋于低频水平 $U(0)$,得到 S 波的拐角频率为

$$\omega_{cS}\simeq 2.34\frac{\beta}{r_0}. \tag{18}$$

他的结果与上面所述情况在特例 $v\to\infty$ 时的结果(17)式相同，仅常数略有微小差异．但(17)式不仅对 S 波而且对 P 波也成立．

在后面，我们还将提到，根据兰德尔在文献［86］中所使用的方法，对于圆盘形位错面，只要振幅谱高频部分的渐近线按 $\frac{1}{\omega^2}$ 衰减而不问震源时间模型 $g(t)$ 的细节（即只要振幅谱可以写作（8）式），可以得到

$$\omega_c \simeq 2.58\frac{c}{r_0}. \tag{19}$$

(17)、(18)、(19)式都可用来估计震源尺度 r_0． 三个公式中的 ω_c 都要从不同方位的台站上多测几个取平均．

三、应力降

若地震断层错动之前初始应力为 σ_0，错动之后的终止应力为 σ_1，断层面上的摩擦应力为 σ_f，则一般定义

① 应力降 $$\Delta\sigma = \sigma_0 - \sigma_1, \tag{20}$$

② 平均应力 $$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}, \tag{21}$$

③ 有效应力 $$\sigma_{e0} = \sigma_0 - \sigma_f, \tag{22}$$

④ 分数应力降 $$\xi = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 1-\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 1-\gamma, \quad \left(\gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) \tag{23}$$

⑤ 释放应变能 $$\Delta W = S\bar{\sigma}\Delta u, \tag{24}$$

（S. 断层面面积，Δu. 平均错距）

⑥ 地震波效率 $$\eta = \frac{E}{\Delta W} = \frac{S\bar{\sigma}\Delta u - S\sigma_f\Delta u}{S\bar{\sigma}\Delta u} = \frac{\bar{\sigma}-\sigma_f}{\bar{\sigma}}, \tag{25}$$

（E. 地震波能量）

⑦ 表观应力(视应力) $$\sigma_a = \eta\bar{\sigma} = \bar{\sigma}-\sigma_f = \frac{\sigma_0+\sigma_1-2\sigma_f}{2}, \tag{26}$$

由（26）式可以看出，如果 $\sigma_1 < \sigma_f$，则有

$$\sigma_a = \frac{\sigma_0+\sigma_1-2\sigma_f}{2} < \frac{\sigma_0+\sigma_1-2\sigma_1}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2}. \tag{27}$$

但金森博雄等人指出[88]，一些大地震（$M_S \geqslant 6$）的观测资料表明，终止应力 σ_1 和摩擦应力 σ_f 大致相同，于是

$$\eta = \frac{\bar{\sigma}-\sigma_f}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}-\sigma_1}{\bar{\sigma}} = \frac{\xi}{2-\xi} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \tag{28}$$

$$\sigma_a = \eta\bar{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{2}. \tag{29}$$

这时，地震波能量

$$E = \eta\Delta W = \eta\bar{\sigma}\Delta uS = \frac{\Delta\sigma}{2}\Delta uS = \frac{\Delta\sigma}{2}\frac{m_0}{\mu}. \tag{30}$$

在 § 13.1 中已介绍了 E 在时间域中的求法，后面还将介绍 E 在频率域中的求法．总之，E 是可以得到的．m_0 的求法也已叙述过了．因此，应力降可以估计出来：

$$\Delta\sigma = \frac{2\mu E}{m_0} \tag{31}$$

另外，根据凯里斯-博罗克 (Кейлис-Борок)[89] 对前面讨论过的那种半径为 r_0 的圆盘形剪切位错面震源给出的应力降公式，可以求出 $\Delta\sigma$：

$$\Delta\sigma = \frac{7\pi}{16}\mu\frac{\Delta u}{r_0}. \tag{32}$$

式中 Δu 是平均错距．利用关系式

$$m_0 = \mu\Delta u S,$$

$$S = \pi r_0^2.$$

上式也常写作

$$\Delta\sigma = \frac{7}{16}\frac{m_0}{r_0^3}. \tag{32'}$$

r_0 的求法也已在前面交待过了．

四、应 变 能

地震时断层错动所释放的应变能按 (24) 式为

$$\Delta W = S\bar{\sigma}\Delta u.$$

而由 (29) 式得到平均应力 $\bar{\sigma}$ 的表示式可以写作

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{2\eta} = \frac{\Delta\sigma}{2}\frac{1+\gamma}{1-\gamma},$$

因此得到

$$\Delta W = S\cdot\Delta u\frac{\Delta\sigma}{2}\frac{1+\gamma}{1-\gamma}. \tag{33}$$

将应力降 $\Delta\sigma$ 的表示式 (32) 或 (32′) 代入上式即可得到圆盘形剪切位错面震源所释放的应变能为

$$\Delta W = \frac{7\pi^2}{32}\mu(\Delta u)^2 r_0\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \tag{34}$$

或

$$\Delta W = \frac{7}{32}\cdot\frac{m_0^2}{\mu r_0^3}\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \tag{35}$$

当 $\gamma = 0$，即终止应力 $\sigma_1 = 0$，应力完全释放完时，以上各式中的 $\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 一项为 1.

五、地震波能量

设圆盘形剪切位错面震源的远场体波振幅谱在高频端的渐近行为是按 $\frac{1}{\omega^2}$ 衰减，$|U(\omega)|$ 可以写成 (8) 式：

$$|U(\omega)| = U(0)F(x).$$

又设

$$r_0 = K\frac{\alpha}{\omega_{cP}} = K\frac{\beta}{\omega_{cS}} \tag{36}$$

成立。则可以得到地震波能量在频率域的估算公式，并能从地震波能量的角度求得 K 值。

设 $\varepsilon_{P或S}$ 为单位面积上通过的地震波 P 或 S 的能量，根据 Paseverl 定理，

$$\varepsilon_{P或S} = c\rho\int_{-\infty}^{+\infty}|\dot{u}(t)|^2dt = c\rho\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|U(\omega)|^2d\omega \tag{37}$$

以 (8) 式代入上式，并注意

$$x = \frac{\omega}{\omega_c},$$

得到

$$\varepsilon_{P或S} = \frac{c\rho U^2(0)\omega_c^3}{\pi}\int_0^{\infty}x^2F^2(x)dx. \tag{38}$$

全部 P 波或 S 波的能量是 $\varepsilon_{P或S}$ 在震源球面上的积分，即

$$E_{P或S} = \iint_{震源球面}\varepsilon_{P或S}dS.$$

将 (38) 式代入上式，并注意

$$U(0) = \frac{m_0|\mathscr{R}|}{4\pi\rho c^3R},$$

得到

$$\begin{aligned}E_{P或S} &= \frac{m_0^2\omega_c^3}{16\pi^3\rho c^5R^2}\iint_{震源球面}\mathscr{R}^2dS\int_0^{\infty}x^2F^2(x)dx\\ &= \frac{m_0^2\omega_c^3}{16\pi^3\rho c^5R^2}\cdot 4\pi R^2\langle\mathscr{R}^2\rangle\int_0^{\infty}x^2F^2(x)dx\\ &= \frac{m_0^2\omega_c^3}{4\pi^2\rho c^5}\langle\mathscr{R}^2\rangle\int_0^{\infty}x^2F^2(x)dx\end{aligned} \tag{39}$$

式中

$$\langle\mathscr{R}^2\rangle = \frac{1}{4\pi R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}R^2\sin\theta\,\mathscr{R}^2d\theta,$$

是 $\mathscr{R}^2$ 在震源球面上的均值。因此，由 (39) 式可以得出 S 波、P 波的能量之比为

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{\omega_{cS}^3}{\omega_{cP}^3}\cdot\frac{\alpha^5}{\beta^5}\cdot\frac{\langle\mathscr{R}_S^2\rangle}{\langle\mathscr{R}_P^2\rangle}.$$

而根据 (36) 式，可知

$$\frac{\omega_{cS}}{\omega_{cP}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

代入上式得到

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{\langle\mathscr{R}_S^2\rangle}{\langle\mathscr{R}_P^2\rangle}.$$

对于泊松体，则有

$$\frac{E_S}{E_P} = 3\frac{\langle\mathscr{R}_S^2\rangle}{\langle\mathscr{R}_P^2\rangle}. \tag{40}$$

而

$$\langle \mathscr{R}_P^2 \rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \sin^2 2\theta \cos^2\varphi d\theta = \frac{4}{15},$$

$$\langle \mathscr{R}_S^2 \rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta(\cos^2 2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi) d\theta = \frac{2}{5}.$$

将此数值代入 (40) 式，于是有

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{9}{2}.$$

所以地震波总能量为

$$E = E_S + E_P = \frac{11}{9} E_S = \frac{11}{2} E_P. \tag{41}$$

将

$$\langle \mathscr{R}_S^2 \rangle = \frac{2}{5}, \quad \langle \mathscr{R}_P^2 \rangle = \frac{4}{15}$$

分别代入 (39) 式，并考虑到 Randall 曾论述过

$$\int_0^{\infty} x^2 F^2(x) dx \simeq 1,$$

得到 E_S 和 E_P 的值近似为

$$E_S \simeq \frac{2}{5} \cdot \frac{m_0^2 \omega_{cS}^3}{4\pi^2 \rho \beta^5}$$

$$E_P \simeq \frac{4}{15} \cdot \frac{m_0^2 \omega_{cP}^3}{4\pi^2 \rho \alpha^5}$$

代入 (41) 式得到地震波总能量为

$$E \simeq \frac{11}{90} \frac{m_0^2 \omega_{cS}^3}{\pi^2 \rho \beta^5} = \frac{44\pi m_0^2 f_{cS}^3}{45 \rho \beta^5} \tag{42}$$

或

$$E \simeq \frac{11}{30} \frac{m_0^2 \omega_{cP}^3}{\pi^2 \rho \alpha^5} = \frac{44}{15} \frac{\pi m_0^2 f_{cP}^3}{\rho \alpha^5}.$$

以地震矩和 P 波或 S 波的拐角频率的观测值代入上两式就可以粗估地震波能量，这是在频率域进行的.

前面已经提到过，如果终止应力等于摩擦应力，那么地震波能量

$$E = \frac{\Delta\sigma}{2} \frac{m_0}{\mu}.$$

它应该与上述用地震波振幅谱估算的能量相等，即

$$\frac{\Delta\sigma}{2} \frac{m_0}{\mu} = \frac{44\pi m_0^2 f_{cS}^3}{45 \rho \beta^5}.$$

以

$$m_0 = \frac{16}{7} \Delta\sigma r_0^3, \quad 2\pi f_{cS} = K \frac{\beta}{r_0}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

代入上式，得到

$$K^3 = \frac{45 \times 7 \times \pi^2}{44 \times 4} \simeq 17.3$$

因此

$$K \simeq 2.58.$$

即

$$\omega_c = 2.58 \frac{c}{r_0}. \tag{43}$$

K 这个数值在前面 (19) 式已经提到过. 可以认为 (43) 式是一个不依赖于震源时间模型细节而成立的近似关系式.

§ 15.5 用其它资料测定震源参数

除了前面介绍的是用地震波资料求震源机制的方法之外，还可以使用其它资料来求震源的一些参数.

一、使用地震等震线资料

在破裂传播方向上地震波振幅加强，在相反方向上减弱，这种调制作用对 S 波尤其明显. 辐射图样的包线呈椭圆形(S 与 P 叠加起来的包线亦然). 而造成地面建筑物破坏主要是 S 波的作用，因此，浅源大地震烈度的最内等震线一般也常呈椭圆形，而且其长轴应与地震断层面走向或破裂方位线大体一致，依此可以判断断层面 (图 15.38).

我国拥有丰富的历史地震资料，根据有关地震破坏影响情况的记载，已经画出了等震线. 除用最内等震线判断断层面之外，如何进一步利用这些等震线来求得更多的震源参数是值得研究的. 在这方面有人探索把烈度和断层面上地震波辐射能量联系起来[23]，或是把烈度与地震加速度联系起来[12]，从而把烈度与地震断层面的长度、宽度、倾角、破裂速度、平均错距等震源参数联系起来，这样就可以通过改变这些参数来计算出理论等震线图，使之与实际等震线图相符，最后确定震源参数.

二、使用地震地表断层和地形变测量资料

大地震之后，直接测量出露到地表的地震断裂的走向，就足以判断 P 波初动解的两个节面中哪个是断层面(图 15.38). 而且还可以直接测量地表断裂的长度、走向、倾向、倾角、平均错距 (Δu)、最大错距. 然后可以再参考震源深度来估计断层面宽度及断层面面积 S. 于是地震矩可由 $m_0 = \mu \Delta u S$ 估算出. 至于应力降，一般常选用以下两个公式中的一个来估计:

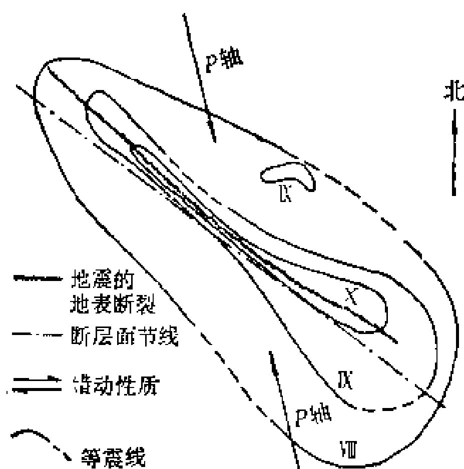


图 15.38
(引自国家地震局资料)

① 对于长为 $2l$、宽为 $2w$ 的走向滑动断层，则有[90]

$$\Delta\sigma = \frac{2}{\pi} \mu \frac{\Delta u}{\Delta w}. \tag{1}$$

② 对于长为 $2l$、宽为 $2w$ 的倾向滑动断层，则有[91]

$$\Delta\sigma = \frac{4(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \cdot \mu \frac{\Delta u}{\Delta w}. \tag{2}$$

(λ. 拉梅常数)

而将 $\Delta\sigma$ 的表示式代入 § 15.4 公式 (33)，就得到以上两种断层滑动时所释放的应变能分别为

$$\Delta W = \frac{4}{\pi} \mu l (\Delta u)^2 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}, \quad \text{(对应于前一种情况,走向滑动)}. \tag{3}$$

$$\Delta W = \frac{8}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \mu l (\Delta u)^2 \frac{1+\gamma}{1-\gamma}. \quad \text{(对应于后一种情况,倾向滑动)}. \tag{4}$$

当应力完全释放完,即终止应力 $\sigma_1 = 0$ 时, $\gamma = 0$, 以上式中的 $\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 一项为 1.

不过,一般只有 6 级以上浅源大地震才有地表断裂.我国浅源大地震的地表断裂长度 L 和地震震级间的统计关系[24]为 $M = 3.3 + 2.1\lg L$ (L. 公里).

利用地震断层错动引起的地面永久形变与断层面参数之间的关系式可以计算永久形变的理论分布图，拿它与大地震前后通过大地测量所得出的形变分布图作比较，也可以确定断层的各个参数[25].

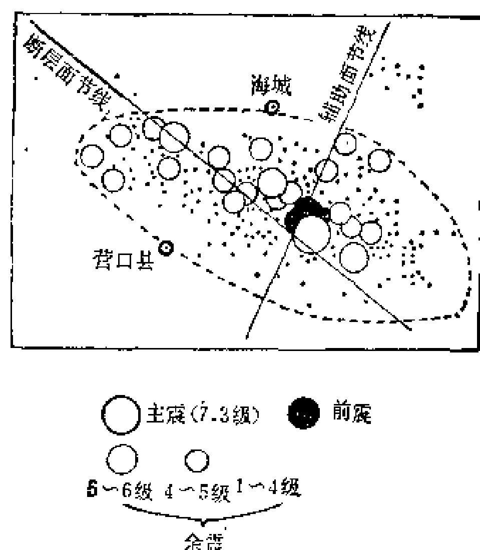


图 15.39　1975.2.4 海城大震 (7.3 级) 的前震、余震分布

三、使用前震和余震空间分布资料

大地震的断层面附近在临震前应力高度集中，某些薄弱地点发生局部错动，产生些小地震，即前震. 大震之后应力调整，产生许多余震. 因此，前震和余震基本上是靠近断层面的. 其震中分布大致呈椭圆形. 对于浅源大地震来说，该椭圆的长轴一般与断层面走向一致. 由此可以判断断层面. 图 15.39 表示出了我国 1975 年海城 7.3 级地震的前震、余震震中分布区长轴与断层面走向相近的情况.

此外，在国外，对于使用海啸资料来研究震源也很注意.

第十六章 地 震 预 报

大地震伴随着强烈的地面变形和断层错动，可以在一瞬间内给人民带来巨大的灾害．所以，研究地震预报就成为关系到国民经济、国防建设、人民生命财产的重要问题．

地震发生于地下，直接观察比较困难．而且，大地震发生的频度又比较小，实践机会不多．因此，地震预报是比较困难的．但是，大地震的发生并非偶然，而是有一个孕育、发展、发生过程．研究这个过程，认识它发生的内因、外因，人们最终能准确预报地震的日子一定会到来的．

地震预报是一个综合性的研究课题．目前国内外地震工作者比较重视的地震预报观测手段有以下几个方面：

1. 以震报震

这是从总结、研究地震本身的活动规律入手来预报地震的各种试验性方法的总称．大震活动在时间、地点方面的统计规律，是长期预报的重要依据之一．大震之前，小地震在时间、空间、强度方面的异常变化，小震震源参数的异常变化、波速比的异常变化，作为前兆现象而在中短期和临震预报中起重要作用． 1975 年海城 7.3 级大震之前，原来很少有小地震活动的辽南半岛，从 2 月 1 日起却在后来的主震震中附近突然出现许多地震，大震前的大约 3 天时间内，就一共发生中小地震 527 次．当时能成功地发出临震预报，这种异常现象是重要的根据之一．

2. 地震地质

它是从地质力学的观点来推断强震发生的地点、强度、时间，和研究地震的成因．它主要用在中长期预报．在长期预报的一个方面——烈度区划中，地震地质起着重要的作用．

3. 地应力测量

它通过地下应力的测量试图找出地应力的变化与地震的关系．在地震危险区钻深井，然后放应力测量仪器支撑在井壁上，这就是所谓探头．放入三个探头支撑在三个不同的方向上．当地下应力有变化时，井壁就会或多或少有所变形，而地应力仪就会把这些变形转变为电信号输送出来．通过三个方向的读数变化可以推断出应力变化场的主应力方向．当测量仪器的弹性模量远超过周围岩石的弹性模量时，井壁变形很小，测得的直接是应力的变化．当岩石的弹性模量远超过仪器之时，测得的是井壁的变形，要得到应力还要通过一定的换算．

在井筒中放入仪器之前地下已有地应力场存在，仪器测量的是在这原有应力场的基础上的变化场．原有的应力场，即应力场的绝对值可以通过应力解除的办法来得到．也就是在井筒中安装好仪器，开始记录后在原有的井外面再打一个井，与原井同心，而两井之间保留一部分岩石．这样原有井所受的地应力就解除了．通过仪器读数的变化可以得

到地应力解除的数值，并相应算得解除的主应力方向和大小，这就是原有的地应力场的主应力.

4. 大地测量

地震前地壳已有长时期的变形的例子已十分多，在震前这种变形有时会激烈地增加. 1923 年日本关东大地震前，一个叫三浦半岛的地方就发生了明显的变化，1900 年以前这个半岛已不断上升，其后又急速下沉，到 1915 年半岛已比原有位置下降了三寸多，当半岛再次回升时发生了大地震. 震时半岛猛升 4 尺左右. 再如 1668 年山东郯城地震，据历史记载极震区东侧在大震前长期不断上升，原来是海中的一个小岛后来竟与陆地连成一片，地震时极震区东侧猛烈上升，乃至赣榆县东边的海水"退舍三十里". 在沿海地区，地壳的上升与下降可以通过潮汐观测站的数值得到当地海平面值的变化，扣去全球性海平面变化的因素就是当地地壳垂直方向的升降变化. 在内陆可以精密水准测量的方法来进行. 用三角测量还能得到地壳在水平方向的变形. 大地测量的手段有的是在地震区进行一等精密水准测量，每隔一年或数年重复一次，这是中长期预报的一个手段. 有的是固定在某一条测线或一个三角网，仪器不移动而每天定时测量，通常这种测量是横跨在主断层的两侧. 这种方法用于短期预报.

5. 地倾斜

地倾斜也是测量地壳形变的一个方面. 由于地壳变形，地面必然会有微小的倾斜变化. 用精密的倾斜仪可以把这些倾斜变化记录下来. 地倾斜受外界干扰的影响比较大，温度的年变化、日变化、气压的变化等等都会引起大地的倾斜变化. 因此仪器安置条件要求比较严格. 同时，还要通过资料处理来尽可能地排除其他因素的干扰.

6. 水文测量

地震前地下水文情况的变化是短期预报的重要手段. 如震前大面积井水水位上升和下降(排除下雨、干旱、工农业使用地下水等因素后)，井水变浑、冒泡，泉水量突然增加和减少等等现象，常有发生. 1966 年河北邢台地区 3 月 8 日 6.8 级地震前震中区大面积水位上升而外围地区水位下降. 1971 年 3 月 24 日青海都兰县发生 6.8 级地震，附近的托索湖水文站记录到水位连续下降，15 天内降了 37 厘米. 震后 6 天内水位上升了 81 厘米. 这可能与地倾斜或地下水补给量的变化有关.

美国丹佛地方一军工厂向深井压入放射性废水后，在地下就发生了许多小地震活动，停止压水后地震活动也减弱了，说明地下水在震源的发震过程中起着十分重要的作用. 有人认为由于压入水而使岩层中孔隙流体压力增加而减小了断层面的正应力，从而减小了断层面的摩擦阻力，使剪切错动更易发生. 有人建议在断层上按一定距离打入若干深井，每三个井组成一组，其中两端两个抽水以阻止地震向周围扩展，而中间一井压水以激发小地震，按区段释放应变能量以阻止大地震的发生.

7. 水化学

地下水中溶解了各种气体及其他化学成份，水化学的方法就是研究溶解于地下水的

这些化学成份的变化与地震之间的关系．发现氡、氟、亚硝酸根，水的导电性能等等在震前都有反映．氡的容量作为前兆手段用得最普遍，河北大清河台的氡含量记录曲线，在1970年丰南5.2级地震前出现过正异常．

8．地磁

研究地磁场的变化与地震的关系是地震预报的一个重要手段．发现地磁场异常变化区与地震活动区有某些相关性．据报道，有些大震前磁偏角可能有异常变化．压磁效应、热磁效应等方面的研究也受到重视．

9．地电

地壳中自然电场的测量、地下电阻率变化的测量目前都是地震预报手段．国内外不少资料提到大震前电阻率有异常变化．海城7.3级地震前，发现土地电有脉动现象．

在使用地电手段中要注意排除气象条件因素的干扰．有人认为地下电阻率、自然电场的变化与震前地下水文情况的变化即岩石中水份的析出和吸收有关．

10．重力

重力场的测量也是地震前兆的手段之一．一种是用流动的仪器定期观测区域性重力场分布情况，另一种是在固定的台站上作重力的连续记录，得到的观察资料要作固体潮汐、温度变化、重力仪零点漂移等方面的校正．根据5次震例发现，在大地震前若干天内，固定台站的重力值有持续增大或减小的趋势，开始反映的时间，递增总幅值与震级和震中距有关．如1969年7月18日渤海地震(7.4级)北京台从地震前10天开始重力开始递增，9天内重力值上升720微伽．1969年8月12日日本8.0级地震北京台重力值4天前开始在4天内共增加320微伽．地震后逐渐恢复原状．而1970年12月3日宁夏西吉5.7级地震天水重力台重力值从11月初开始以每天40微伽的速率减小，一个月内共减小800微伽，地震后虽略有恢复，但总的重力基值仍有系统的减小．

11．日月引力的诱发作用

人们发现不少地区地震的主震或强余震都发生在朔望期，1966年3月8日和3月22日的邢台6.8级和7.2级地震，1967年3月27日河间地震等等都在朔望期，1971年2月9日美国洛杉矶6.5级地震发生时太阳、地球、月亮三者正好完全在一条直线上．可能由于日月引力而在地球上引起的固体潮汐的作用可能使原有地震危险区的岩石中应力进一步增加而诱发了地震，因而朔望期的地震危险性特别大．

12．地球自转速度的变化与地震的关系

当地球自转速度变化时，会使地球内部应力重新分布；同时，地壳与地幔的物质的刚性系数并不一样，从而使应力进一步集中．这种影响，如果正好和正在孕育，并即将要发生地震的地方的构造应力方向一致时，就有可能触发地震．

地球自转速度变化的原因及自转速度的变化与大地构造、地震的关系，目前仍是重要的研究课题．

13. 地极移动与地震

地球自转轴的位置相对于地球本体并不是固定不变的，观测表明，极点(北极或南极)在地球表面上是不断移动的，这就是所谓“地极移动”. 地极的移动可引起地球表面各点的离心力加速度的变化，而导致某些地区岩石内应力的积累或应力的松弛，其中使应力积累的地区可能使原有应力增加超过临界值而发生地震. 因此系统地研究地极移动及其与地震的关系应是地震预报的一个课题.

14. 动物异常

通过地震区广大群众的观测，发现地震前家畜家禽及老鼠等在临震前都有异常活动. 在这方面一个比较典型的例子是 1969 年 7 月 18 日渤海地震 (7.4 级) 前，除了 10 天内海上鲨鱼，海鸥等有异常现象外，天津动物园的工人在地震当天上午发现东北虎、大熊猫、牦牛、鹿、天鹅等动物有精神不振、呆痴、惊恐等现象，乃至天鹅双脚朝天仰卧不起，而乌龟、蚂蝗、泥鳅等则在震前五个多小时在水中翻滚、游动不停. 动物园于当天上午十一时向天津地震队提出了预报意见，而下午十三时二十四分渤海发生 7.4 级地震.

15. 气象异常和震前发光

大震之前气象的异常现象也受到了人们的重视. 据统计，我国近百年以来和更早期的大地震之前一年至三年半左右的时间，往往在震中区曾发生过特大干旱. 临震之前，有些震中区的气温、气压、降水量等也有很大异常. 临震前天空发光的现象曾有报道. 这些都是值得注意和研究的重要现象.

本章仅仅简略介绍用地震活动性、地震统计、地震波速异常等以震报震方法研究地震预报方面的一些主要情况. 应当说明，这些方法如同其它预报手段一样，都有待进一步研究，检验和修正.

§16.1 地震活动性

研究地震在时间、空间、强度方面的活动规律，以此预报地震，是以震报震的重要方法之一. 当统计资料是中、强地震时，注意力放在寻找中、强地震的时空变化规律，作出中、长期预报. 当统计资料是强震之前的小震资料时，则力求找到临近大震前的小震活动在时、空、强等方面的异常标志，作出短期预报. 对于大震后的强余震的预报问题，人们也很重视.

一、常见的地震统计量和图

在研究地震活动性时，常常用到以下一些统计量和统计图.

1. 震中分布图

震中分布图和震中剖面图直观地表明地震在地球上的分布情况；结合地质构造，可找出地震活动区. 长期监视一个地区的地震分布的变化，也能为预报大震提供线索(参见图

16.9、10).

2. N-t 图

N-t 图研究地震频率的时间变化. N是所取单位时间间隔内在一地区发生地震的次数,叫做地震频度; t 是时间(参见图 16.1).

3. M-t 图

M-t 图研究震级随时间的变化. 对一个大震的前震、余震和它本身作出的 M-t 图,又叫做"地震序列图"(参见图 16.8).

4. E-t 图

这是研究地震能量变化的曲线,一般叫做"能量释放曲线". E是地震释放的弹性波能量,可以以月计、以年计,也可以是累加值(图 16.2).

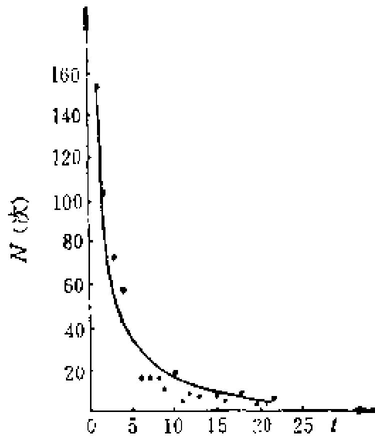


图 16.1 1973.2.6 炉霍地震序列余震次数的衰减(引自原成都地震大队资料)

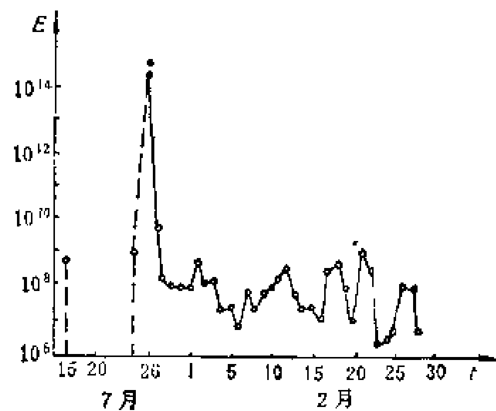


图 16.2 1969 年阳江地震能量逐日释放曲线(引自中国科学院地球物理研究所资料)

5. $\sqrt{E}$-t 图

以上述能量E的平方根 $\sqrt{E}$ 作统计量,研究它随时间的变化,称为应变释放曲线[93]. 假定E与震源体岩石释放的应变能 ΔW 成正比. 而

$$\Delta W = \frac{1}{2}\mu e^2 V$$

(μ. 弹性模量, V. 应变体积, e. 该体积内岩石的平均应变),所以

$$E = \eta\Delta W = \frac{1}{2}\mu e^2\eta V$$

式中 η 为地震波效率. 假设对于给定的震源, μ、V、η 都可视为常数,则

$$E = Ce^2, \quad \left(C = \frac{1}{2}\mu V\eta\right)$$

因此, $\sqrt{E}$ 正比于弹性应变 e.

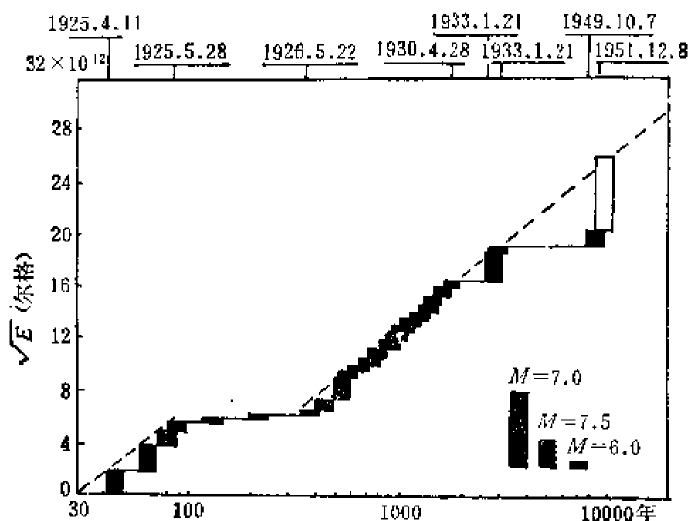


图16.3 应变释放曲线

在一个震源体中所积蓄的弹性应变一般不是一次而是几次断层错动才释放完，这就有一系列地震．取各地震的 $\sqrt{E_i}$ 之和为 $\sqrt{E}$，即

$$\sqrt{E}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{E_i},\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

绘成 $\sqrt{E}$-t 图，就是应变释放曲线．曲线的斜率是应变释放的平均速率．假定这也就是应变积累的速率，那么可以推测自上次地震发生之后已积累起了多少应变，如果马上一次释放出来，相当于多大的地震．1950 年 8 月，贝尼奥夫 (H. Benioff) 曾用此法对印度洋上发生于同一断裂上的浅源地震群进行分析，认为已积累的应变足以产生 7.6 级地震．1951 年 12 月 8 日，在那儿确实发生了一个 7.6 级地震 (图 16.3)．

6. $\sum(t)$-t 图

我们看到，N-t 图突出了小震，而 E-t 图强调了大震，它们都有一定的片面性．为克服这一矛盾，引入一个新的统计量 $\sum(t)$，

$$\sum(t)=\sum_{K}N(K)L^{K}.$$

这里，K. 能级，$N(K)$. 能级为 K 的地震个数，$\sum\limits_{K}$ 表示求和，L 是 1 与 10 之间的一个数．当 $L=1$ 时，上式成为

$$\sum(t)=\sum_{K}N(K),$$

即成 N-t 曲线．当 $L=10$ 时，则

$$\sum(t)=\sum_{K}N(K)10^{K},$$

是对地震能量求和，变成 E-t 图．究竟在 1 与 10 之间取 L 为多少才能恰当地描述地震活动性，这需要实践．目前先取 $L=4.6$，因为

$$\sum(t)=\sum_{K}N(K)4.6^{K}$$

的意义比较明确．这时，

$$\sum(t)=\sum_K N(K)4.6^K \simeq \sum_K N(K)10^{\frac{2}{3}K}.$$

而能量 $E=10^K$ 正比于 $V\varepsilon$，但

$$V\varepsilon=\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon.$$

（这里，V 是震源体积，R 是将震源当作球体时的等效半径，ε 是应变能量密度．）

所以

$$4.6^K \simeq 10^{\frac{2}{3}K} \propto \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}} R^2\varepsilon^{\frac{2}{3}} \propto R^2.$$

即

$$\sum(t)=\sum_K N(K)10^{\frac{2}{3}K}$$

与地震断层面总面积成正比．

中国科学院地球物理研究所用它对我国 15 条地震带上的强震之前的地震作统计，发现强震之前往往 $\sum(t)$ 出现峰值，而且一般峰值越高，强震震级越大．

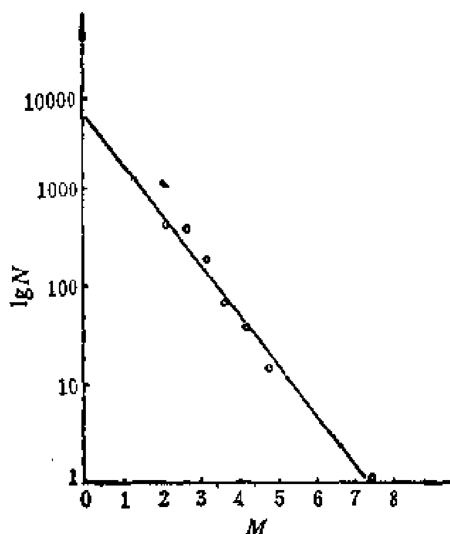


图 16.4

7. lg$N$–M 图

在一地区，取一定时间间隔，统计不同震级的频度，发现在世界各地普遍存在关系 $\lg N=a-bM$（图 16.4）．

式中 a、b 是常数，具体数值因地区而略有差异．10^a 是零级地震的次数，反映一个地区的地震活动水平．b 值反映了大小地震间的比例关系：b 值大，小震次数就相对多，大震次数相对少；b 值小，则情况相反．

二、强震活动的时空规律

研究强震的时空规律，弄清今后几年到几十年内地震活动趋势，作出中长期预报，这对国家基本建设布局很有参考价值，并且也给地震预测预防工作指出重点监视地区．人们发现强震活动有以下特点：

1. 强震活动在空间分布上具有成带性

从强震震中分布图上看到，它们具有明显的成带性．这些地震带都与大的地质断裂带相对应．一般就是根据这种分布特点和地质构造来划分地震带的．

2. 强震地点在地震带上的重复性和填空性

在地震带上，强震的发生地点有两种现象：

① 重复性：即在某地重复发生强震．不过，震级越大，在原地重复的现象似乎越少．

② 填空性：指强地震往往发生在地震带上的历史地震强震震中的空白区；同时，在强震发生前若干年，该处也往往是较小地震的空白区，而在其周围较小地震则很活跃。1975年2月海城7.3级大震之前(图16.5)和1974年4月溧阳5.5级地震之前都有这种现象，国外也曾报导过。这对预报较大地震的地点有一定意义。根据空白区出现的时间长度t和空白区长轴L，可推测大震震级M。郭增建等人由陕、甘、宁地震得出的经验公式为：

$$M = 1.55\lg t + 4.6$$

$$M = 2.1\lg L + 3.3$$

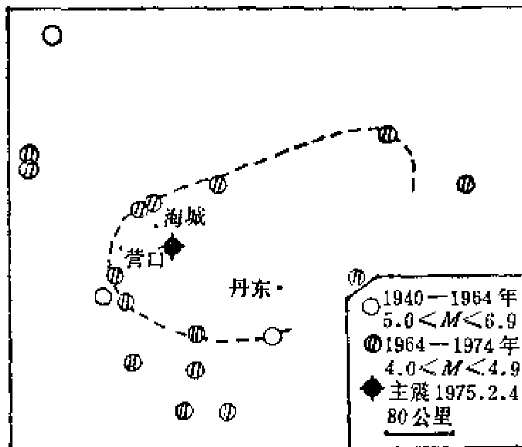


图 16.5 海城地震前的空白区[26]

式中，t以年计，L以公里计；当$M < 6.5$时，用3—4级地震形成的空白区，当$M > 6.5$时，用5级以上地震形成的空白区。

吴开统等人[26]给出以下经验公式：

$$M = 3.00\lg L - 0.07(\pm 0.33)$$

$$M = 1.55\lg S + 0.31(\pm 0.34)$$

式中空白区长轴L以公里计，空白区面积S以平方公里计。

3. 强震的迁移性

在一个地震带上，往往有在一处发生强震之后隔一定时间在另一处也发生强震的现象在历史上重复多次出现，这就是地震的迁移性。这可能是深部断裂的一部分发震释放了能量，而另一部分也随之进行应力调整而发震所造成。根据迁移规律也有可能预见地震危险区。

4. 强震活动在时间上的阶段性

一个地震带上强震活动是时起时伏的。对山西地堑地震带、燕山褶皱地震带、河北拗陷地震带、郯城—庐江断裂地震带的研究表明，基本上每个带的地震活动都可划分成几个活动期，而每个活动期又大致可分为四个阶段[14](图16.6)：

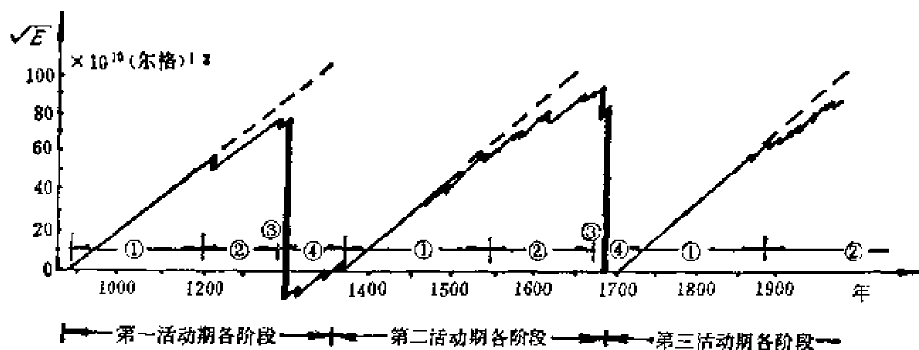


图 16.6 山西地堑地震带应变积累和释放曲线[14]

① 应变积累阶段：这时只发生少量小震，或不发生地震，是地震带的安全期；

② 大释放前的前兆活动阶段：在继续积累应变的同时，地震开始活跃，震级逐渐增大，是比较危险的时期；

③ 大释放阶段：长期积累的应变能在短时间内大量释放出来，在地震带上发生一个8—8.5级大震或发生多次7—7.5级大震，这是最危险阶段；

④ 剩余应变释放阶段：是活动期的尾声，危险期已过，活动逐渐平静下来，逐步转入下一个活动期.

如果弄清现在是处于第几个活动期的什么阶段上，对地震趋势就可作出估计.

三、临近强震前的小震活动特征

短期预报需要抓住在临近大震时的小震活动的反常变化特征．这些特征往往具有地区性，各地的预报经验并不完全相同，有的甚至相矛盾.

1. 有些大震前的小震在时间分布上有密集—平静现象

这在1966年3月邢台三次大震（$M = 6.8$、7.2、7.0）之前较明显（图16.7）．海城地震之前也有这种现象，并据此作出了成功的预报．但有些大震之前小震活动并不明显，例如1976. 7. 28唐山地震.

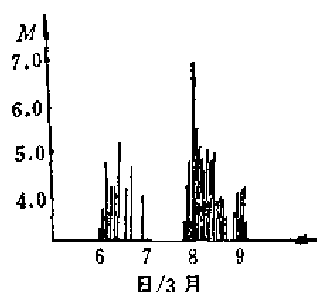


图16.7 1966年邢台地震M-t图（引自邢台地震考察队资料）

2. 大震之前，弱震b值往往下降（或其它变化）

1962年3月新丰江水库6.0级地震之前，弱震的大小地震比值b下降．邢台地震和1971年新疆乌什地震（$M = 6.3$, 6.0）之前都有此现象．1976. 7. 28唐山7.8级大震之前，从1971年下半年开始，震中区附近的弱震b值先上升，后来从1973年年底开始下降，持续到1975年底．1976年年初开始回升，7月底大震发生（图16.8）[32]．渤海、海城等大震之前也有类似情况．而且，在空间分布上，震中区附近是低b值区，外围地区的b值较高．总之，大震之前小震b值的时空变化是值得注意的.

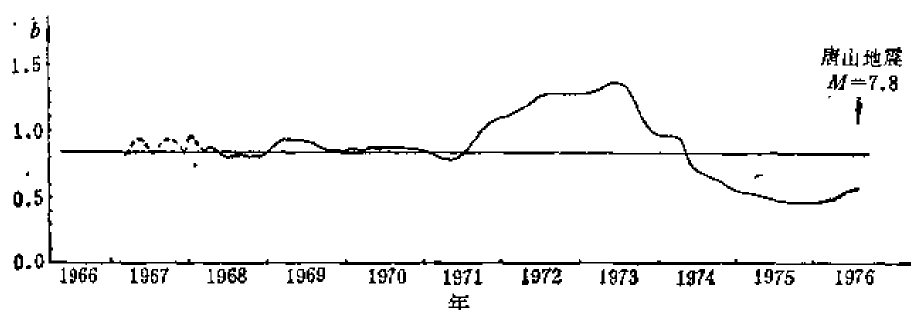


图16.8 1976.7.28.唐山7.8级大震前b值随时间的变化曲线[32]

3. 大震前小震的应变释放速率有变化

有的地区发现大震前小震的应变释放速率增加；也有的地区发现在速率增加的背景上转入降低时，大震发生.

4. 大震之前小震震源深度可能变化

例如，上述新丰江水库地震之前，小震的震源深度有加深的现象.

5. 大震之前小震在地点分布上有密集现象，大震往往发生在密集区的一端或其附近

这些小震，有的是呈条带状密集，有的是密集成团. 1972 年安徽霍山地区小震零乱地分布在大约 300 平方公里的范围内；到 1973 年 1—2 月，小震分布密集，略呈北东向；而到 3 月上旬，小震更多，而且集中在仅仅 48 平方公里的小范围内；结果 3 月 11 日在其南部边缘发生了 4.5 级地震(图 16.9). 1969 年渤海 7.4 级大震前小震分布面积也减小了(图 16.10).

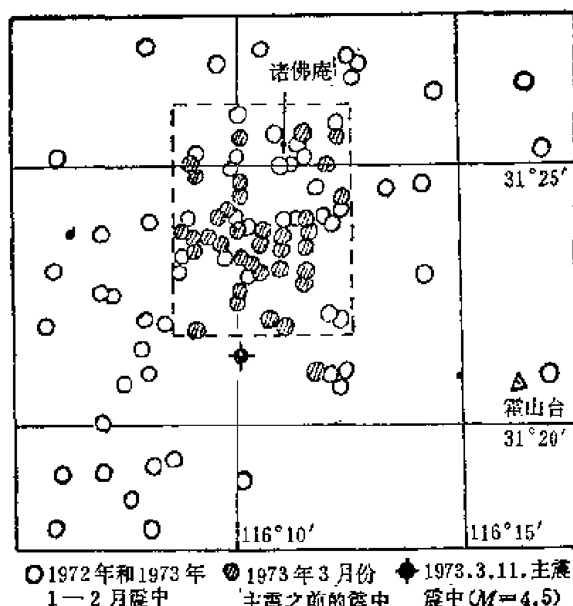


图 16.9

(引自安徽省地震队资料)

6. 大震之前小震分布往往出现空白区，大震一般发生在空白区的边缘

这从前面介绍过的图 16.5 上可以看到.

7. 大震有可能发生在震前小震迁移路线的交汇处

例如 1970 年 12 月西吉地震 ($M=5.7$) 前 4 级地震先沿北西西向构造迁移，后又沿北北东向构造迁移，主震发生在两条迁移路线的交汇处(图 16.11).

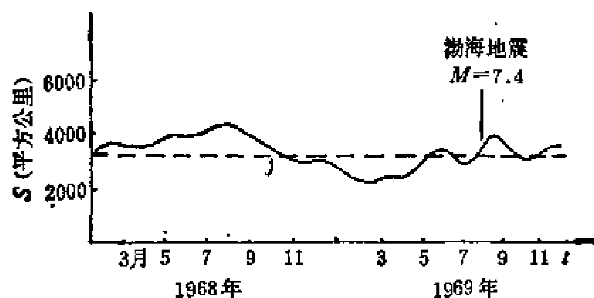


图 16.10 燕山地震带及其外围地区弱震分布面积与时间的关系

(引自北京地震队资料)

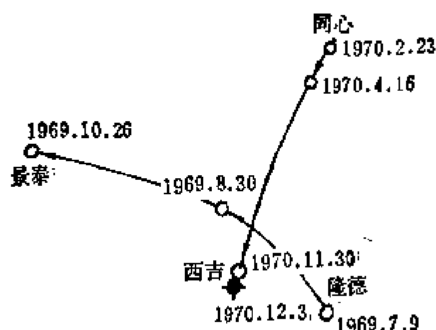


图 16.11

(引自兰州地震大队资料)

8. 有些大震的强度可由震前小震资料作出估计

利用一个地区大震的能量和震前小震总能量的经验比值

$$a=\frac{\sum E_{小}}{E_{主}},$$

可以估计在这次小震活动水平下，主震应多大.

有的地方根据小震应变释放速率增得愈高，主震震级愈大的现象，建立经验公式，预报震级．也有的用临震前应变释放速率降低的幅度和持续时间来推算大震强度．

四、强余震的预报问题

某地发生一个强震之后，还会不会再发生强烈地震，强余震有多大，有几个，这都是人们关心的问题．

1. 地震序列的类型和强震之后的地震活动趋势

一个大震源积累的应变能在不长时间内通过一系列大大小小的地震释放出来，这些地震叫一个地震序列．

地震序列大致有主震型、震群型、孤立型等三种类型．有人对我国大陆上 1949 年 10 月到 1970 年 12 月发生的 60 个地震序列作统计，发现主震型约占 63.4%，震群型占 20.0%，孤立型占 16.6%．

主震型可以 1975 年海城 7.3 级地震为代表．其特点是主震震级在整个序列中很突出，能量占全序列总能量的 90% 以上，前震和余震的震级都显著的小．全序列（包括主震）的大小地震比值 b 一般小于 0.6．余震的频度 N 随时间 t 按规律

$$N = N_0 t^{-p} \quad (N_0.\ \text{主震后第一天余震数},\ p.\ \text{衰减系数})$$

衰减较快（见图 16.1）．

孤立型地震的前震和余震更是小而少，它们的能量之和常不及主震的千分之一．大小地震极不成比例．余震频度衰减很快．1971 年延庆海陀山 5.5 级地震就属此类，震前 35 天内无 0.4 级以上小震，震后也只记到 7 个 1.6 级以下的小余震．

震群型地震的特点是没有很突出的主震，能量主要由多次震级相近的强震释放出来；其中最大地震的能量只占全序列总能量的 80% 以下．整个序列衰减慢，衰减系数 p 值较小，而 b 值一般大于 0.6．1966 年邢台地震就是震例．

为什么会有不同的震型，这是人们感兴趣的问题．茂木（K. Mogi）的岩石破裂模拟实验表明[27]，不同震型是由对岩石的加力方式的不同和岩石构造均匀程度的不同而造成的：

孤立型：在加力均匀而且构造均一的情况下发生．

震群型：在加力非常集中或者构造极不均一，或者两者皆有的情况下发生．

主震型：发生在介于以上两种情况之间的条件下．

茂木认为所施加于地震的外力大致相同，他把不同震型归因于构造均匀程度的不同（图 16.12）．在构造相同、均一的地方，可以突然发生孤立型大震；在构造很不均一（例如破碎带）的地方发生震群型地震；而主震型发生在介乎二者之间的情况下．他把日本的震型与实验作了比较，认为这种看法是正确的．他并且由震型来反推地壳的破碎程度，制成了日本附近地壳的破碎度分布图．

近年来我国工作者又注意到了岩石的受力历史和震型的关系[28]．在以图 16.13 所示的单轴加压方式的岩石破裂实验中，发现微破裂的数目与受力历史有关．当第一次对岩石样品加压时，观测到了很多微破裂，然后卸载．第二次加压但压力未达到原来的压力水平之前，微破裂极少；直到超过原来压力水平之后，才重新观测到微破裂．

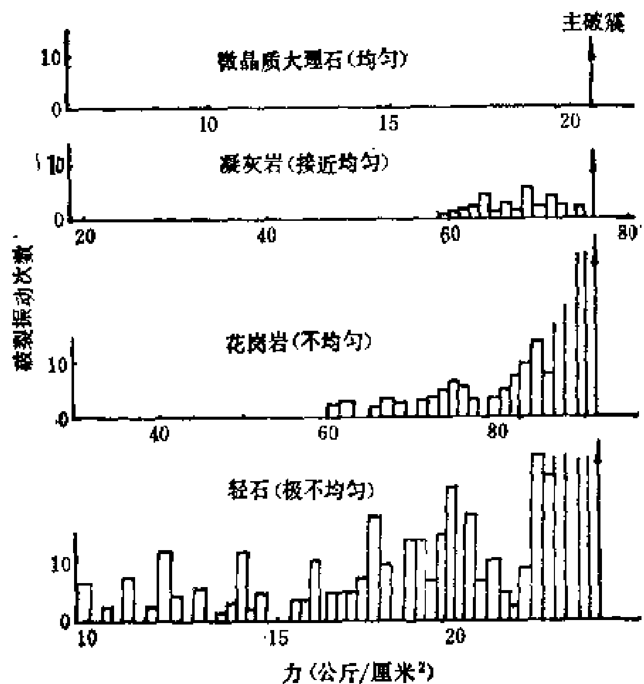


图 16.12 不同物质在应力均速增加时破裂之前的微破裂振动次数[37]

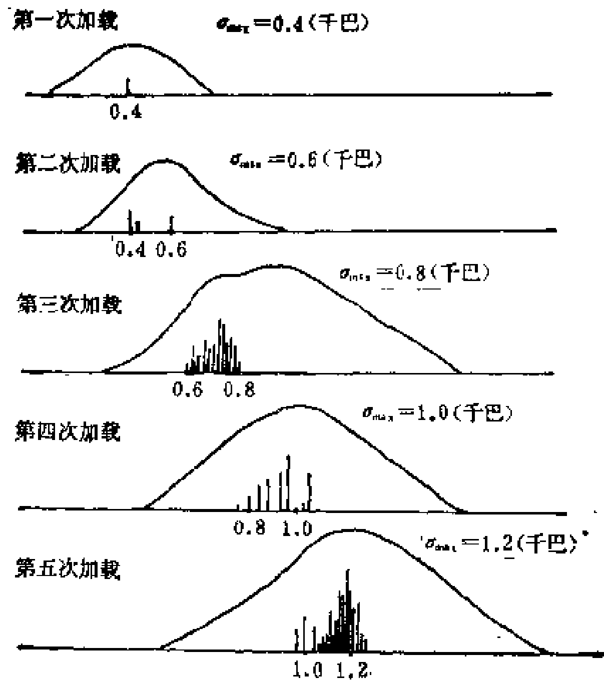


图 16.13 中细粒闪长岩重复加载实验[28]

用这个实验可以解释某些在同一地区短期内发生的两次地震序列却有很大不同的观测事实．例如，我国四川甘孜炉霍地区 1967 年发生 6.8 级地震时，前震很频繁；而在 1973 年发生 7.9 级地震时，前震却很少．这似乎可以解释为：第一次地震前，岩石相对均匀，相当于第一次加载，小地震(微破裂)就很多．第二次地震前，岩石已相对破碎，与第二次加载相当，在压力大于原先曾达到的压力水平之后才有小震发生，小震就较少．

看来震型的成因是较复杂的，如果再考虑到岩石破裂后的胶结过程，以及水的作用，情况可能更复杂些．但是一个强震发生之后，如何判断震型，这对抗震防震工作有重要意

义，是实际工作中急须解决的问题. 目前人们从已经发生的地震序列中总结出来的一些统计规律可以作为参考.

① 中国科学院地球物理所研究的国内外一些大震序列的情况表明，如果已经发生的强震震级比其最大前震高 2 级以上，或无明显的前震，那么这次强震就是主震，后面一般只有震级显著小于它的一些小余震.

② 强震之后，小震活动范围有明显扩大或迁移时，有可能继续发生强震，甚至更大.

2. 预报强余震

预报主震型序列的主震后的强余震也很重要. 虽然它们的震级比主震低，但往往能使受主震影响而变得不坚固的建筑物毁坏.

据统计有 75% 的较大余震在主震后的两天之内发生.

关于余震的最大震级，可利用下面统计公式估算：

$$M_{余最大} = 0.97M_{主} - 1.25$$

余震总是发生在主震附近. 但大地震的余震活动体积一般都很大，而且主震越大，余震活动范围也愈大:

$$\lg V = 0.90M_{主} - 2.00, \quad (4.9 \leqslant M_{主} \leqslant 7.9) \ (V. \text{ 公里}^3)$$

§15.5 中已经提到，余震震中分布面积常呈椭圆形. 余震区长轴 l 也随主震震级而增大：

$$\lg l = 0.31M_{主} - 0.40, \quad (4.5 \leqslant M_{主} \leqslant 7.9) \ (l. \text{ 公里})$$

因此，强余震的具体发生地点，须要根据弱余震的活动特点及其它前兆异常才能判断.

还须指出，有那么一部分地震，在整个序列似乎已经结束之后，又发生一个震级与最大余震相仿的地震，称为晚期余震[94]. 其性质有待研究. 对它也要注意预报，因为可能人们以为地震活动已经平息而放松警惕，造成损失.

§16.2 统 计 预 报

统计预报是对地震的强度、发生时间、地点等资料建立统计模型，以概率论为基础，用数理统计方法研究地震发生的规律. 例如:

在一定地区一定时间内，将以某一概率发生的地震最大震级有多大，或发生某种最大震级地震的概率为多大[29];

在一定地区和一定震级范围内，以某一概率预测下一次地震的发震时间，或在某一时间内将发生下一次地震的概率为多少[30];

在固定的震级和时间范围内，在某一地区发生一次地震之后，在另一个地区也将发生一次地震的概率是多少.

统计模型建立之后，要对它与实际资料拟合程度的好坏进行各种检验，如果内符检验情况良好，才能有较大把握进行外推预报. 当统计模型在模拟实际地震问题的某个方面比较恰当，观测资料又很多时，有可能取得较好的预报效果.

随着我国地震预报工作的开展，统计预报也受到重视并得到发展. 它在中长周预报中用得较多. 以下简略介绍最大震级的预报方法.

最大震级的预报是指在一定地区一定时间内对可能发生的最大震级作出预报. 在这

儿，地点和时间是固定的。

一、震级分布

如果把一定地区一定时间内发生的各次地震的震级X看作随机变量，它的概率分布函数就可以记作

$$F(x)=P(X\leqslant x),$$

其意思是"下次地震震级不超过x的可能性有多大?"．为了找出$F(x)$，可以从公式

$$\ln N=a-bM \tag{1}$$

出发．设$n(x)$是在一定时间内震级在$x-\Delta x$和$x+\Delta x$之间的地震次数，那么

$$n(x)=10^{a-bx}=e^{\alpha-\beta x}.$$

这儿

$$\alpha=a\ln 10,\quad \beta=b\ln 10.$$

在一定地区，一定时间内震级不超过x的地震次数为(只考虑0级以上地震)：

$$\int_0^x n(x)dx=\int_0^x e^{\alpha-\beta x}dx=\frac{e^\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta x}).$$

如果$x\to x^*$(x^*是地震震级的上限，到现在为止，按里克特-古登堡震级标度体系，还没有发现大于8.9级的地震.)，则得到地震的总数为

$$\int_0^{x^*} n(x)dx=\frac{e^\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta x^*}).$$

由$F(x)$的定义，知

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\frac{\text{震级不超过}x\text{的地震次数}}{\text{地震总次数}}$$

$$=\frac{1-e^{-\beta x}}{1-e^{-\beta x^*}}.\quad(0\leqslant x\leqslant x^*) \tag{2}$$

二、最大震级的分布

定义随机变量ζ为该地区一定时间——t年内的最大震级．而且以随机变量N表示t年内的地震次数，$x_1,x_2,\cdots,x_N$是这些地震的震级，在(1)、(2)式成立的条件之下，再假定:

随机变量$N,x_1,x_2,\cdots,x_N$相互独立，

在t年内发生的地震次数N服从泊松分布

$$P(N=i)=\frac{e^{-ct}(ct)^i}{i!}.\quad(i=0,1,2\cdots),$$

式中c是正的常数，为每年平均地震次数．记$P(\zeta\leqslant x|N=K)$为在t年内地震发生次数为K的条件下，最大地震不超过震级x的条件概率．那么，根据全概率公式在t年内最大震级ζ不超过x的发生概率为

$$G(x)=P(\zeta\leqslant x)=\sum_{K=0}^{\infty}P(N=K)P(\zeta\leqslant x|N=K)$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}P(N=K)P(x_1\leqslant x,x_2\leqslant x,\cdots x_K\leqslant x|N=K)$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} P(N=K)[F(x)]^K = \sum_{K=0}^{\infty} e^{-ct} \frac{(ct)^K}{K!} \left(\frac{1-e^{-\beta x}}{1-e^{-\beta x*}} \right)^K$$

$$= e^{-ct} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left[ct \frac{1-e^{-\beta x}}{1-e^{-\beta x*}} \right]^K}{K!} = e^{-ct} e^{ct \cdot \frac{1-e^{-\beta x}}{1-e^{-\beta x*}}}$$

$$= e^{-ct\left(1-\frac{1-e^{-\beta x}}{1-e^{-\beta x*}}\right)}$$

即

$$G(x) = \exp\{-t[e^{-\beta(x-u)}(1-e^{-\beta(x*-x)})]/(1-e^{-\beta x*})\}$$
$$\simeq \exp\{-t[e^{-\beta(x-u)}(1-e^{-\beta(x*-x)})]\}. \qquad (3)$$

式中

$$u = \frac{\ln c}{\beta}.$$

将分母 $(1-e^{-\beta x*})$ 近似取成 1，不仅简化了公式，而且对于改进在实践中已发现的震级小的地震个数的分布对泊松分布的偏离现象，也是有利的.

三、参 数 估 计

根据选定地区的地震资料，适当选择一个时间长度 t，截取 m 个不重迭的长为 t 年的时段(要使 m 比较大而每段的地震又不太少．这 m 个时段不必是连结的)．由资料查出第 j 个时段内发生的地震最大震级 $\tilde{x}_j(j=1,2,\cdots,m)$．把 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_m$ 由小到大按次序排列：

$$\tilde{x}^{(1)} \leqslant \tilde{x}^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \tilde{x}^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \tilde{x}^{(m)}.$$

其概率分布函数 $G_t(\tilde{x}^{(j)})$ 应遵从 (3) 式：

$$G_t(\tilde{x}^{(j)}) = \exp\{-t[e^{-\beta(\tilde{x}^{(j)}-u)}(1-e^{-\beta(x*-\tilde{x}^{(j)})})]\}, \quad (j=1,\cdots m).$$

另一方面可以证明 $G_t(\tilde{x}^{(j)})$ 的均值为 $\frac{j}{m+1}$，即

$$E(G_t(\tilde{x}^{(j)})) = \frac{j}{m+1}.$$

作为一种近似，可以认为

$$G_t(\tilde{x}^{(j)}) = \frac{j}{m+1}. \qquad (j=1,\cdots m)$$

因而有

$$y_j = -\ln\left(-\ln\frac{j}{m+1}\right) = \beta(\tilde{x}^{(j)}-u) - \ln(1-e^{-\beta(x*-\tilde{x}^{(j)})}) - \ln t.$$
$$(j=1,2,\cdots,m).$$

由观测资料得出 y_j，以 $(y_j, \tilde{x}^{(j)})$ 代入以上 m 个方程可以确定 β、u 的值，从而确定了最大震级的概率分布函数 (3) 式．不过这是非线性回归模型，计算比较复杂．有了 β、u 之后，$c=e^{\beta u}$ 即可求出.

四、预 测 应 用

由实际地震资料将 β、u、c 确定之后，最大震级的概率分布函数就确定了．可将它用

于预报.

(1) 在 t 年内以 0.99 的概率预测该地区发生的最大地震是几级的问题

这是要求算出下式中的震级 x 的值:

$$G(x) = P(\zeta \leqslant x) = 0.99,$$

即

$$\exp\{-t[e^{-\beta(x-u)}(1 - e^{-\beta(x^*-x)})]\} = 0.99.$$

由此可解出 x.

(2) 发生震级大于 x_0 级地震的危险性在多少年达到 99% 的问题

由

$$P(\zeta > x_0) = 0.99,$$

知

$$P(\zeta \leqslant x_0) = 0.01,$$

即

$$\exp\{-t[e^{-\beta(x_0-u)}(1 - e^{-\beta(x^*-x_0)})]\} = 0.01.$$

由此可解出 t, t 即为所求.

(3) 求发生某级以上地震的平均次数与复发周期

在某一单位时间(如一年)内在某地发生震级在 x 以上的地震平均次数为

$$N(x) = \int_x^{x^*} n(y)dy = \int_x^{x^*} e^{\alpha-\beta y}dy = \frac{e^\alpha}{\beta}[e^{-\beta x} - e^{-\beta x^*}].$$

式中 β 已求得,而 α 未知. 但是,如前面已经提到的,单位时间内零级以上地震总平均数为

$$\int_0^{x^*} e^{\alpha-\beta y}dy = \frac{e^\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta x^*}).$$

而又知单位时间内地震总平均数 $c = e^{\beta u}$, 所以,

$$\frac{e^\alpha}{\beta} = \frac{e^{\beta u}}{1 - e^{-\beta x^*}}.$$

于是发生 x 级以上地震的平均次数为

$$N(x) = \frac{e^{\beta u}(e^{-\beta x} - e^{-\beta x^*})}{1 - e^{-\beta x^*}} = \frac{e^{-\beta(x-u)} - e^{-\beta(x^*-u)}}{1 - e^{-\beta x^*}}.$$

则平均复发周期为

$$T(x) = \frac{1}{N(x)} = \frac{1 - e^{-\beta x^*}}{e^{-\beta(x-u)} - e^{-\beta(x^*-u)}}.$$

五、讨　论

本方法所用资料是时段内的最大震级,它在地震资料中被遗漏的机会要少些. 并且前震、余震一般都比主震低很多,它们被统计进来的机会也少. 所以,最大震级的概率预报一般与实际情况符合得好些.

§ 16.3 波速异常及其它

正在孕育着一个大地震的地区,其介质性质在应力作用下发生变化. 这个地区的地

震波速度也会发生变化．如果能观测到这种波速变化，就有可能作为一种前兆来预报地震。

一、观测波速变化的方法

目前常见到的方法主要有：

1. 人工地震法

在选定的地区（认为有地震危险的地区），在一点用火药起爆或用其它振动源发出地震波，在另一点接受这些地震波．每隔一定时间重复一次，长期监视两点之间的波速变化．人工地震法测量精度高，但费用贵，波穿透深度浅．

2. 近震波法

用区域台网测定波速变化的常见方法为：

① 和達直线法．作出和達直线，求其斜率 K，则纵横直达波波速比

$$\gamma = \frac{v_{\bar{P}}}{v_{\bar{S}}} = 1 + K.$$

② 用 § 12.1 中的计算法测定震源位置时已经直接求出了 $v_{\bar{P}}$、v_{ϕ} 的值，易知

$$\gamma = 1 + \frac{v_{\bar{P}}}{v_{\phi}}.$$

③ 设 $v_{\bar{P}}$、$v_{\bar{S}}$、$v_{P_{11}}$、$v_{S_{11}}$ 分别为 $\bar{P}$、$\bar{S}$、P_{11}、S_{11} 的平均速度，$T_{\bar{P}}$、$T_{\bar{S}}$、$T_{P_{11}}$、$T_{S_{11}}$ 为波的到时，T_0 为发震时刻，则

$$T_{\bar{P}} - T_0 = \frac{\sqrt{h^2 + \Delta^2}}{v_{\bar{P}}}, \quad T_{\bar{S}} - T_0 = \frac{\sqrt{h^2 + \Delta^2}}{v_{\bar{S}}},$$

$$T_{P_{11}} - T_0 = \frac{\sqrt{(2H - h)^2 + \Delta^2}}{v_{P_{11}}}, \quad T_{S_{11}} - T_0 = \frac{\sqrt{(2H - h)^2 + \Delta^2}}{v_{S_{11}}}$$

于是

$$T_{P_{11}} - T_{\bar{P}} = \frac{\sqrt{(2H - h)^2 + \Delta^2} - \frac{v_{P_{11}}}{v_{\bar{P}}}\sqrt{h^2 + \Delta^2}}{\frac{v_{P_{11}}}{v_{\bar{P}}} \cdot v_{\bar{P}}}$$

$$T_{S_{11}} - T_{\bar{S}} = \frac{\sqrt{(2H - h)^2 + \Delta^2} - \frac{v_{S_{11}}}{v_{\bar{S}}}\sqrt{h^2 + \Delta^2}}{\frac{v_{S_{11}}}{v_{\bar{S}}} \cdot v_{\bar{S}}}.$$

某些地区，往往有

$$\frac{v_{S_{11}}}{v_{\bar{S}}} \simeq \frac{v_{P_{11}}}{v_{\bar{P}}},$$

例如，根据河北地震队的资料，在邢台地区有

$$\frac{v_{S_{11}}}{v_{\bar{S}}} = 1.063, \quad \frac{v_{P_{11}}}{v_{\bar{P}}} = 1.068,$$

两者可视为相等。因此有

$$\frac{T_{S_{11}}-T_{\bar{S}}}{T_{P_{11}}-T_{\bar{P}}}=\frac{v_{\bar{P}}}{v_{\bar{S}}}=\gamma.$$

即用一个台的 S_{11} 与 $\bar{S}$、P_{11} 与 $\bar{P}$ 的到时差,就能求出波速比 γ. 但在研究 γ 的变化时,所用地震应是深度相近的浅震.

3. 远震波法

常用的是 P 波走时残差法[32]. 选定一个台站,测定它所记到的第 i 个地震的 P 波走时残差 F_i(震中距 Δ 最好在 25° 以上,这样可以不考虑上地幔复杂结构对 F_i 的影响),

$$F_i=t_{pi}-t_{poi}-E_i,$$

式中 t_{pi} 观测走时,即地震图上量出的 P 波到时减发震时刻 T_0;

t_{poi} 计算走时,即根据国际地震中心所发表的该地震震源位置计算 Δ,查 J-B 走时表所得走时;

E_i 椭球校正.

F_i 主要受以下几个因素的影响:

时间服务质量及量图误差;

发震时刻及震源位置测定得不够准确;

传播路径上介质不均匀所造成的走时损益;

台站附近地壳至上地幔介质状态的变化. 若取台站四周很多地震(n 个),对 F_i 作平均,前三种影响可以作为偶然误差而消去,但第四项却保留了下来. 即取

$$\bar{F}=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i}{n},$$

则其标准误差

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{F}-F_i)^2}{n(n-1)}}.$$

作出 $\bar{F}$ 随时间 t 的变化曲线. 当 $\bar{F}>0$ 时,表示观测走时大于计算走时,P 波迟到,即台站附近地壳上地幔 P 波速度减小;反之,当 $\bar{F}<0$ 时,表示 P 波速度增加.

§ 14.4 中安芸敬一等人[71] 引进的用 P 波走时残差资料进行反演的新方法,有可能细致地给出岩石层的三维速度分布随时间的变化.

此外,还可以在所监视地区的两侧选两个地震台,使其连线延长出去通过一个地震区. 经常把从那里来的地震面波在通过这两个台站之间的距离时的相速度求出来,看它随时间有什么变化. 也可以用一个地震台,选择和它在一个地球大圆面上的不同远震在台上的记录图,对 SH 波作波谱分析来测定速度的变化,对地震台附近地区进行监视.

在 § 15.4 中还曾提到,利用 P 波和 S 波振幅谱拐角频率之比,可以得到震源处的纵横波速比.

二、一些观测结果

图 16.14 是我国 1974 年 5 月 11 日永善-大关 7.1 级大震前 γ 值的变化曲线. 在震前

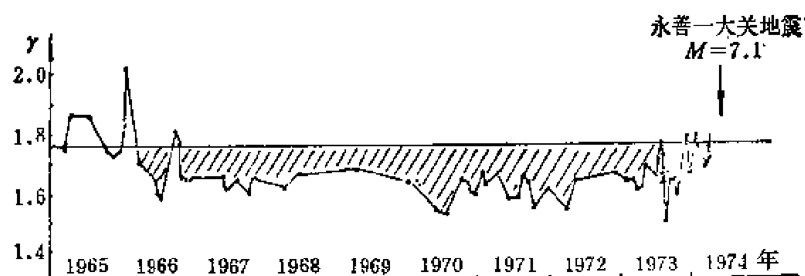


图 16.14　1974.5.11 永善-大关地震前的波速比负异常[34]

γ 值明显下降，持续一段时间后上升，然后大地震发生．震后，γ 的这种负异常消失．

1970 年 12 月 3 日宁夏西吉地震（$M = 5.7$）、1973 年 8 月 11 日四川南坪地震（$M = 6.5$）、1970 年 2 月 24 日四川大邑地震（$M = 6.2$）、1970 年 1 月 5 日云南通海地震（$M = 7.7$）、1963 年 8 月 16 日四川马边地震（$M = 5.9$）、1975 年 2 月 4 日海城地震（$M = 7.3$）之前，都有类似现象发生．

苏联加尔姆地区 1969 年 3.5 级以上地震之前和美国 1971 年兰山湖微震群、1971 年圣费尔南多 6.4 级地震之前，都有 γ、v_P 下降的类似情况．日本 1962 年北宫城 6.5 级地震前一年，γ 即开始下降；1968 年北长野 5.3 级地震前 3—4 个月，γ 开始下降，

根据国内外资料看来，γ、v_P 下降的幅度与主震震级无明显关系．但是，γ、v_P 负异常持续的时间 T（从负异常开始出现起，到较大地震发生时刻止．）愈长，主震震级 M 就愈大；异常分布面积 S 愈大时，主震震级 M 也愈大，并有以下经验关系：

$$\lg T = 0.58M - 0.86^{[13]} \quad (T.\ 天) \tag{1}$$

$$M = 1.7\lg S - 0.7^{[34]} \quad (S.\ 公里^2) \tag{2}$$

三、用于预报地震

一般是作 γ-t 变化曲线，γ 下降超出误差之外时应警惕．并测量异常区的面积 S，由 (2) 式估计 M，再由 (1) 式估计发震时刻

四、理论解释

对于震前 γ、v_P 下降的现象，肖尔茨（C. H. Scholz）等人[95]根据岩石波速与其中所含水的饱和状态的关系的模拟实验资料（图 16.15），认为孕震区岩石在足够大的应力作用下，产生新裂隙而造成体积膨胀，原先岩石中水的饱和状态被破坏，引起 v_P、γ 下降．随着构造作用力的增大，水开始由周围浸人 v_P、γ 又回升了．当水重新达到饱和，作用力再增加时，孔隙流体压力也增大，岩石变得容易错动，就出现断裂，发生地震．

另外一种观点是认为在大震孕育期间，震源区岩石由产生微破裂而体积膨胀，直到逐渐塑性化，在这个过程中速度和波速比都减小．到后期，岩石进人塑性硬化阶段，致使波速、波速比回升．最后岩石破裂，地震发生．在这里，不特别强调水的作用．有人把其具体过程粗略分为几个阶段来描述[34]．

① 在应力积累的第一阶段，未来震源区附近的岩石受到高度压缩，波速比先上升到一个极限高值．

② 应力进一步增大，岩石内部发生微破裂，在垂直于压缩方向上发生体积膨胀，这使

波速比 γ 急剧下降.

③ 在波速比负异常的区域内,介质性质是不均匀的. 应力在该区域内的某些薄弱部位上将更加集中,逐渐使这些部位成为塑性的,称为塑性化震源区.

④ 当塑性化震源区形成之后,在外围压应力继续增大的时候,震源区外围的应力应变状态要重新调整、集中,结果使微裂膨胀区内的某些裂缝发生闭合现象. 这种闭合可以引起波速比的回升. 而且这种回升可能是先外围地区、后塑性化震源区. 1974 年 5 月 11 日永善-大关地震之前就有波速比回升先外围地区而后发展到震源区附近的现象.

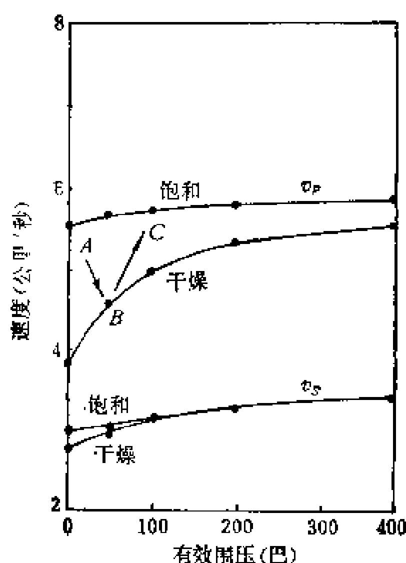


图 16.15[95]

⑤ 随着应力的继续加大,塑性震源区内的岩石最后进入塑性硬化阶段,这时波速比回升到一个较高的值. 然后,主震发生.

虽然有不少文献报导在地震之前有波速异常,但大多是震后总结得到的,真正在震前根据波速异常成功地预报地震的例子还不多. 我国 1976 年 8 月 16 日松潘-平武 7.2 级大震之前出现的波速比负异常现象是当时发出预报的依据之一.

五、其它方法

(1) 如前所述,大震孕育区岩石在应力作用下性质有所变化,这种变化由波速的改变反映出来. 那么,会不会从震前小震的振幅、周期等动力学特征中反映出来呢? 现在人们已开始作这方面的探索. 在新疆西克尔地区曾发现在较强地震发生之前,震源区附近弱震的高频分量有所增长[35]. 宁夏西吉地震之前, 小震的 $\bar{P}$、$\bar{S}$ 波的垂直向最大位移之比 $\frac{A_S}{A_P}$ 有下降现象[36]. 总之,研究小震波谱与大震的关系是可能的预报途径之一.

(2) 广泛研究地震波在不同地区的衰减的大小,可以了解介质背景情况,这对进一步研究一些地震现象也许是有益的. 同时,在孕震区,由于构造应力的作用,介质性质会有变化,这也可能反应在介质对地震波的吸收系数或介质品质因素 Q 值的变化上. 因此,观测介质 Q 值随时间的变化,也可能是预报地震的一条途径.

(3) 近年来,在小震的震源参数和大震预报之间也开始找关系. 广东地震大队发现,在正常情况下,小震的应力方向分布零乱,而临近大震时分布规则,即 P 波初动方向具有优势分布. 并且这种优势分布范围越大、持续时间越长,未来地震也越大; 其震中一般落在优势分布区附近. 震后这种优势分布消失. 邢台、海城地震之前也有小震机制呈一致性的现象. 因此,似乎可以认为,一群地震震源机制的一致性是判断地震危险性的一个有用判据.

(4) 据目前所知,地震波频率从地球的自由振动(频率 10^{-4} 赫)到岩石的微破裂 (10^6 赫),跨十个数量级,范围很广宽. 因此研制高频地震仪和长周期地震仪,观测更多的现象,将能为地震预报提供更多线索.

(5) 前面在不同地方曾提到一些室内模拟实验对于揭示一些破裂现象的本质、解释某些地震观测现象、研究地震成因有重要作用. 实际上，人们在地震波传播速度，震源模型，岩石破裂强度，岩石摩擦系数，破裂传播速度，地震波辐射效率，主破裂发生之前岩石形变曲线的变化特征，微破裂(相当于前震序列)的次数，波谱，大小破裂比值 b 等等方面都进行过一系列有意义的模拟实验. 模拟实验能控制或排除各个可能与地震形成有关的因素，对它们的作用一一加以实验观察；能以室内实验结果来供人们在解释野外观测现象和考虑地下震源过程时作参考或依据；能在短时间内使一些现象大量重复出现，从而加快对自然现象的认识过程. 因此，虽然模拟实验的某些结果不一定能马上直接用于地震预报，但是，它无疑是研究地震成因、地震预报的一个很重要的手段.

附录一 哑指标和克罗内克尔符号

1. 哑指标

有必要对哑指标法则作某些说明，在张量计算中是经常用到它的.

如果在笛卡尔空间中有向量 $\boldsymbol{A}$，我们可以用 A_i 表示向量 $\boldsymbol{A}$，A_i 为向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x_i 坐标轴方向的分量. 今后我们看到 A_i 便把它理解为向量.

设空间有二阶张量 $\boldsymbol{B}$，我们用 B_{ik} 表示张量 $\boldsymbol{B}$，B_{ik} 是张量 $\boldsymbol{B}$ 的分量. 由于 $i, k=1, 2, 3$，因此 B_{ik} 一共由九个标量组成，它相当于矩阵代数中的三阶方矩阵. 今后我们看到 B_{ik} 便将它理解为一个二阶张量. 如果有公式

$$C_k=\sum_{i=1}^{3} A_i B_{ik}+D_k, \quad k=1, 2, 3,$$

我们将省去求和号 $\sum_{i=1}^{3}$ 及 $k=1, 2, 3$，简记为

$$C_k=A_i B_{ik}+D_k. \tag{1}$$

上式即表示向量 $\boldsymbol{C}$ 等于向量 $\boldsymbol{A}$ 点乘二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 再加上向量 $\boldsymbol{D}$，即有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D},$$

因此，如果表达式的某一项中有一个指标重复出现，则意味着对该指标求和(从 1 到 3)，如前式中的指标 i. 而对其他单独出现的指标，则意味着可分别取 1，2，3. 如前式中的指标 k.

同一等式中的不同项，单独出现的指标数目和符号必须相同，如前式中的每一项中单独出现的指标都只有一个，并且符号都是 k.

同一等式中的某项有重复出现的指标，则将重复的指标换记为别的符号并不影响结果. 如可将前式中的 i 换记为 j，即记为 $C_k=A_j B_{jk}+D_k$.

将同一等式中的所有的项内单独出现的某一指标都换记为别的符号并不影响结果. 如可将前式中所有项中的指标 k 换记为 l. 即记为 $C_l=A_i B_{il}+D_l$.

以上各条便是哑指标法则. 采用这种记法后可使公式简洁，运算方便.

2. 克罗内克尔符号 δ

用二阶张量 δ_{ij} (即克罗内克尔符号 δ——Kroneker δ) 来表示二阶单位张量，它可用方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

来表示. 或用下式表示

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & 当\ i=j, \\ 0 & 当\ i\neq j. \end{cases} \tag{2}$$

利用 δ_{ij} 的定义 (2) 式可立即证明 δ_{ij} 的代换性质. 设有一任意阶的张量例如三阶张量 B_{klm}，则有

$$\left.\begin{aligned}\delta_{ij}B_{jlm} &= B_{ilm}\\ \delta_{ij}B_{kjm} &= B_{kim}\\ \delta_{ij}B_{klj} &= B_{kli}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

例如设 $i=1$，$l=2$，$m=3$，则（3）中的第一式为

$$\delta_{1j}B_{j23} = \delta_{11}B_{123} + \delta_{12}B_{223} + \delta_{13}B_{323} = B_{123}$$

可以证明 δ_{ij} 的值在正交笛卡尔坐标系的变换中保持不变.

3. 符号 δ_{klm}.

引入符号 δ_{klm} 来表示叉乘运算是方便的．它的定义如下

$$\delta_{klm} = \begin{cases} 0 & \text{当 } klm \text{ 三个中间有任意二个相等,} \\ 1 & \text{当 } klm \text{ 为 } 123,\ 231,\ 312, \\ -1 & \text{当 } klm \text{ 为 } 132,\ 213,\ 321. \end{cases} \qquad (4)$$

例如 $\delta_{113}=0$，$\delta_{111}=0$，$\delta_{123}=1$，$\delta_{132}=-1$ 等等．令 klm 为 1 2 称为基本排列，两指标每相互交换一次称为一次交换．例如 1 与 3 交换一次成 3 2 1．由 δ_{klm} 的定义（4）式可见，对 klm 的基本排列及其偶次交换（或称为偶序）δ_{klm} 的值为 1，而 klm 的值为基本排列的奇次交换时（或称为奇序），δ_{klm} 的值为 -1．不难证明

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C},$$

可以写成

$$A_k = \delta_{klm}B_lC_m, \qquad (5)$$

当 $k=1$

$$A_1 = \delta_{123}B_2C_3 + \delta_{132}B_3C_2 = B_2C_3 - B_3C_2,$$

当 $k=2$

$$A_2 = B_3C_1 - B_1C_3,$$

当 $k=3$

$$A_3 = B_1C_2 - B_2C_1.$$

所得结果与根据向量间的叉乘法则将 $\boldsymbol{b}$ 叉乘 $\boldsymbol{c}$ 所得到的结果相同.

设有任意向量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$，有熟知的公式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$$

如果改写成 δ_{klm} 的符号，则有

$$\delta_{klm}A_l\delta_{mij}B_iC_j = A_nC_nB_k \quad A_nB_nC_k$$

如再引入 δ_{ij} 的符号则上式可改写成

$$\delta_{klm}\delta_{mij}A_lB_iC_j = (\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{Kj}\delta_{li})A_lB_iC_j$$

由于 A_l、B_i、C_j 为任意向量，因此有

$$\delta_{klm}\delta_{mij} = \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li} \qquad (6)$$

当然利用 δ_{klm} 和 δ_{ij} 的定义亦可证明上面的重要结果（6）式.

注意（6）式中等号左边的项的重复的指标 m 必须相互靠近，如果不靠近可以用指标交换的办法使它们靠近，每交换一次相当于使 klm 的排列从偶序变为奇序或者相反，因此应反一次号，例如

$$\delta_{klm}\delta_{ijm} = -\delta_{klm}\delta_{mij}.$$

4. 拉氏算符∇

拉氏算符∇可记为$\frac{\partial}{\partial x_i}$，例如

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\varphi && \text{记为} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A} && \text{记为} \quad \frac{\partial \boldsymbol{A}_i}{\partial x_i} \\
&\nabla\times\boldsymbol{A} && \text{记为} \quad \delta_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}\boldsymbol{A}_m \\
&\nabla^2\varphi && \text{记为} \quad \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}\varphi \\
&\nabla\boldsymbol{A} && \text{记为} \quad \frac{\partial \boldsymbol{A}_i}{\partial x_j}
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

等等。

附录二　曲线坐标下横场的表达式

设有横场 $\boldsymbol{M}$，它满足向量赫姆霍兹方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{M} + k^2 \boldsymbol{M} = 0. \tag{1}$$

由于是横场，$\boldsymbol{M}$ 的散度为零，即有 $\nabla \cdot \boldsymbol{M} = 0$，因此横场的三个分量由一个线性方程相互联系着，从而独立的变量只有两个而不是三个.

选取适当的曲线坐标 ξ_1、ξ_2、ξ_3，以适合于相应的边界问题，特别注意使在边界面上某一坐标的值为常数，即这样来选取曲线坐标，使得边界面为坐标面. 例如在边界面上使 $\xi_1 = C$（C 为常数）. 对坐标 ξ_1，ξ_2，ξ_3 有相应的坐标基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 和度规因子 h_1，h_2，h_3. 我们希望用如下方法选取表达横场的标量，使得从其中之一所得的横场与边界面 $\xi_1 = C$ 相切，而另一个标量所得到的横场与前一个横场相垂直.

取垂直于 $\xi_1 = C$ 面即垂直于边界面的向量 $f\boldsymbol{e}_1$，其中 f 为 ξ_1，ξ_2，ξ_3 的函数，$\boldsymbol{e}_1$ 为沿 ξ_1 轴的单位向量，显然 $f\boldsymbol{e}_1$ 的散度一般不为零，这是因为 $\dfrac{1}{h_1 h_2 h_3} \dfrac{\partial (h_2 h_3 f)}{\partial \xi_1}$ 一般不为零.

定义向量

$$\boldsymbol{M} = \nabla \times (f\boldsymbol{e}_1) = \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3}(h_1 f) - \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2}(h_1 f). \tag{2}$$

下面将讨论在什么样的情况下，可以用这种形式来表达横场 $\boldsymbol{M}$. 也就是使 $\boldsymbol{M}$ 满足方程 (1)，且是横场(散度为零)，并在边界面上与边界面相切.

显然由 (2) 式定义的向量 $\boldsymbol{M}$ 与边界面 $\xi_1 = C$ 相切，且其散度为零，因此只要适当的选取 f，使 $\boldsymbol{M}$ 满足赫姆霍兹向量方程 (1)，则 f 就是所要选取的用来表达横场的一个标量.

由向量赫姆霍兹方程 $\nabla^2 \boldsymbol{M} + k^2 \boldsymbol{M} = 0$，可得到

$$-\nabla^2 \boldsymbol{M} = -\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{M}) + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{M} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{M} = k^2 \boldsymbol{M}. \tag{3}$$

因此我们仅需使 $\nabla \times \boldsymbol{M}$ 等于 $k^2 f \boldsymbol{e}_1$ 加上某标量的梯度，这样再对其求旋度便立即得到 $k^2 \boldsymbol{M}$. 这时 $\boldsymbol{M}$ 就满足了方程 (1). 然而

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{M} = &-\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 f\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 f\right)\right] \\ &+ \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 f\right) + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 f\right). \end{aligned} \tag{4}$$

分析上式可以看出，如要求 ξ_2 与 ξ_3 轴上的分量为某梯度的分量，只要 $\dfrac{h_3}{h_1 h_2}$ 和 $\dfrac{h_2}{h_1 h_3}$ 两者都与 ξ_1 无关，可以看出只要 h_1 和 $\dfrac{h_2}{h_3}$ 与 ξ_1 无关就行了. 这时就可交换偏微商的次序，并在 ξ_1 轴的方向上补上一项凑成一个梯度项，即得

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{M} = &\frac{1}{h_1^2}\nabla\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} h_1 f\right) - \boldsymbol{e}_1\left[\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} h_1 f + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 f\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 f\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

上式等号右边第一项只有在 h_1 与 ξ_2、ξ_3 都无关的情况下其旋度才为零，即才为一梯度项，因此 h_1 应与 ξ_1、ξ_2、ξ_3 都无关，即 h_1 为常数，一般它为单位 1．再考察上式中的方括弧中的项，看在什么样的情况下，它等于 $\nabla^2 f$，或设 $f=\varepsilon(\xi_1)\phi$，使方括弧中的项等于 $\varepsilon\nabla^2\phi$，有时尽管 f 不一定满足标量赫姆霍兹方程 $\nabla^2 f+k^2 f=0$，然而只要 ϕ 满足标量赫姆霍兹方程时，求解问题时也一样地方便．考察在此种条件下对 h_1、h_2、h_3 应有什么要求，也就是看看在什么样的坐标系以及对其中哪一些坐标轴能运用本方法．(5) 式中方括弧中的项等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}(\varepsilon\phi)-\frac{\varepsilon}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\phi\right)+\frac{\varepsilon}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}f\right)\\&\quad+\frac{\varepsilon}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}f\right)+\frac{\varepsilon}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}f\right)\\&=\frac{1}{h_1^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}(\varepsilon\phi)-\frac{\varepsilon}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(h_2h_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}\phi\right)\right\}+\varepsilon\nabla^2\phi. \qquad (6)\end{aligned}$$

令 $h_2h_3=g_1(\xi_2,\xi_3)s_1(\xi_1)$，要求 (6) 式中花括弧中的项等于零，即有

$$\frac{\partial^2(\varepsilon\phi)}{\partial\xi_1^2}-\frac{\varepsilon}{s_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(s_1\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\right)=\phi\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\xi_1^2}+2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}-\frac{\varepsilon}{s_1}\frac{\partial s_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}=0. \qquad (7)$$

如 ε 和 s_1 能满足上式，则 (6) 式中花括弧中的项等于零，由此 (5) 式中方括弧中的项便为 $\varepsilon\nabla^2\phi$，式子已大为简化，并达到了我们的要求．

可以看出，如 ε、s_1 能同时满足下面两个式子，则 (6) 式中花括弧中的项便为零，即有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\xi_1^2}=0,\\&2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_1}=\frac{\varepsilon}{s_1}\frac{\partial s_1}{\partial\xi_1}.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

由 (8) 式中的第一式得到 $\varepsilon=1$ 或 $\varepsilon=\xi_1$；而 (8) 式中的第二式可化为 $2\ln\varepsilon=\ln s_1$，或 $s_1=1$ 或 $s_1=\xi_1^2$．即当 s_1 为 1 时 ε 取 1，s_1 为 ξ_1^2 时 ε 取 ξ_1．在此条件下可使 (5) 式中的方括弧项等于 $\varepsilon\nabla^2\phi$，即得

$$\nabla\times\boldsymbol{M}=\frac{1}{h_1}\nabla\frac{\partial\varepsilon\phi}{\partial\xi_1}-\boldsymbol{e}_1\varepsilon\nabla^2\phi. \qquad (9)$$

如 ϕ 为标量赫姆霍兹方程的解，即如 ϕ 满足方程

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=0 \qquad (10)$$

则 (9) 式可化为

$$\nabla\times\boldsymbol{M}=\frac{1}{h_1}\nabla\frac{\partial f}{\partial\xi_1}+\boldsymbol{e}_1k^2f, \qquad (11)$$

h_1 为常数，一般为单位 1．而

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{M}=k^2\nabla\times(\boldsymbol{e}_1f)=k^2\boldsymbol{M}. \qquad (12)$$

由 (3) 式可见 $\boldsymbol{M}$ 是向量赫姆霍兹方程的解．现在所得到的横场已满足了我们的要求，即它是赫姆霍兹方程 (1) 的解，它的散度为零，且它与坐标面 $\xi_1=$ 常数相切

在这里总结一下坐标系应满足的条件：

1. 对应于坐标基 $\boldsymbol{e}_1$ 的度规因子 h_1 为常数，一般为单位 1．

2. 另外两个坐标轴的度规因子 h_2h_3 应满足 $\frac{h_2}{h_3}$ 与坐标 ξ_1 无关的要求．且设

$$h_2h_3 = g_1(\xi_2, \xi_3)s_1(\xi_1),$$

则 $s_1(\xi_1)$ 应为 1 或 ξ_1^2.

令 $f = \varepsilon(\xi_1)\phi$，当 $s_1(\xi_1) = 1$ 时 $\varepsilon(\xi_1)$ 取 1；当 $s_1(\xi_1) = \xi_1^2$ 时 ε 取 ξ_1，而 ϕ 应满足标量赫姆霍兹方程 (10).

仔细地考察常用的曲线坐标系后得知，对直角坐标系的 x、y、z 坐标，对圆柱坐标系的 z 坐标，对球坐标系的 r 坐标满足上述要求. 当把直角坐标系的任一坐标或圆柱坐标系的 z 坐标取为上述 ξ_1 坐标时，$s_1 = 1$，因此 $\varepsilon = 1$，从而 $f = \phi$，此时要求 f 本身满足标量的赫姆霍兹方程 $\nabla^2 f + k^2 f = 0$；当把球坐标系的 r 坐标取为 ξ_1 坐标时，此时 $s_1 = r^2$，因而 $\varepsilon = r$，$\phi = \frac{f}{r}$ 应满足标量赫姆霍兹方程 $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$. 此时可求得向量赫姆霍兹方程的与坐标面 $\xi_1 =$ 常数相切的横解

$$\boldsymbol{M} = \nabla \times (\boldsymbol{e}_1\varepsilon\phi).$$

由于 h_1 为常数，由 (2) 式可得

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varepsilon\phi}{\partial\xi_3} - \boldsymbol{e}_3\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varepsilon\phi}{\partial\xi_2} = \nabla(\varepsilon\phi) \times \boldsymbol{e}_1. \tag{13}$$

上面已得到了对应向量赫姆霍兹方程横解的两个标量场之一. 并由它求出了与坐标面 $\xi_1 =$ 常数相切的横场解. 下面求横场的另一解，可取如下场

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{e}_1\varepsilon\chi). \tag{14}$$

由前面对 $\nabla \times \boldsymbol{M}$ 的讨论可知，只要坐标系及 ε 满足前述要求，就有

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{kh_1}\nabla\frac{\partial\varepsilon\chi}{\partial\xi_1} - \boldsymbol{e}_1\frac{1}{k}\varepsilon\nabla^2\chi.$$

如 χ 满足标量赫姆霍兹方程 $\nabla^2\chi + k^2\chi = 0$，则有

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{kh_1}\nabla\frac{\partial\varepsilon\chi}{\partial\xi_1} + \boldsymbol{e}_1k\varepsilon\chi. \tag{15}$$

与 (3) 式一样，有

$$\begin{aligned}
-\nabla^2\boldsymbol{N} &= -\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{N}) + \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{N} \\
&= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{N} && (\text{由 (14) 知 } \nabla\cdot\boldsymbol{N} = 0) \\
&= \nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{e}_1k\varepsilon\chi) && (\text{利用 (15) 代换 } \boldsymbol{N}) \\
&= k^2\boldsymbol{N}. && (\text{由 (14) 式可得})
\end{aligned} \tag{16}$$

由上式可见 $\boldsymbol{N}$ 满足向量赫姆霍兹方程. 显然 $\boldsymbol{N}$ 是横场，且 $\boldsymbol{N}$ 是与 $\boldsymbol{M}$ 线性无关的，由此得到了向量赫姆霍兹方程的另一横解 $\boldsymbol{N}$. 这里在 $\boldsymbol{N}$ 的定义式 (14) 中引入因子 k 后可使 $\boldsymbol{N}$ 的量纲与 $\boldsymbol{M}$ 相同.

由 (15) 式及与 (13) 式同样的推导知 $\boldsymbol{N}$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{N} = \nabla\times(\boldsymbol{e}_1k\varepsilon\chi) = k\nabla(\varepsilon\chi)\times\boldsymbol{e}_1. \tag{17}$$

由上式可见 $\boldsymbol{N}$ 的旋度是与 ξ_1 坐标面相切的.

另外引入标量场 ϕ，只要 ϕ 满足标量赫姆霍兹方程 $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$，则显然 $\boldsymbol{L} = \nabla\phi$ 是满足向量赫姆霍兹方程的，显然 $\boldsymbol{L}$ 是无旋场，即 $\boldsymbol{L}$ 是纵场.

由此我们已定义了三个标量场 ϕ、ϕ、χ，它们都满足标量赫姆霍兹方程，并举出了一些坐标系的例子，在这些坐标系中取特定的坐标基 $\boldsymbol{e}_1$，由这些标量场 ϕ、ϕ、χ 和坐标基

$\boldsymbol{e}_1$ 可构成向量赫姆霍兹方程的解

$$\boldsymbol{L}=\nabla\phi,$$

$$\boldsymbol{M}=\nabla\times(\boldsymbol{e}_1\varepsilon\phi)=\nabla(\varepsilon\phi)\times\boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{e}_1\varepsilon\chi)=k\boldsymbol{e}_1\varepsilon\chi+\frac{1}{kh_1}\nabla\frac{\partial(\varepsilon\chi)}{\partial\xi_1},$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为纵场，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 为横场。

附录三 集中力位移场公式推导中的一些证明

1. 证明公式（见图 8.3 及 § 8.2 (32) 式）

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} dS = \begin{cases} 0, & 当 r > R, \\ 4\pi r^2 \dfrac{\boldsymbol{R}}{R^2}, & 当 r < R. \end{cases} \tag{1}$$

其中积分面 S 为以 (x_1, x_2, x_3) 点为心 r 为半径之球面. r_0, r, R 的定义见附录图 1 及 § 8.2(26, 20, 31) 式.

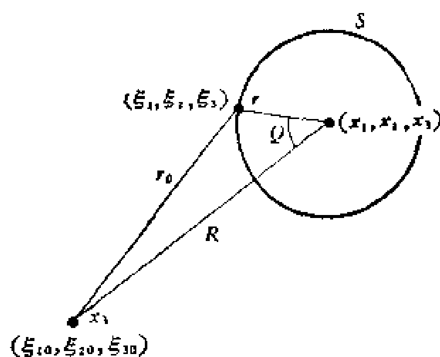
$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} dS = -\int_S \nabla_\xi(r_0^{-1})dS = \int_S \nabla_{\xi_0}(r_0^{-1})dS,$$

所以 ∇_{ξ_0} 即

$$\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial \xi_{10}} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial \xi_{20}} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial \xi_{30}},$$

与积分变数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 无关，因此可把 ∇_{ξ_0} 提到积分号外

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} dS = \nabla_{\xi_0}\int_S \frac{dS}{r_0} = \nabla_{\xi_0} I. \tag{2}$$



附录 图 1

下面求积分

$$I = \int \frac{dS}{r_0}. \tag{3}$$

把坐标原点移到 (x_1, x_2, x_3) 点，取球坐标，而 x_3 轴取在 (x_1, x_2, x_3) 点指向 $(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30})$ 点的方向，则有

$$I = \int_S \frac{dS}{r_0} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}}. \tag{4}$$

当 $R > r$ 时，

$$I = \frac{r^2}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta}} = \frac{2\pi r^2}{R}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\theta}}, \tag{5}$$

其中

$$a = \frac{r}{R}.$$

按照球函数的展开公式，有

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} a^l p_l(\cos\theta), \tag{6}$$

其中 $p_l(\cos\theta)$ 为 l 阶球函数.

将 (6) 代入 (5) 有

$$I = 2\pi \frac{r^2}{R} \sum_{l=0}^{\infty} a^l \int_0^{\pi} p_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{l+2}}{R^{l+1}} \int_{-1}^{1} p_l(x)dx. \tag{7}$$

按照球函数的理论

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } l \neq 0 \text{ 时, } \int_{-1}^{1} p_l(x)dx = 0, \\ &\text{当 } l = 0 \text{ 时, } p_l(x) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

以(8)代入(7)得

$$I = 2\pi \frac{r^2}{R}\int_{-1}^{1} dx = 4\pi \frac{r^2}{R}, \ (\text{当 } R > r) \tag{9}$$

$$\nabla_{\xi_0} I = 4\pi r^2 \nabla_{\xi_0} \frac{1}{R} = 4\pi r^2 \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}. \quad (\text{当 } R > r) \tag{10}$$

(10)代入(2)，因此有当 $R > r$ 时，

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3} dS = 4\pi r^2 \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}, \quad (\text{当 } R > r) \tag{11}$$

当 $R < r$ 时，

$$\begin{aligned} I &= \int_S \frac{ds}{r_0} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}} \\ &= 2\pi r \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{R}{r}\right)\cos\theta}} \\ &= 2\pi r \int_0^{\pi} \sum_{l=0} \left(\frac{R}{r}\right)^l p_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ &= 2\pi \sum_{l=0} \frac{R^l}{r^{l-1}} \int_{-1}^{1} p_l(x)dx \\ &= 2\pi r \int_{-1}^{1} p_0(x)dx = 4\pi r. \end{aligned}$$

由此有

$$\int_S \frac{\boldsymbol{r}}{r_0^3} dS = \nabla_{\xi_0} 4\pi r = 0. \quad (\text{当 } R < r) \tag{12}$$

由(11)及(12)知(1)式得证。

2. 已知§8.2(33)、(34)式，即

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \cdot \int_0^{R/\alpha} \tau \boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau, \\ \boldsymbol{\phi} &= \frac{-1}{4\pi\rho} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \times \int_0^{R/\beta} \tau \boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

求

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\phi}. \tag{14}$$

解

引入直角坐标为的哑指标符号，即有

$$\phi = \frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{x_i}{R^3} \int_0^{R/\alpha} \tau F_i(t-\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}=\frac{1}{4\pi\rho}\left[-3\frac{x_j x_i}{R^5}\int_0^{R/\alpha}\tau F_i(t-\tau)d\tau+\frac{\delta_{ji}}{R^3}\int_0^{R/\alpha}\tau F_i(t-\tau)d\tau\right.$$
$$\left.+\frac{R}{\alpha^2 R}\frac{x_j x_i}{R^3}F_i\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right]=\frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{x_j x_i}{\alpha^2 R^3}F_i\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{R^3}\left(\delta_{ji}-\frac{3x_j x_i}{R^2}\right)\int_0^{R/\alpha}\tau F_i(t-\tau)d\tau\right].$$

上式可表达为

$$\nabla\phi=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)-\frac{1}{4\pi\rho R^3}\left(3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}-\boldsymbol{I}\right)$$
$$\cdot\int_0^{R/\alpha}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau. \tag{15}$$

或

$$\nabla\phi=\boldsymbol{u}_P+\boldsymbol{u}_{L1} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{u}_P$ 为(15)式中等号右边第一项,或§8.2(36)式,$\boldsymbol{u}_{L1}$ 为(15)式等号右边第二项.

引入哑指标符号,则(13)式中的第二式可表达为

$$\phi_m=-\frac{1}{4\pi\rho}\delta_{mlk}\frac{x_l}{R^3}\int_0^{R/\beta}\tau F_k(t-\tau)d\tau,$$

$$\delta_{jim}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_m=-\frac{1}{4\pi\rho}\delta_{jim}\delta_{mlk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{x_l}{R^3}\int_0^{R/\beta}\tau F_k(t-\tau)d\tau\right]$$
$$=-\frac{1}{4\pi\rho}(\delta_{jl}\delta_{ik}-\delta_{jk}\delta_{il})\left[\left(\frac{\delta_{il}}{R^3}-3\frac{x_i x_l}{R^5}\right)\int_0^{R/\beta}\tau F_k(t-\tau)d\tau\right.$$
$$\left.+\frac{x_l x_i}{R^3\beta^2}F_k\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\right]=\frac{1}{4\pi\rho\beta^2 R}\left(\delta_{jk}-\frac{x_j x_k}{R^2}\right)$$
$$\cdot F_k\left(t-\frac{R}{\beta}\right)+\frac{1}{4\pi\rho R^3}\left(3\frac{x_j x_k}{R^2}-\delta_{jk}\right)$$
$$\cdot\int_0^{R/\beta}\tau F_k(t-\tau)d\tau.$$

上式可表达为

$$\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\frac{1}{4\pi\rho\beta^2 R}\left[\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right]\cdot\boldsymbol{F}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)$$
$$+\frac{1}{4\pi\rho R^3}\left(3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}-\boldsymbol{I}\right)\cdot\int_0^{R/\beta}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau. \tag{17}$$

或

$$\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{u}_S+\boldsymbol{u}_{L2},$$

其中 $\boldsymbol{u}_S$ 为(17)式中等号右边第一项,或§8.2(37)式,$\boldsymbol{u}_{L2}$ 为(17)式等号右边第二项.

$$\boldsymbol{u}_L=\boldsymbol{u}_{L1}+\boldsymbol{u}_{L2}=\frac{1}{4\pi\rho R^3}\left(3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}-\boldsymbol{I}\right)\cdot\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau\boldsymbol{F}(t-\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi\rho}\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\tau\left\{3\frac{\boldsymbol{R}}{R^5}[\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{F}(t-\tau)]-\frac{\boldsymbol{F}(t-\tau)}{R^3}\right\}d\tau. \tag{18}$$

(18)式即§8.2中(38)式.由此可求得位移场

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{u}_P+\boldsymbol{u}_S+\boldsymbol{u}_L, \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{u}_P$、$\boldsymbol{u}_S$、$\boldsymbol{u}_L$ 由§8.2(36、37、38)式表达.

附录四 公式的证明

求证：

$$\nabla \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \cdot \boldsymbol{h}(t) = \nabla \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \times \boldsymbol{h}(t) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{h}(t)$ 仅与时间有关而与坐标无关．$\boldsymbol{e}_R$ 为 R 方向上的单位向量．$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}$，拉氏算符 ∇ 为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

证：

$$\nabla \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \cdot \boldsymbol{h} = \nabla \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \cdot \boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j h_j}{R^3}\right) = \boldsymbol{e}_i h_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{R^3}\right)$$

$$= \frac{1}{R^3}\left(\delta_{ij} - 3\frac{x_i x_j}{R^2}\right) h_j \boldsymbol{e}_i, \tag{2}$$

在(2)式中已省去了 ξ_i，这并不影响结果，只要在最后的结果中将 $x_i-\xi_i$ 来代替 x_i 即可．

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} \times \boldsymbol{h} = \nabla \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \times \boldsymbol{h} = \boldsymbol{e}_i \delta_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{kmn} \frac{x_m}{R^3} h_n$$

$$= \boldsymbol{e}_i(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) h_n \left(\frac{\delta_{jm}}{R^3} - 3\frac{x_m x_j}{R^5}\right)$$

$$= \boldsymbol{e}_i h_j \left(\frac{\delta_{ji}}{R^3} - 3\frac{x_i x_j}{R^5}\right) - \boldsymbol{e}_i h_i \left(\frac{\delta_{jj}}{R^3} - 3\frac{x_j x_j}{R^5}\right)$$

$$= \frac{1}{R^3}\left(\delta_{ji} - 3\frac{x_i x_j}{R^2}\right) h_j \boldsymbol{e}_i. \tag{3}$$

将(3)式与(2)式比较，立即可见(1)式成立．

附录五 最速落径法

在复 k 平面上有积分

$$I = \int_L G(k) e^{rf(k)} dk, \tag{1}$$

并设在积分的上、下限处 $f(k)$ 的实部都取较大的负值，求当 r 充分大时，积分 (1) 的近似值.

设 $f(k)$ 为复 k 平面上某区域 C 上的解析函数，(1) 式中的积分迴路 L 取在区域 C 上，设

$$k = \xi + i\eta, \tag{2}$$

$$f(k) = P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta). \tag{3}$$

由解析函数的哥西-黎曼条件有

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{\partial Q}{\partial \xi}. \tag{5}$$

对 (4) 式求 $\frac{\partial}{\partial \xi}$，对 (5) 式求 $\frac{\partial}{\partial \eta}$，再把两式相加可得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} = 0. \tag{6}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} = 0 \tag{7}$$

设区域 C 上有曲线 $P(\xi,\eta) = \text{const}$，沿曲线有

$$dP = \frac{\partial P}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta = 0.$$

曲线的法线为 $\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}, \frac{\partial P}{\partial \eta}\right)$.

对曲线 $Q(\xi, \eta) = \text{const}$，设曲线有

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Q}{\partial \eta} d\eta = 0.$$

由哥西-黎曼条件得

$$dQ = -\frac{\partial P}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial P}{\partial \xi} d\eta = 0,$$

曲线的法线为 $\left(-\frac{\partial P}{\partial \eta}, \frac{\partial P}{\partial \xi}\right)$.

显见，通过同一点的两曲线的法线是相互垂直的，因此 $P(\xi, \eta) = \text{const}$ 与 $Q(\xi, \eta) = \text{const}$ 处处相互垂直.

只要积分的始点和终点不变，在被积函数的解析区域内连续变化积分迴路不影响积

分值，因此可想法变化积分迴路，使通过这样的点，使在此点附近 P 以最大的速率减小而伸向积分的始点和终点，此时只要 r 充分大，就只要考虑此点附近的积分迴路就够了．令所讨论的点为 k_0，使满足

$$f'(k_0)=0, \tag{8}$$

由解析函数的性质知，在 k_0 点必有

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial Q}{\partial \xi}=\frac{\partial Q}{\partial \eta}=0,$$

因此 k_0 点为 P 和 Q 的极值点．且由 (6) 式可知 k_0 点必为 P 的鞍点(因为调和函数只可能在边界上达到最大值或最小值)．再由于 $P(\xi,\eta)=\text{const}$ 曲线的法线方向 P 值变化最快，由前面的讨论可知，这就是 $Q(\xi,\eta)=\text{const}$ 的方向，也就是说在 k_0 点附近 $Q(\xi,\eta)=\text{const}$ 的方向上 P 值变化最快．

变化积分迴路 L，使通过 k_0 点 (k_0 点应满足 (8) 式给出的条件)，再使积分迴路沿 $Q(\xi,\eta)=\text{const}$ 的方向上伸向 P 值的谷区，则可用 k_0 点附近的沿这样的积分迴路的积分作为整个迴路积分的近似值．

在 k_0 点附近展开 $f(k)$ 得

$$f(k)\simeq f(k_0)+\frac{1}{2}(k-k_0)^2 f''(k_0). \tag{9}$$

令

$$k-k_0=Re^{i\chi}, \tag{10}$$

即用方位角为 χ 的直线段来代表积分迴线．再由于积分迴线在 k_0 点的两侧都伸向 e^{rP} 的谷区，且 $Q(\xi,\eta)=\text{const}$，因此 $\frac{1}{2}(k-k_0)^2 f''(k_0)$ 应为负实数，引入 x 使

$$x^2=-\frac{1}{2}(k-k_0)^2 f''(k_0)=-\frac{1}{2}R^2 e^{i2\chi} f''(k_0). \tag{11}$$

因此有

$$\begin{aligned} x&=\pm R|f''(k_0)|^{\frac{1}{2}}=\pm(k-k_0)e^{-i\chi}|f''(k_0)|^{\frac{1}{2}},\\ \frac{\partial x}{\partial k}&=\pm e^{-i\chi}|f''(k_0)|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

χ 为相差为 π 的两值之一，可选取 χ 使 (12) 式中取正号，则有

$$\begin{aligned} I&\simeq e^{rf(k_0)}\int_{-\infty}^{\infty}G(k)e^{-\frac{1}{2}rx^2}\frac{dk}{dx}\,dx\simeq\frac{e^{rf(k_0)+i\chi}}{|f''(k_0)|^{\frac{1}{2}}}G(k_0)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}rx^2}\,dx\\ &=\frac{\sqrt{2\pi}\,G(k_0)}{|rf''(k_0)|^{\frac{1}{2}}}e^{rf(k_0)+i\chi}. \end{aligned} \tag{13}$$

参 考 文 献

[1] 傅承义，1976．地球十讲，科学出版社．
[2] 朗道 Л. Д. 和 栗弗席兹 E. M.，1963．连续媒质电动力学，周奇译，人民教育出版社，353 页．
[3] 布列霍夫斯基，Л. M.，1960．分层介质中的波，杨训仁译，科学出版社．
[4] 陈运泰，1974．多层弹性半空间中的地震波(一)，地球物理学报，**17**，1，20—43．
[5] 姚振兴等，1974．1966 年邢台地震的烈度异常，地球物理学报，**17**，2，106—121．
[6] 古登堡，B.，1965．地球内部物理学，王子昌译，科学出版社．

[7] 布伦, K. E., 1965. 地震学引论,朱专镇、李钦祖译,科学出版社.
[8] 李白基等, 1977. 地震面波频散的数字计算,地球物理学报, **20**, 4, 283—298.
[9] 宋仲和等, 1965. 我国大陆表面沉积层的研究,地球物理学报, **14**, 3, 156—167.
[10] 宋仲和、谭承业, 1965. 用瑞雷和乐夫面波群速度确定我国地壳厚度,地球物理学报, **14**, 1, 33—44.
[11] 曾融生、宋子安, 1963. 我国境内瑞雷波的相速度,地球物理学报, **12**, 2, 148—165.
[12] 陈培善、严寿民, 1975. 震源机制与烈度分布的关系,地球物理学报, **18**, 1, 11—25.
[13] 刘正荣, 1961. 用宏观方法测定震源深度的量板、地球物理学报, **10**, 2, 113—118.
[14] 时振梁, 1974. 中国地震活动的某些特征,地球物理学报, **17**, 1, 1—12.
[15] 魏格纳, A., 1924. 海陆的起源,李旭旦译, 1964, 商务印书馆.
[16] 傅承义, 1972. 大陆漂移、海底扩张和板块构造. 科学出版社.
[17] 王妙月等, 1976. 新丰江水库地震的震源机制及其成因初步探讨,地球物理学报, **19**, 1, 1—16.
[18] 郑治真等, 1975. 爆破与地震的差异,地球物理学报, **18**, 3, 208—216.
[19] 曾融生等, 1965. 我国西北地区地壳中的高速夹层. 地球物理学报, **14**, 2, 94—105.
[20] 武汉测绘学院, 1964. 最小二乘法,第三章. 中国工业出版社. 第四版.
[21] 布内, B. И., 等, 1965. 地震活动性的详细研究方法,谢毓寿译,科学出版社.
[22] 丁韫玉, 1965. SP′ 波与我国的地壳厚度,地球物理学报, **14**, 3, 168—172.
[23] 陈颙, 1975. 测定浅震震源参数的宏观方法,地球物理学报, **18**, 4, 246—255.
[24] 郭增建等, 1973. 震源孕育模式的初步讨论,地球物理学报, 16, 43—48.
[25] 陈运泰等, 1975. 根据地面形变的观测研究 1966 年邢台地震的震源过程,地球物理学报, **18**, 3, 164—181.
[26] 吴开统等, 1976. 海城地震序列的特征,地球物理学报, **19**, 2, 95—109.
[27] 茂木清夫, 1969. 岩石破壊実験——地震现象解明のために,科学, **39**, 2, 95—102.
[28] 中国科学院地球物理研究所第三研究室实验组, 1976. 单轴压力下岩石破裂的初步研究, 地球物理学报, **19**, 4, 306—316.
[29] 陈培善、林邦慧, 1973. 极值理论在中长期地震预报中的应用,地球物理学报, 16, 6—24.
[30] 徐钟济等, 1974. 地震发生时间的概率预报(一),地球物理学报, **17**, 1, 51—71.
[31] 陈运泰等, 1976. 中小地震体波的频谱和纵、横波拐角频率比,科学通报, 9, 414—418.
[32] 李全林等, 1978. b 值时空扫描——监视破坏性地震孕育过程的一种手段,地球物理学报, **21**, **2**, 101—124.
[33] 柯龙生等, 1977. 前震序列与一般小震群活动规律的探讨,地球物理学报, **20**, 2, 89—94.
[34] 冯德益等, 1977. 我国西部地区一些强震及中强震前后波速异常的初步研究(二),地球物理学报, **20**,2,115—122.
[35] 朱传镇等, 1975. 新疆西克尔地区微震波谱的初步研究,地球物理学报, **18**, **4**, 256—268.
[36] 冯德益, 1974. 近地震 $\bar{S}$、$\bar{P}$ 波振幅比异常与地震预报,地球物理学报, **17**, 3, 140—154.
[37] Papoulis, A., 1962. The Fourier Integral and Its Applications, McGraw-Hill Book Company, Inc.
[38] Brigham, E. O., 1974. The Fast Fourier Transform, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.
[39] Knopoff, L., 1964. Q, *Rev. of Geophys.*, **2**, **4**, 625—660.
[40] Knopoff, L. and J. F. MacDonald, 1958. Attenuation of small amplitude stress waves in solids, *Reviews of Modernphys.*, **30**, 4, 1178—1192.
[41] Futterman, W. I., 1962. Dispersive body waves, *J. Geophys. Res.*, **67**, 13, 5279—5291.
[42] Kronig, R., 1926. On the theory of the dispersion X-rays, *J. Opt. Soc. Am.*, **12**, 6, 547—557.
[43] Kramer, H. A., 1927. La diffusion de la lumiere par les atomes, *Atti Congr. Intern. Fisica.* Como **2**, 545—557.
[44] Jauch, J. M., and F. Rohrlich, 1955. The Theory of Photons and Electrons, Appendix 7, Addison-Wesley, Cambridge, Mass.
[45] Khallurin, V. I and T. G. Rautian, 1977. The spectral content of Pamir-Hindu Kush intermediate depth earthquakes evidence for a high-Q zone in the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, **82**, 20, 2931—2943.
[46] Ewing, M. W., W. S. Jardetzky, F. Press, 1957. Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Co., Inc. New York.
[47] Hasen, W. W., 1935. A new type of expansion in radiation problems, *Phys. Rev.*, **47**, 2, 139—143.
[48] Morse, M. M. and H. Feshbarch, 1953. Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill Book Co., New York.
[49] Haskell, N. A., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **43**, 1, 17—34.
[50] Haskell, N. A., 1964. Radiation pattern of surface waves from point sources in a multilayered medium, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **54**, 1, 377—393.
[51] Dziewonski, A. M. et al., 1975. Parametrically simple earth models consistent with geophysical

data. *Phys. Earth Plan. Int.*, **10**, 1, 12—48.

[52] Landisman, M. et al., 1969. Recent improvement in the analysis of surface wave observations, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **17**, 4, 369—403.

[53] Dzienwonski, A. et al., 1969. A technique for the analysis of transient seismic signals, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **59**, 1, 427—444.

[54] Dzienwonski, A. M. and A. L. Hales, 1972. Numerical analysis of dispersed seismic waves, *Methods in Computational Phys.*, **11**, 39—85.

[55] Bloch, S. and A. L. Hales, 1968. New techniques for the determination of surface wave phase velocities, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **58**, 3. 1021—1036.

[56] Burridge. R. and L. Knopoff, 1964. Body force equivalents for seismic dislocations, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **54**, 6, 1875—1888.

[57] Anderson, J. G. and P. G. Richards, 1975. Comparison of strong ground motion for several dislocation models, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **42**, 2, 347—373.

[58] Mindlin, R. D. and D. H. Cheng, 1950. Thermoelastic stress in the semi-infinite solid, *J. Applied Phys.*, **21**, 9, 931—933.

[59] Steketee, J. A., 1958. On Volterra's dislocations in a semi-infinite elastic medium, *Can. J. Phys.*, **36**, 2, 192—205.

[60] Maruyama, T., 1964. Statical elastic dislocations in an infinite and semi-infinite medium, *Bull. Earthq. Res. Inst. Univ. Tokyo*, **42**, 2, 289—368.

[61] Ben-Menahem, A. and S. J. Singh, 1968. Multipolar elastic fields in a layered half-space, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 5, 1519—1572.

[62] Singh, S. J., 1970. Static deformation of a multilayered half-space by internal sources, *J. Geophys. Res.*, **75**, 17, 3257—3263.

[63] Courant, R. and D. Hilbert, 1953. Methods of Mathematical Physics, Interscience Publishers, Inc., New York, pp. 526—533.

[64] Fu, C. Y., 1947. Studies on seimic waves III. *Geophysics*, **12**, 1, 57—71.

[65] Barazangi, M. and J. Dorman, 1969. World seismicity map of ESSA Coast and Geodetic Survey epicentre data for 1961—1967, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **59**, 1, 369—380.

[66] Båth, M., 1973. Introduction to Seismology, Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart.

[67] Stacey, F. D., 1977. Physics of the Earth, John Wiley & Sons, New York, second edition.

[68] Isacks, B. et al., 1968. Seismology and the new global tectonics, *J. Geophys. Res.*, **73**. 18, 5855—5899.

[69] Wyss, M. and Brune, J., 1968. Seismic moment, stress and source dimensions for earthquake in the California-Nevada region, *J. Geophys. Res.*, **73**, 14, 4681—4694.

[70] Richter, C. F., 1935. An instrumental earthquake magnitude scale, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **25**. 1, 1—32.

[71] Herrin, E. et al., 1968. Special number-1968 seismological tables for P phases, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 4, 1193—1239.

[72] Aki, K. et al., 1977. Determination of the three-dimensional seismic structure of the lithosphere, *J. Geophys. Res.*, **82**, 2, 277—296.

[73] Ingram, R. E. and J. H. Hodgson, 1956. Phase change of pP and pP on reflection at a free surface, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **46**, 3, 203—213.

[74] Båth, M., 1974. Spectral Analysis in Geophysics (Developments in Solid Earth Geophysics 7), Elsevier Scientific Pub. Co.

[75] Teng, T. L. and A. Ben-Menahem, 1965. Mechanism of deep earthquakes from spectrums of isolated body wave signals, 1. the Banda Sea earthquake of March 21, 1964, *J. Geophys. Res.*, **70**, 20, 5157—5170.

[76] Ben-Menahem, A. et al., 1965. A procedure for source studies from spectrums of long-period seismic body waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **55**, 2, 203—235.

[77] Anderson, D. L. and C. B. Archambeau, 1964. The anelasticity of the earth, *J. Geophys. Res.*, **69**, 10, 2071—2084.

[78] Davies, J. B. and S. W. Smith, 1968. Source parameters of earthquakes and discrimination between earthquakes and nuclear explosions, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 5, 1503—1517.

[79] Ben-Menahem, A. and M. N. Toksöz, 1963. Source Mechanism from spectrums of long-period surface waves, 2. the Kamchatka earthquake of November 4, 1952, *J. Geophys. Res.*, **68**, 18, 5207—5222.

[80] Brune, J. N. et al., 1961. The pole phase shift of surface waves on a sphere, *Bull. Seism. Soc. Am.*,

51, 2, 247—257.

[81] Kanamori, H., 1970. Synthesis of long-period surface waves and its applications to earthquake source studies-Kurile island earthquake of October 13, 1963, *J. Geophys. Res.*, **75**, 26, 5011—5027.

[82] Udias, A., 1971. Source parameters of earthquakes from spectra of Rayleigh waves, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **22**, 4, 353—376.

[83] Khattri, K., 1972. Body wave directivity functions for two-dimensional fault model and kinematic parameters of a deep focus earthquake, *J. Geophys. Res.*, 77, 11, 2062—2071.

[84] Bollinger. G. A., 1968. Determination of earthquake fault parameters from long-period P waves, *J. Geophys. Res.*, **73**, 2, 785—807.

[85] Bollinger, G. A., 1970. Fault length and fracture velocity for the Kyushu, Japan, earthquake of October 3, 1963, *J. Geophys. Res.*, **75**, 5. 955—964.

[86] Randall, M. J., 1973. The spectral theory of seismic sources, *Bull. seism. Soc. Am.*, **63**, 3, 1133—1144.

[87] Aki, K., 1967. Scaling law of seismic spectrum, *J. Geophys. Res.*, **72**, 4, 1217—1231.

[88] Kanamori, H. and D. L. Anderson, 1975. Theoretical basis of some empirical relations in seismology, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **65**, 5, 1073—1095.

[89] Keilis-Borok, V. I., 1959. On estimation of the displacement in an earthquake source and of source dimensions, *Ann. Geofis.*, **12**, 2, 205—214

[90] Knopoff, L., 1958. Energy release in earthquakes, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **1**, 1, 44—52.

[91] Starr, A. T., 1928. Slip in a crystal and rupture in a solid due to shear, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24**, 489—500.

[92] Brune, J. N., 1970. Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes, *J. Geophys. Res.*, 75, 26, 4997—5009.

[93] Benioff, H., 1951. Earthquakes and rock creep (Part I: Creep characteristics of rocks and the origin of aftershocks,), *Bull. Seism. Soc. Am.*, **41**, 1, 31—62.

[94] Evison, F. F., 1973. Late aftershocks, tectonic stress and dilatancy, *Nature*, **246**, 5434/35, 471—472.

[95] Whitcomb, J. H. et al., 1973. Earthquake prediction: variation of seismic velocities before the San Francisco Earthquake, *Science*, **180**, 4086, 632—635.

[96] Linde, A. T. and I. S. Sacks, 1972. Dimensions, energy, and stress release for South American deep earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **77**, 8, 1439—1451.

[97] Duda, S. J., 1978. Physical significance of the earthquake magnitude-the present state of interpretation of the concept, *Tectonophysics*, **49**, 3—4, 119—130.

[98] Aki, K., 1972. Scaling law of earthquake source time-function, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **31**, 1, 3—25.

[99] Kanamori, H., 1977. The energy release in great earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **82**, 20, 2981—2987.